ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-34-53

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов (г. Тула)

Аннотация

Экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана для положительно определенных функций в евклидовом пространстве или для функций с неотрицательным преобразованием Фурье имеют многообразные приложения в теории функций, теории приближений, теории вероятностей и метрической геометрии. Так как экстремальные функции в них являются радиальными, то с помощью усреднения по евклидовой сфере они допускают редукцию к аналогичным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой, для решения которых можно использовать квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям функции Бесселя, построенные Фрапье и Оливером.

Нормированная функция Бесселя, как ядро преобразования Ганкеля, является решением задачи Штурма–Лиувилля со степенным весом. Другим важным примером служит преобразование Якоби, ядро которого является решением задачи Штурма–Лиувилля с гиперболическим весом. Авторам работы недавно удалось построить квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля при естественных условиях на весовую функцию, которые, в частности, выполняются для степенного и гиперболического весов.

При этих условиях на весовую функцию в работе решены экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Построены экстремальные функции. Для задач Турана, Фейера, Бомана и Логана доказана их единственность.

Ключевые слова: Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой, преобразование Фурье, экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана, квадратурные формулы Гаусса и Маркова.

Библиография: 44 названий.

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR THE FOURIER TRANSFORM OVER THE EIGENFUNCTIONS OF THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR

D. V. Gorbachev, V I. Ivanov (Tula)

Abstract

The Turán, Fejér, Delsarte, Bohman, and Logan extremal problems for positive definite functions in Euclidean space or for functions with nonnegative Fourier transform have many applications in the theory of functions, approximation theory, probability theory, and metric geometry. Since the extremal functions in them are radial, by means of averaging over the Euclidean sphere they admit a reduction to analogous problems for the Hankel transform on the half-line. For the solution of these problems we can use the Gauss and Markov quadrature formulae on the half-line at zeros of the Bessel function, constructed by Frappier and Olivier.

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ № 16-01-00308

The normalized Bessel function, as the kernel of the Hankel transform, is the solution of the Sturm–Liouville problem with power weight. Another important example is the Jacobi transform, the kernel of which is the solution of the Sturm–Liouville problem with hyperbolic weight. The authors of the paper recently constructed the Gauss and Markov quadrature formulae on the half-line at zeros of the eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem under natural conditions on the weight function, which, in particular, are satisfied for power and hyperbolic weights.

Under these conditions on the weight function, the Turán, Fejér, Delsarte, Bohman, and Logan extremal problems for the Fourier transform over eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem are solved. Extremal functions are constructed. For the Turán, Fejér, Bohman, and Logan problems their uniqueness is proved.

Keywords: Sturm-Liouville problem on the half-line, Fourier transform, Turán, Fejér, Delsarte, Bohman and Logan extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulae.

Bibliography: 44 titles.

1. Введение

Работа посвящена решению экстремальных задач Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана для преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля на полупрямой.

Эти задачи исследовались, прежде всего, на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ и других локально-компактных группах (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]). Задачи Турана, Фейера и Дельсарта также изучались и в периодическом случае (см. [17, 10, 18, 19, 20, 21, 22, 23]). Они имеют многообразные приложения в теории функций, теории приближений, теории чисел, метрической геометрии.

В этих задачах условия, в частности условие неотрицательности, накладываются на значения как функции, так и ее преобразования Фурье. Условие неотрицательности преобразования Фурье эквивалентно положительной определенности функции. Задачи Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана — это задачи для целых функций экспоненциального типа, являющихся преобразованиями Фурье неотрицательных функций с компактным носителем. Задача Турана ставится для непрерывных функций с компактным носителем и неотрицательным преобразованием Фурье. Если в ней от функции перейти к ее преобразованию Фурье, то мы получим задачу Фейера. Так, что задачи Турана и Фейера — эквивалентные.

Экстремальные функции в этих задачах являются радиальными и с помощью усреднения допустимых функций по евклидовой сфере они сводятся к аналогичным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой (см. [8, 9, 10, 24, 25]). Общие оценки в этих задачах получаются с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Бесселя. Экстремальные функции выписываются с помощью анализа условий равенства в неравенствах, получаемых при применении квадратурных формул.

Экстремальные задачи для преобразования Данкля на $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля также сводятся к аналогичным экстремальным задачам для преобразования Ганкеля на полупрямой (см. [26, 27]).

Многие хорошо известные преобразования на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ определяются ядрами, являющимися собственными функциями оператора (задачи) Штурма–Лиувилля:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\Big(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u_\lambda(t)\Big) + \big(\lambda^2 + \lambda_0^2\big)w(t)u_\lambda(t) = 0, \\ u_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\,(0) = 0, \quad \lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{gathered} \tag{1}$$

Для преобразования Ганкеля,

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \geqslant -1/2, \quad \lambda_0 = 0.$$

Квадратурные формулы Гаусса и Маркова для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Бесселя были доказаны в [28, 29]. Мы доказали подобные квадратурные формулы по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1) [30]. Это позволило решить экстремальные задачи для преобразования Якоби (см. [31, 32, 33, 34]), чье ядро является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля с весовой функцией

$$w(t) = (\sinh t)^{2\alpha+1}(\cosh t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2, \ \alpha > -1/2, \ \lambda_0 = \alpha + \beta + 1.$$

В настоящей работе мы решаем экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Бомана и Логана для преобразования Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на полупрямой при естественных ограничениях на весовую функцию.

2. Задача Штурма–Лиувилля на полупрямой

Необходимые факты об общей задаче Штурма–Лиувилля на полупрямой можно найти в [24, 35, 36, 37, 38].

Пусть $w(t)$ — непрерывная весовая функция на полупрямой $\mathbb{R}_+$, которая положительна и непрерывно дифференцируема при $t > 0$, параметр $\lambda_0 \geqslant 0$.

Предположим, что задача (1) при $\lambda \geqslant 0$ имеет решение $\varphi(t, \lambda)$, которое будем называть собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля. Также в дальнейшем будем предполагать, что для задачи Штурма–Лиувилля выполнены следующие свойства.

1. Собственная функция $\varphi(t, \lambda)$ — действительная функция, четная аналитическая в окрестности $\mathbb{R}$ по t и четная целая функция экспоненциального типа $|t|$ при $t \neq 0$ по λ,

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad |\varphi(t, \lambda)| \leqslant 1, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

2. Для $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(t, \lambda) = \varphi_0(t) \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)}\Big),$$

где $\varphi_0(t) = \varphi(t, 0) > 0$, $0 < \lambda_1(t) < \ldots < \lambda_k(t) < \ldots$ — положительные нули $\varphi(t, \lambda)$ по λ. Нули $\lambda_k(t)$ непрерывны и монотонно убывают при $t > 0$. При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ — положительные нули функции $\varphi(t, \lambda)$ по $t > 0$. Нули $t_k(\lambda)$ также непрерывны и монотонно убывают при $\lambda > 0$.

3. Спектральная мера $\sigma(\lambda)$ задачи (1) непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+$, $\sigma(0) = 0$ и

$$\sigma'(\lambda) = s(\lambda) \asymp \lambda^{2\alpha+1}, \quad \lambda \to +\infty, \ \alpha \geqslant -1/2. \tag{2}$$

Пусть $d\mu(t) = w(t)\, dt$, $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \Big(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p \, d\mu(t)\Big)^{1/p} < \infty,$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|g\|_{p,d\sigma} = \Big(\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda)|^p \, d\sigma(\lambda)\Big)^{1/p} < \infty,$$

$C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций. Нормы в $C_b(\mathbb{R}_+)$ и $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ обозначаем $\|\cdot\|_\infty$.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t), \quad \mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Для преобразований Фурье справедлива L^2-теория, то есть они осуществляют метрический изоморфизм между пространствами $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Равенства Планшереля имеют вид

$$\|\mathcal{F}f\|_{2,d\sigma} = \|f\|_{2,d\mu}, \quad \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{2,d\mu} = \|g\|_{2,d\sigma}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то $\mathcal{F}f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и применяя неравенство $|\varphi(t,\lambda)| \leqslant 1$, получим

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_{1,d\mu}. \tag{3}$$

Пусть для $p \geqslant 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — показатель Гельдера. Интерполируя неравенство (4) и равенство Планшереля, получим неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|\mathcal{F}f\|_{p',d\sigma} \leqslant \|f\|_{p,d\mu}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Тогда для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо поточечное равенство*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{4}$$

После изменения на множестве меры нуль будет $f \in C(\mathbb{R}_+)$.
Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C(\mathbb{R}_+)$, то равенство (4) будет справедливо всюду.

Доказательство. По условию $f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Применяя L^2-теорию для преобразования Фурье, получим равенство (4) почти всюду. Так как правая часть (4) непрерывная функция, то после изменения на множестве меры нуль будет $f \in C(\mathbb{R}_+)$. □

4. Для $t > 0$ равномерно на каждом компакте из $(0,\infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda^{\alpha+1/2}\varphi(t,\lambda) = C_t\big(\cos(t\lambda - c_t) + e^{t|\operatorname{Im}\lambda|}O(|\lambda|^{-1})\big), \quad |\lambda| \to \infty,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \tag{5}$$

где $C_t > 0$, α из (2).

Из (5) вытекает [39, гл. 1], что при тех же условиях

$$\lambda^{\alpha+1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda) = \lambda C_t\big(\cos(t\lambda - c_t + \pi/2) + e^{t|\operatorname{Im}\lambda|}O(|\lambda|^{-1})\big). \tag{6}$$

Условия **1**–**4** являются достаточными для построения квадратурной формулы Гаусса на полуоси по нулям $\lambda_k(t)$ [30].

Пусть B_1^τ — класс четных целых функций экспоненциального типа не выше $\tau > 0$, чьи сужения на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$.

Теорема 2. [30] *Для произвольной функции $g \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами:*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2)). \tag{7}$$

Ряд в (7) сходится абсолютно.

Явные выражения для весов в квадратурной формуле (7) выписаны в [30, § 3]. Приведем формулу для первого коэффициента:

$$\gamma_1 = \int_0^\infty \Big(\frac{2\lambda_1 \varphi(\tau/2, \lambda)}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\tau/2, \lambda_1)(\lambda^2 - \lambda_1^2)} \Big)^2 d\sigma(\lambda) = \frac{2\lambda_1}{\Delta(\tau/2)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1)\, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\tau/2, \lambda_1)}, \tag{8}$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$.

Для построения квадратурной формулы Маркова необходимы функции

$$u(t, \lambda) = \frac{\varphi(t, \lambda)}{\varphi_0(t)}.$$

Они являются решением задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta(t)\, \frac{\partial}{\partial t}\, u_\lambda(t) \Big) + \lambda^2 \Delta(t) u_\lambda(t) = 0, \tag{9}$$

$$u_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\,(0) = 0,$$

в которой весовая функция

$$\Delta(t) = \varphi_0^2(t) w(t).$$

Положительные нули $0 < \lambda_1'(t) < \ldots < \lambda_k'(t) < \ldots$ функции $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda)$ по λ перемежаются с нулями функции $\varphi(t, \lambda)$ [30]:

$$0 < \lambda_1(t) < \lambda_1'(t) < \lambda_2(t) < \cdots < \lambda_k(t) < \lambda_k'(t) < \lambda_{k+1}(t) < \ldots$$

Функции $\lambda_k'(t)$ непрерывны и монотонно убывают по t.

Теорема 3. [30] *Для произвольной функции $g \in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Маркова с положительными весами:*

$$\int_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k'(\tau/2) g(\lambda_k'(\tau/2)), \tag{10}$$

где $\lambda_0'(\tau/2) = 0$, $\gamma_0'(\tau/2) = \big(\int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt \big)^{-1}$. Ряд в (10) сходится абсолютно.

3. Дополнительное предположение и некоторые вспомогательные утверждения

Для построения экстремальных функций нам понадобится еще одно предположение о задаче Штурма–Лиувилля (1).

5. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{F} f(\lambda) \varphi(t, \lambda) \varphi(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda), \quad t, x \in \mathbb{R}_+,$$

действующего в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\, d\tau_{x,t}(z), \tag{11}$$

где для всех $x, t \in \mathbb{R}_+$ $\tau_{x,t}$ — борелевская вероятностная мера, для которой $\tau_{x,t} = \tau_{t,x}$ и носитель $\operatorname{supp} \tau_{x,t} \subset [|x - t|, x + t]$.

Свойства **1–5** выполняются для широкого класса весов w, частности, для степенного и гиперболического весов

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \geqslant -1/2,$$

$$w(t) = (\sinh t)^{2\alpha+1}(\cosh t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2, \quad \alpha > -1/2$$

(см. [30, 35, 36, 40, 41]).

Оператор обобщенного сдвига является положительным самосопряженным оператором и $T^t f(x) \in C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$, если $f \in C(\mathbb{R}_+)$ [42].

Представление (11) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига T^t на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, и пространство $C(\mathbb{R}_+)$ с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}_+$ (см. [38]).

Отметим также следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$T^0 f(x) = f(x), \quad T^t 1 = 1,$$
$$T^t \varphi(x,\lambda) = \varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad \mathcal{F}(T^t f)(\lambda) = \varphi(t,\lambda)\mathcal{F}f(\lambda),$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} T^t f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu, \quad f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu),$$

$$T^t f(x) = 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{supp} f \subset [0,l], \ |x-t| \geq l. \tag{12}$$

Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку двух функций

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g(t) \, d\mu(t).$$

В силу самосопряженности T^t свертка коммутативная

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

Свойства свертки описываются в следующей теореме, являющейся вариантом теоремы Юнга.

Теорема 3. (1) *Если* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+, d\mu)$, *то* $f * g \in L^r(\mathbb{R}_+, d\mu)$ *и*

$$\|f * g\|_{r,d\mu} \leq \|f\|_{p,d\mu} \|g\|_{q,d\mu}.$$

(2) *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, *то для почти всех* λ *при* $1 < p \leqslant 2$ *и всех* λ *при* $p = 1$

$$\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda)\, \mathcal{F}g(\lambda).$$

(3) *Если* $\operatorname{supp} f \subset [0,\delta]$, $\operatorname{supp} g \subset [0,\tau]$, *то* $\operatorname{supp} f * g \subset [0, \delta+\tau]$.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ и $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$, тогда $\frac{1}{s} \geqslant 0$, $\frac{1}{\nu} \geqslant 0$ и $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{\nu} = 1$. Так как $\|T^t f\|_{p,d\mu} \leqslant \|f\|_{p,d\mu}$, то, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^\infty T^t f(x) g(t) \, d\mu(t) \Big| &\leq \Big(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p |g(t)|^q \, d\mu(t) \Big)^{1/r} \\
&\times \Big(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p \, d\mu(t)(t) \Big)^{1/s} \Big(\int_0^\infty |g(t)|^q \, d\mu(t) \Big)^{1/\nu} \\
&\leq \Big(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p |g(t)|^q \, d\mu(t) \Big)^{1/r} \|f\|_{p,d\mu}^{p/s} \|g\|_{q,d\mu}^{q/\nu}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|f*g\|_{r,d\mu} \le \Big(\int_0^\infty\int_0^\infty |T^t f(x)|^p |g(t)|^q\, d\mu(t)\, d\mu(x)\Big)^{1/r} \times \|f\|_{p,d\mu}^{p/\mu}\|g\|_{q,d\mu}^{q/\nu} \le \|f\|_{p,d\mu_k}\|g\|_{q,d\mu}.$$

Утверждение (1) доказано.

Если $f \in C(\mathbb{R}_+)\cap L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_0^\infty T^t f(x) g(t)\, d\mu(t)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\, d\sigma(\lambda) g(t)\, d\mu(t)\\ &= \int_0^\infty \varphi(x,\lambda)\mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda)\, d\mu(\lambda).\end{aligned}$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то для некоторой последовательности $f_n \in C(\mathbb{R}_+)\cap L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, для которой $\mathcal{F}f_n \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, $\|f-f_n\|_{p,d\mu}\to 0\,(n\to\infty)$, в силу неравенства Хаусдорфа–Юнга и неравенства (1) для $1 \leqslant p \leqslant 2$ будет

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{F}(f*g)(\lambda) - \mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda)\|_{p',d\sigma}\\ &\leqslant \|\mathcal{F}((f-f_n)*g)(\lambda)\|_{p',d\sigma} + \|\mathcal{F}(f-f_n)(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda)\|_{p',d\sigma}\\ &\leqslant \|((f-f_n)*g)\|_{p,d\mu} + \|f-f_n\|_{p,d\mu}\,\|\mathcal{F}g\|_\infty\\ &\leqslant \|f-f_n\|_{p,d\mu}(\|g\|_{1,d\mu} + \|Fg\|_\infty) \to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

Переходя, если нужно к подпоследовательности, получим равенство (2) почти всюду при $1 < p \leqslant 2$. При $p = 1$ (2) верно для всех λ, так как обе части (2) непрерывные функции.

Утверждение (3) вытекает из свойства (12) оператора сдвига T^t. □

Нам понадобятся также следующие утверждения.

Лемма 1. [43] *Пусть $\alpha > -1/2$. Существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой*

$$\omega_\alpha(x) > 0, \quad x > 0,$$

$$\omega_\alpha(x) \asymp x^{2\alpha+1}, \quad x\to+\infty, \qquad |\omega_\alpha(iy)| \asymp y^{2\alpha+1}e^{2y}, \quad y\to+\infty.$$

Лемма 2. [44, прил. VII, лемма Ахиезера] *Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, F — четная целая функция экспоненциального типа $\tau > 0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω — четная целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F, и*

$$\liminf_{y\to+\infty} e^{-\tau y} y^{2m} |\Omega(iy)| > 0.$$

Тогда функция $\psi(z) = F(z)/\Omega(z)$ есть многочлен степени не больше $2m$.

4. Задачи Турана и Фейера

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(\tau, \mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{F}f(0) = \sup \int_0^\infty f(t)\varphi_0(t)\, dt,$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(0) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset [0,\tau], \quad \mathcal{F}f(y) \geqslant 0. \tag{13}$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) = \sup g(0),$$

если

$$g = \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \;\; g(\lambda) \geqslant 0, \;\; f \in C_b(\mathbb{R}_+), \;\; f(0) = 1, \;\; \operatorname{supp} f \subset [0,\tau]. \tag{14}$$

В силу (4), (13), (14) задачи Турана и Фейера эквивалентные, так как

$$f(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\, d\sigma(\lambda), \quad g(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\varphi(t,\lambda)\, d\mu(t).$$

Следовательно, достаточно решить одну из них, например, задачу Фейера.

Так как $\varphi(t,\lambda)$ — целая функция λ экспоненциального типа не выше $|t|$, то из представления $g(\lambda) = \int_0^\tau f(t)\varphi(t,\lambda)\, d\mu(t)$ и (14) вытекает, что $g \in B_1^\tau$. В дальнейшем $\chi_\tau(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau]$.

Теорема 4. *Если $\tau > 0$, то в задаче Фейера*

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) = \int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt, \tag{15}$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = a(\tau)\Big(\frac{\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda)}{\lambda^2}\Big)^2, \tag{16}$$

где $\Delta(t) = \varphi^2(t,0)w(t)$ и

$$a(\tau) = \frac{\Delta^2(\tau/2)}{\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\, dt}.$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху. Так как допустимая функция $g \in B_1^\tau$, то применяя квадратурную формулу Маркова (10), получим

$$1 = \int_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k'(\tau/2) g(\lambda_k'(\tau/2)) \geqslant \gamma_0'(\tau/2) g(0) = \frac{g(0)}{\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\, dt}. \tag{17}$$

Поэтому,

$$F(\tau, \mathbb{R}_+) \leqslant \int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt.$$

Построим экстремальную функцию. Положим

$$c_\tau = \int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt, \quad f_\tau(t) = c_\tau^{-1}(\varphi_0\chi_{\tau/2} * \varphi_0\chi_{\tau/2})(t), \quad g_\tau(\lambda) = \mathcal{F}f_\tau(\lambda).$$

Из положительности оператора обобщенного сдвига и теоремы 3

$$\begin{gathered} f_\tau(t) \geqslant 0, \quad f_\tau(0) = 1, \quad \operatorname{supp} f_\tau \subset [0,\tau], \\ g_\tau(\lambda) = c_\tau^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_0\chi_{\tau/2})(\lambda))^2 \geqslant 0, \quad g_\tau \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+). \end{gathered} \tag{18}$$

По теореме 1 функцию $f_\tau(t)$ можно считать непрерывной. Таким образом, функция $g_\tau(\lambda)$ является допустимой в задаче Фейера, поэтому

$$F(\tau,\mathbb{R}_+) \geqslant g_\tau(0) = c_\tau^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_0\chi_{\tau/2})(0))^2 = \int_0^{\tau/2}\Delta(t)\,dt.$$

Равенство (15) доказано.

Вычислим $g_\tau(\lambda)$. Из уравнения (9)

$$\Delta(t)u(t,\lambda) = -\lambda^{-2}(\Delta(t)(u(t,\lambda))'_t)'_t,$$

следовательно

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi_0\chi_{\tau/2})(\lambda) &= \int_0^{\tau/2}\varphi_0(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t) = \int_0^{\tau/2}\Delta(t)u(t,\lambda)\,dt\\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\,\Delta(t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,\lambda)\Big|_{t=0}^{\tau/2} = -\frac{1}{\lambda^2}\,\Delta(\tau/2)\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda).\end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим (16).

Докажем единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция в задаче Фейера, функция $\omega_{\alpha+1}(\lambda)$ из леммы 1. Так как функция $g_0(\lambda)$ обращает неравенство (17) в равенство, то она имеет двойные нули в точках $\lambda'_k(\tau/2)$, $k \geq 1$. Рассмотрим четные целые функции

$$F(\lambda) = \omega_{\alpha+1}(\lambda)g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_{\alpha+1}(\lambda)g_\tau(\lambda).$$

Корни $\Omega(\lambda)$ содержатся среди корней функции $F(\lambda)$. Применяя асимптотические формулы (5), (6), получим

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\Big(\frac{\varphi(t,\lambda)}{\varphi_0(t)}\Big)'_t\Big(\frac{\tau}{2}\Big)\\ &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda)\varphi_0(\tau/2) - \varphi(\tau/2,\lambda)\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}(\tau/2)}{\lambda^2\varphi_0^2(\tau/2)}\\ &= \frac{C_{\tau/2}}{\lambda^2\varphi_0(\tau/2)}\Big\{\cos\big(\lambda\tau/2 - c_{\tau/2} + \pi/2\big) + e^{\tau|\operatorname{Im}\lambda|/2}O\big(|\lambda|^{-1}\big)\Big\},\end{aligned}$$

поэтому

$$|\psi(iy)| \asymp y^{-\alpha-3/2}e^{\tau y/2}, \quad y \to +\infty.$$

Применяя (16) и лемму 1, получим

$$|\Omega(iy)| \asymp e^{(\tau+2)y}, \quad y \to +\infty.$$

Отсюда и из леммы 2 $g_0(\lambda) = g_\tau(\lambda)$. □

Теорема 5. *Если $\tau > 0$, то в задаче Турана*

$$T(\tau,\mathbb{R}_+) = \int_0^{\tau/2}\Delta(t)\,dt,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$f_\tau(t) = \mathcal{F}^{-1}g_\tau(t) = \frac{(\varphi_0\chi_{\tau/2} * \varphi_0\chi_{\tau/2})(t)}{\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\,dt}.$$

5. Задача Дельсарта

Задача Дельарта. Вычислить величину

$$D(\tau, s, \mathbb{R}_+) = \sup \mathcal{F}^{-1} g(0) = \sup \int_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

если

$$g = \mathcal{F} f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad g(0) = 1, \quad g(\lambda) \leqslant 0, \ \ \lambda \geqslant s,$$
$$f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad \operatorname{supp} f \subset [0, \tau] \quad f(x) \geqslant 0.$$

Задача Дельсарта решена только при дополнительном соотношении между параметрами τ и $s = \lambda_1'(\tau/2)$.

Теорема 6. *Пусть $\lambda_1' = \lambda_1'(\tau/2)$, $\tau > 0$. Тогда в задаче Дельсарта*

$$D(\tau, \lambda_1', \mathbb{R}_+) = \Big(\int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt \Big)^{-1}, \tag{20}$$

экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{b(\tau) \big(\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda) \big)^2}{\lambda^4 \big(1 - (\lambda/\lambda_1')^2 \big)}, \tag{21}$$

где

$$b(\tau) = \Big(\frac{1}{\Delta(\tau/2)} \int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt \Big)^{-2}.$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху. Так как допустимая функция $g \in B_1^\tau$, то применяя квадратурную формулу Маркова (10), условие $g(\lambda) \leqslant 0$ при $\lambda \geqslant \lambda_1'$, получим

$$\mathcal{F}^{-1} g(0) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k'(\tau/2) g(\lambda_k'(\tau/2))$$
$$\leqslant \gamma_0'(\tau/2) g(0) = \frac{1}{\int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt}.$$

Отсюда

$$D(\tau, \lambda_1', \mathbb{R}_+) \leqslant \Big(\int_0^{\tau/2} \Delta(t)\, dt \Big)^{-1}.$$

Построим экстремальную функцию. Пусть

$$f_1(t) = \varphi_0(t) \chi_{\tau/2}(t), \quad f_2(t) = \Big(\varphi(t, \lambda_1') - u(\tau/2, \lambda_1') \varphi_0(t) \Big) \chi_{\tau/2}(t),$$

$$f(t) = (f_1 * f_2)(t), \quad g(\lambda) = \mathcal{F} f(\lambda).$$

Покажем, что для $0 \leqslant t \leqslant \tau/2$

$$v(t) = \varphi(t, \lambda_1') - u(\tau/2, \lambda_1') \varphi_0(t) = \varphi_0(t) (u(t, \lambda_1') - u(\tau/2, \lambda_1')) \geqslant 0.$$

Достаточно показать, что функция $u(t, \lambda_1')$ не возрастает на отрезке $[0, \tau/2]$. Так как $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \lambda_1'(\tau/2)) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2, \lambda_1'(\tau/2)) = 0$ и $\lambda_1'(t)$ убывает по t, то производная $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \lambda_1'(\tau/2))$ сохраняет знак. Имеем $u(0, \lambda_1') = 1$ и $u(\tau/2, \lambda_1') < 0$ в силу неравенств $\lambda_1(\tau/2) < \lambda_1'(\tau/2) < \lambda_2(\tau/2)$ (11). Следовательно, производная неположительна.

В силу положительности оператора обобщенного сдвига, теоремы 3

$$\begin{aligned} &f_1(t) \geqslant 0, \quad f_2(t) \geqslant 0, \quad f(t) \geqslant 0, \quad \operatorname{supp} f \subset [0,\tau], \\ &g(\lambda) = \mathcal{F}f_1(\lambda)\mathcal{F}f_2(\lambda), \quad g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \tag{22}$$

По теореме 1 функцию $f(t)$ можно считать непрерывной.

Функция $\mathcal{F}f_1(\lambda)$ вычислена при доказательстве теоремы 4:

$$\mathcal{F}f_1(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\,\Delta(\tau/2)\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda), \tag{23}$$

причем

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{u'_\lambda(\tau/2)}{\lambda^2} = -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\Delta(\tau/2)}\int_0^{\tau/2}\Delta(t)u(t,\lambda)\,dt = -\frac{1}{\Delta(\tau/2)}\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\,dt. \tag{24}$$

Согласно (9)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\Delta(t)\Big(u(t,\lambda'_1)\frac{\partial u}{\partial t}(t,\lambda) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,\lambda'_1)u(t,\lambda)\Big)\Big\} = \big((\lambda'_1)^2 - \lambda^2\big)\Delta(t)u(t,\lambda'_1)u(t,\lambda),$$

поэтому используя (23), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f_2(\lambda) &= \int_0^{\tau/2}\Delta(t)u(t,\lambda'_1)u(t,\lambda)\,dt - u(\tau/2,\lambda'_1)\mathcal{F}f_1(\lambda) \\ &= \frac{\Delta(\tau/2)u(\tau/2,\lambda'_1)\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda)}{(\lambda'_1)^2-\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\Delta(\tau/2)u(\tau/2,\lambda'_1)\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda) \\ &= \frac{(\lambda'_1)^2\Delta(\tau/2)u(\tau/2,\lambda'_1)\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda)}{\lambda^2\big((\lambda'_1)^2-\lambda^2\big)}. \end{aligned}$$

Отсюда и еще раз из (23)

$$g(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) = -\frac{(\lambda'_1)^2\Delta^2(\tau/2)u(\tau/2,\lambda'_1)\big(\frac{\partial u}{\partial t}(\tau/2,\lambda)\big)^2}{\lambda^4\big((\lambda'_1)^2-\lambda^2\big)}.$$

Положим $g_\tau(\lambda) = g(\lambda)/g(0)$. В силу (24)

$$g_\tau(\lambda) = \frac{b(\tau)\big(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(\tau/2)\big)^2}{\lambda^4\big(1-(\lambda/\lambda'_1)^2\big)},$$

где

$$b(\tau) = \Big(\frac{1}{\Delta(\tau/2)}\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\,dt\Big)^{-2}.$$

Так как $g_\tau(0) = 1$, то согласно (22) функция $g_\tau(\lambda)$ является допустимой в задаче Дельсарта. Применяя квадратурную формулу Маркова (10), получим

$$D(\tau,\lambda'_1,\mathbb{R}_+) \geqslant \int_0^\infty g_\tau(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \Big(\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\,dt\Big)^{-1}.$$

Равенство (20) доказано. Функция (21) является экстремальной в задаче Дельсарта. □

Замечание. В случае степенного и гиперболического весов экстремальная функция в задаче Дельсарта единственна [24, 31]. В общем случае для доказательства единственности экстремальной функции необходима дополнительная информация о мере в интегральном представлении оператора обобщенного сдвига.

6. Задача Бомана

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(\tau,\mathbb{R}_+)=\inf\int_0^\infty\bigl(\lambda^2+\lambda_0^2\bigr)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

если функция $g(\lambda)$ удовлетворяет условиям (13) и $\lambda_0\geqslant 0$ из (1).

Пусть

$$D_w u(t)=-\frac{1}{w(t)}\,\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(t)\Bigr)$$

— дифференциальный оператор, связанный с задачей Штурма–Лиувилля (1). Согласно (1)

$$D_w\varphi(t,\lambda)=(\lambda^2+\rho^2)\varphi(t,\lambda),$$

поэтому функционал в задаче Бомана может быть записан так

$$\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=D_w\mathcal{F}^{-1}g(0).$$

Теорема 7. *Пусть $\lambda_1=\lambda_1(\tau/2)$, $\gamma_1=\gamma_1(\tau/2)$, $\tau>0$. Тогда в задаче Бомана*

$$B(\tau,\mathbb{R}_+)=\lambda_1^2+\lambda_0^2, \tag{25}$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda)=\frac{1}{c(\tau)}\Bigl(\frac{\varphi(\tau/2,\lambda)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Bigr)^2, \tag{26}$$

где

$$c(\tau)=\gamma_1\lim_{\lambda\to\lambda_1}\Bigl(\frac{\varphi(\tau/2,\lambda)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Bigr)^2=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(\tau/2,\lambda_1)}{2\lambda_1 w(\tau/2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)}. \tag{27}$$

Доказательство. Сначала получим оценку снизу. Как уже отмечалось, допустимая функция $g\in B_1^\tau$. Мы можем предполагать, что $\lambda^2 g\in B_1^\tau$, иначе $B(\tau,\mathbb{R}_+)=\infty$. Применяя квадратурную формулу Гаусса (7) дважды, получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty(\lambda^2+\lambda_0^2)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)&=\sum_{k=1}^\infty\gamma_k(\tau/2)\bigl(\lambda_k^2(\tau/2)+\lambda_0^2\bigr)g(\lambda_k(\tau/2))\\&\geqslant\bigl(\lambda_1^2+\lambda_0^2\bigr)\sum_{k=1}^\infty\gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2))\\&=\bigl(\lambda_1^2+\lambda_0^2\bigr)\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)\\&=\bigl(\lambda_1^2+\lambda_0^2\bigr)\mathcal{F}^{-1}g(0)=\lambda_1^2+\lambda_0^2,\end{aligned} \tag{28}$$

поэтому $B(\tau,\mathbb{R}_+)\geqslant\lambda_1^2+\lambda_0^2$.

Построим экстремальную функцию. Пусть

$$f_1(t)=\varphi(t,\lambda_1)\chi_{\tau/2}(t),\quad f(t)=(f_1*f_1)(t).$$

Имеем

$$f_1(t)\geqslant 0,\quad \operatorname{supp}f_1\subset[0,\tau/2],\quad f_1\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad \mathcal{F}f_1\in L^2(\mathbb{R}_+,d\sigma).$$

В силу положительности оператора обобщенного сдвига и теоремы 3

$$\begin{gathered} f(t) \geqslant 0, \quad \operatorname{supp} f \subset [0,\tau], \quad f \in C_b(\mathbb{R}_+), \\ g(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) = \big(\mathcal{F}f_1(\lambda)\big)^2 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad g(\lambda) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Согласно (1)

$$\Big\{w(t)\Big(\varphi(t,\lambda_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\lambda_1)\varphi(t,\lambda)\Big)\Big\}'_t = \big(\lambda_1^2 - \lambda^2\big)w(t)\varphi(t,\lambda_1)\varphi(t,\lambda),$$

поэтому

$$\mathcal{F}f_1(\lambda) = \int_0^{\tau/2} w(t)\varphi(t,\lambda_1)\varphi(t,\lambda)\,dt = -\frac{w(\tau/2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\varphi(\tau/2,\lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}.$$

Следовательно,

$$g(\lambda) = \frac{w^2(\tau/2)\big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\big)^2\varphi^2(\tau/2,\lambda)}{\big(\lambda_1^2 - \lambda^2\big)^2}.$$

Из асимптотики (5) $g \in B_1^\tau$. Применяя (7), получим

$$\begin{aligned} f(0) = \mathcal{F}^{-1}g(0) &= \int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2)) \\ &= \gamma_1 w^2(\tau/2)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau/2,\lambda_1)\Big)^2 \lim_{\lambda\to\lambda_1}\Big(\frac{\varphi(\tau/2,\lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\Big)^2. \end{aligned}$$

Согласно (29) функция (26)

$$g_\tau(\lambda) = \frac{1}{c(\tau)}\Big(\frac{\varphi(\tau/2,\lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\Big)^2, \quad c(\tau) = \gamma_1 \lim_{\lambda\to\lambda_1}\Big(\frac{\varphi(\tau/2,\lambda)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\Big)^2,$$

является допустимой в задаче Бомана и по квадратурной формуле Гаусса (7)

$$\begin{aligned} B(\tau,\mathbb{R}_+) &\leqslant \int_0^\infty (\lambda^2 + \lambda_0^2)g_\tau(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)\big(\lambda_k^2(\tau/2) + \lambda_0^2\big)g_\tau(\lambda_k(\tau/2)) \\ &= \gamma_1\big(\lambda_1^2 + \lambda_0^2\big)g_\tau(\lambda_1) = \lambda_1^2 + \lambda_0^2. \end{aligned}$$

Равенство (25) доказано. Функция (26) является экстремальной. Равенство (27) вытекает из (8).

Докажем единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция в задаче Фейера, функция $\omega_\alpha(\lambda)$ из леммы 1.

Так как $g_0(\lambda)$ обращает неравенство (28) в равенство, то в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geqslant 2$, она имеет двойные нули. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda)g_\tau(\lambda).$$

В силу (26), асимптотики (5) и леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-4}e^{(\tau+2)y}, \quad y \to +\infty.$$

По лемме 2 $g_0(\lambda) = \psi(\lambda)g_\tau(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — четный многочлен степени не выше 4. Его степень не может равняться 2 или 4, иначе по асимптотикам (2), (5) будем иметь $\lambda^2 g_0 \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $\psi(\lambda) = \mathrm{const} = 1$ и $g_0(\lambda) = g_\tau(\lambda)$. $\square$

7. Задача Логана

Пусть $g_0(\lambda)$ — действительная непрерывная на полупрямой функция,

$$\Lambda(g) = \sup\{\lambda > 0 \colon g(\lambda) > 0\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \inf \Lambda(g),$$

если

$$\begin{gathered} g = \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma), \quad g(\lambda) \not\equiv 0, \\ f \in C_b(\mathbb{R}_+), \quad f(t) \geqslant 0, \quad \operatorname{supp} f \subset [0, \tau]. \end{gathered} \tag{30}$$

Теорема 8. Пусть $\lambda_1 = \lambda_1(\tau/2)$, $\gamma_1 = \gamma_1(\tau/2)$, $\tau > 0$. Тогда в задаче Логана

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_1,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda) = \frac{\varphi^2(\tau/2, \lambda)}{1 - (\lambda/\lambda_1)^2}. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть функция $\omega_\alpha(\lambda)$ из леммы 1. Предположим. что

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) = \lambda_0 < \lambda_1.$$

Тогда для некоторой допустимой функции $g(\lambda)$ будет $g(\lambda) \leqslant 0$ для $\lambda \geqslant \lambda_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Так как $g \in B_1^\tau$, то применяя квадратурную формулу Гаусса (7), получим

$$0 \leq \int_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2) g(\lambda_k(\tau/2)) \leqslant 0, \tag{32}$$

поэтому в точках $\lambda_k(\tau/2)\,(k \geqslant 1)$ функция $g(\lambda)$ имеет двойные нули. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) g(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(z) \varphi^2(\tau/2, \lambda).$$

Из асимптотики (5), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp e^{(r+2)y}, \quad y \to +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим $g(\lambda) = c\varphi^2(r/2, \lambda)$, $c > 0$, что противоречит условию

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma).$$

Таким образом,

$$L(\tau, \mathbb{R}_+) \geqslant \lambda_1.$$

Функция $g_\tau(\lambda)$ (31) — экстремальная, так как $\Lambda(g_\tau) = \lambda_1$ и $f(t) = \mathcal{F}^{-1} g_\tau(t) \in C_b(\mathbb{R}_+)$, $f(t) \geq 0$, $\operatorname{supp} f \subset [0, \tau]$ (см. [24, 38]).

Докажем единственность экстремальной функции. Пусть $g_0(\lambda)$ — экстремальная функция. Так как $g_0(\lambda) \leqslant 0$ для $\lambda \geqslant \lambda_1$, то она обращает неравенство (32) в равенство. Следовательно в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geqslant 2$, она имеет двойные нули, а в точке λ_1 она имеет, по крайней мере, нуль первого порядка. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) g_0(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega_\alpha(\lambda) g_\tau(\lambda).$$

Из асимптотики (5), леммы 1

$$|\Omega(iy)| \asymp y^{-2} e^{(\tau+2)y}, \quad y \to +\infty.$$

Применяя лемму 2, получим $g_0(\lambda) = \psi(\lambda) g_\tau(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — четный многочлен степени не выше 2. Он не может иметь степень 2, иначе по асимптотике (5) $g_0 \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $g_0(\lambda) = c g_\tau(\lambda)$, $c > 0$. $\square$

8. Заключение

В работе получены достаточно общие результаты. Тем не менее было бы интересно их усилить в трех направлениях.

В задачах Фейера, Дельсарта, Бомана, Логана при определении допустимых функций мы требуем, чтобы они были интегрируемыми преобразованиями Фурье непрерывных функций с носителем на отрезке $[0,\tau]$. Это требование влечет их принадлежность классу целых функций B_1^τ. Интересно было бы в наших предположениях о задаче Штурма–Лиувилля доказать обратное утверждение, известное как теорема Пэли–Винера. Для степенного и гиперболического весов теорема Пэли–Винера известна.

Интересно результаты работы распространить на случай веса $v(x) = w(|x|)$ на всей прямой. Для этого необходимо собственную функцию $\varphi(t,\lambda)$ с $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ продолжить на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и основываясь на этом продолжении, построить гармонический анализ в пространствах с этим весом. Такие продолжения для степенного и гиперболического весов известны.

Интересно также результаты работы распространить на случаи многомерных весов

$$w(x) = \prod_{j=1}^{d} w_j(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$$

и

$$v(x) = \prod_{j=1}^{d} w_j(|x_j|), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В. В., Бердышева Е. Е. Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.

2. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.

3. Бердышева Е. Е. Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 336–350.

4. Boas R. P., Kac M. Inequalities for Fourier Transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.

5. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.

6. Cohn H. New upper bounds on sphere packings II // Geom. Topol. 2002. Vol. 6. P. 329–353.

7. Ehm W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.

8. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 179–187.

9. Горбачев Д. В. Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа, связанная с оценкой Левенштейна плотности упаковки $\mathbb{R}^n$ шарами // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6, № 1. С. 71–78.

10. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 346–352.

11. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.

12. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem for positive definite functions on groups // J. London Math. Soc. 2006. Vol. 74. P. 475–496.

13. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 249–252.

14. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, № 2. P. 253–257.

15. Révész Sz. Gy. Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.

16. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

17. Fejér L. Über trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.

18. Горбачев Д. В., Маношина А. С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 688–700.

19. Иванов В. И., Рудомазина Ю. Д. О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 941–945.

20. Иванов В. И., Горбачев Д. В., Рудомазина Ю. Д. Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 92–111.

21. Иванов В. И. О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 6. С. 934–939.

22. Ivanov V. I., Ivanov A. V. Turán problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. Vol. 33. P. 219–237.

23. Stechkin S. B. An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3-4. P. 289–291.

24. Горбачев Д. В. Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.

25. Горбачев Д. В. Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье–Ганкеля // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.

26. Иванов А. А. Некоторые экстремальные задачи для целых функций в весовых пространствах // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 26–44.

27. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 115–123.

28. Frappier C., Olivier P. A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60. P. 303–316.

29. Grozev G. R., Rahman Q. I. A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64. P. 715–725.

30. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.

31. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform // Math. Notes. 2016. Vol. 100, № 5. P. 677–686.

32. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 126–135.

33. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán's and Fejér's extremal problems for Jacobi transform // Anal. Math. 2017. [In press]

34. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid // Math. Notes. 2017. [In press]

35. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.

36. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.

37. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 519–530.

38. Горбачев Д. В., Иванов В. И., Вепринцев Р. А. Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 136–152.

39. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.

40. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11. P. 245–262.

41. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure // Ark. Mat. 1979. Vol. 17. P. 139–151.

42. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973. 312 с.

43. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 6. P. 338–348.

44. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

REFERENCES

1. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2001, "Turán's problem for positive definite functions with supports in a hexagon", *Proc. Steklov Inst. Math.*, no 1 suppl, pp. 20–29.
2. Arestov V. V., Berdysheva E. E., 2002, "The Turán problem for a class of polytopes", *East J. Approx.*, vol. 8, no 3, pp. 381–388.
3. Berdysheva E. E., 1999, "Two related extremal problems for entire functions of several variables", *Math. Notes*, vol. 66, no 3, pp. 271–282.
4. Boas R. P., Kac M., 1945, "Inequalities for Fourier Transforms of positive functions", *Duke Math. J.*, vol. 12, pp. 189–206.
5. Bohman H., 1960, "Approximate Fourier analysis of distribution functions", *Ark. Mat.*, vol. 4, pp. 99–157.
6. Cohn H., 2002, "New upper bounds on sphere packings II", *Geom. Topol.*, vol. 6, pp. 329–353.
7. Ehm W., Gneiting T., Richards D., 2004, "Convolution roots of radial positive definite functions with compact support", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 356, pp. 4655–4685.
8. Gorbachev D. V., 2000, "Extremum problems for entire functions of exponential spherical type", *Math. Notes*, vol. 68, no 2, pp. 159–166.
9. Gorbachev D. V., 2000, "An extremal problem for an entire functions of exponential spherical type related to the Levenshtein estimate for the sphere packing density in $\mathbb{R}^n$", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 6, no 1, pp. 71–78. [in Russian]
10. Gorbachev D. V., 2001, "An extremal problem for periodic functions with supports in the ball", *Math. Notes*, vol. 69, no 3, pp. 313–319.
11. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy., 2003, "On a problem of Turán about positive definite functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 3423–3430.
12. Kolountzakis M. M., Révész Sz. Gy., 2006, "Turán's extremal problem for positive definite functions on groups", *J. London Math. Soc.*, vol. 74, pp. 475–496.
13. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no 2, pp. 249–252.
14. Logan B. F., 1983, "Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions", *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 14, no 2, pp. 253–257.
15. Révész Sz. Gy., 2011, "Turán's extremal problem on locally compact abelian groups", *Anal. Math.*, vol. 37, no 1, pp. 15–50.
16. Siegel C. L., 1935, "Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem", *Acta Math.*, vol. 65, pp. 307–323.
17. Fejér L., 1915, "Über trigonometrische Polynome", *J. Angew. Math.*, vol. 146, pp. 53–82.
18. Gorbachev D. V., Manoshina A. S., 2004, "Turán Extremal Problem for Periodic Functions with Small Support and Its Applications", *Math. Notes*, vol. 76, no 5, pp. 640–652.
19. Ivanov V. I., Rudomazina Yu. D., 2005, "About Turán problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support", *Math. Notes*, vol. 77, no 6, pp. 870–875.

20. Ivanov V. I., Gorbachev D. V., Rudomazina Yu. D., 2005, "Some extremal problems for periodic functions with conditions on their values and Fourier coefficients" *Proc. Steklov Inst. Math.*, no 2 suppl, pp. 139–159.

21. Ivanov V. I., 2006, "On the Turán and Delsarte problems for periodic positive definite functions", *Math. Notes*, vol. 80, no 6, pp 875–880.

22. Ivanov V. I., Ivanov A. V., 2010, "Turán problems for periodic positive definite functions", *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, vol. 33, pp. 219–237.

23. Stechkin S. B., 1972, "An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, vol. 23, no 3-4, pp. 289–291.

24. Gorbachev D. V., 2005, "Selected Problems in the Theory of Functions and Approximation Theory: Their Applications", *Tula: Grif and K*, 192 p. [in Russian]

25. Gorbachev D. V., 2014, "Boman extremal problem for Fourier–Hankel transform", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 4, pp. 5–10. [in Russian]

26. Ivanov A. V., 2010, "Some extremal problem for entire functions in weighted spaces", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 26–44. [in Russian]

27. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2015, "Boman extremal problem for Dunkl transform", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no 4, pp. 115–123. [in Russian]

28. Frappier C., Olivier P., 1993, "A quadrature formula involving zeros of Bessel functions", *Math. Comp.*, vol. 60, pp. 303–316.

29. Grozev G. R., Rahman Q. I., 1995, "A quadrature formula with zeros of Bessel functions as nodes", *Math. Comp.*, vol. 64, pp. 715–725.

30. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2015, "Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type", *Sbornik: Math.*, vol. 206, no 8, pp. 1087–1122.

31. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I., 2016, "The Delsarte Extremal Problem for the Jacobi Transform", *Math. Notes*, vol. 100, no 5, pp. 677–686.

32. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, "Boman extremal problem for Jacobi transform", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no 4, pp. 126–135.

33. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2017, "Turán's and Fejér's extremal problems for Jacobi transform", *Anal. Math.* [In press]

34. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I., 2017, "Some extremal problems for Fourier transform on hyperboloid", *Math. Notes.* [In press]

35. Levitan B. M., Sargsyan I. S., 1970, "Introduction to spectral theory", *Moscow: Nauka*, 671 p. [in Russian]

36. Levitan B. M., Sargsyan I. S., 1988, "Sturm–Liouville and Dirac Operators", *Moscow: Nauka*, 432 p. [in Russian]

37. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Math. Notes*, vol. 100, no 4, pp. 540–549.

38. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A., 2016, "Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform over the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no 4, pp. 136–152. [in Russian]

39. Olver F. W. J., 1974, "Introduction to asymptotics and special functions", *New York: Academic Press*, 297 p.

40. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1973, "The convolution structure for Jacobi function expansions", *Ark. Mat.*, vol. 11, pp. 245–262.

41. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H., 1979, "Jacobi functions: The addition formula and the positivity of dual convolution structure", *Ark. Mat.*, vol. 17, pp. 139–151.

42. Levitan B. M., 1973, "Theory of generalized translation operators", *Moscow: Nauka*, 312 p. [in Russian]

43. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. 2014, "Optimal Argument in Sharp Jackson's inequality in the Space L_2 with the Hyperbolic Weight", *Math. Notes*, vol. 96, no 6, pp. 338–348.

44. Levin B. Ya, 1956, "Distribution of Roots of Entire Functions", *Moscow: Gostekhizdat*, 632 p. [in Russian]

Тульский государственный университет.
Получено 12.03.2017 г.
Принято в печать 12.06.2017 г.