ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 2

УДК 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-18-33

СКРЫТЫЕ АТТРАКТОРЫ НЕКОТОРЫХ МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Буркин И. М. (г. Тула)

Аннотация

Хорошо известно, что математически простые нелинейные системы дифференциальных уравнений могут демонстрировать хаотическое поведение. Обнаружение аттракторов хаотических систем – важная проблема нелинейной динамики. Результаты недавних исследований позволили ввести следующую классификацию периодических и хаотических аттракторов в зависимости от наличия окрестностей состояний равновесия в их области притяжения – самовозбуждающиеся и скрытые аттракторы. Присутствие скрытых аттракторов в динамических системах привлекло пристальное внимание, как к теоретическим, так и к прикладным исследованиям этого феномена. Выявление скрытых аттракторов в реальных инженерных системах чрезвычайно важно, поскольку оно позволяет предсказать неожиданные и потенциально опасные ответы системы на возмущения ее структуры. В последние три года, после обнаружения S. Jafari и J. C. Sprott хаотических систем с линией и плоскостью состояний равновесия, имеющих скрытые аттракторы, возрос интерес к системам, обладающим несчетным или бесконечным числом состояний равновесия. В настоящей работе предложены новые модели систем управления с бесконечным числом состояний равновесия, обладающие скрытыми аттракторами: кусочно-линейная система с локально устойчивым отрезком покоя и система с периодической нелинейностью и бесконечным числом состояний равновесия. Для поиска скрытых аттракторов исследуемых систем применен предложенный автором оригинальный аналитико-численный метод.

Ключевые слова: Кусочно-линейная система, отрезок покоя, бесконечное число состояний равновесия, цикл, скрытый аттрактор, аналитико-численный метод.

Библиография: 31 название.

HIDDEN ATTRACTORS OF SOME MULTISTABLE SYSTEMS WITH INFINITE NUMBER OF EQUILIBRIA

Burkin I. M. (Tula)

Abstract

It is well known that mathematically simple systems of nonlinear differential equations can exhibit chaotic behavior. Detection of attractors of chaotic systems is an important problem of nonlinear dynamics. Results of recent researches have made it possible to introduce the following classification of periodic and chaotic attractors depending on the presence of neighborhood of equilibrium into their basin of attraction – self-excited and hidden attractors. The presence of hidden attractors in dynamical systems has received considerable attention to both theoretical and applied research of this phenomenon. Revealing of hidden attractors in real engineering systems is extremely important, because it allows predicting the unexpected and potentially dangerous system response to perturbations in its structure. In the past three years after discovering by S. Jafari and J. C. Sprott chaotic system with a line and a plane of equilibrium with hidden attractors there has been much attention to systems with uncountable or infinite

equilibria. In this paper it is offered new models of control systems with an infinite number of equilibrium possessing hidden chaotic attractors: a piecewise-linear system with a locally stable segment of equilibrium and a system with periodic nonlinearity and infinite number of equilibrium points. The original analytical-numerical method developed by the author is applied to search hidden attractors in investigated systems.

Keywords: Piecewise-linear system, segment of equilibria, infinite number of equilibria, cycle, hidden attractor, analytical-numerical method.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Теория нелинейных колебаний динамических систем, созданная в тридцатых годах XX века, первоначально была настолько прозрачна и понятна, что поколения исследователей могли успешно применять ее для решения задач из различных областей науки. В семидесятых годах ситуация кардинально изменилась. Стало понятно, что кроме орбитально устойчивых циклов и торов, имеющих единую природу, динамические системы могут обладать хаотическими аттракторами, имеющими сложную топологическую структуру. В последующие десятилетия усилия многих математиков были сосредоточены на исследовании структуры таких аттракторов, их размерности, условий их возникновения в результате каскада бифуркаций. При этом считался само собой разумеющимся тот факт, что аттрактор динамической системы может существовать только при наличии у нее неустойчивых состояний равновесия. Согласно критерию Шильникова [1], наличие хаотического аттрактора требует присутствия в рассматриваемой системе, по крайней мере, одного неустойчивого состояния равновесия, и аттрактор может рождаться только в результате некоторых бифуркаций такого состояния равновесия. В самом деле, аттракторы классических систем Лоренца [2], Рёсслера [3], Чуа [4], также как аттракторы моделей классических систем автоматического управления, содержат в своей области притяжения сколь угодно малые окрестности неустойчивых состояний равновесия. Именно это обстоятельство позволило в свое время обнаружить аттракторы упомянутых систем путем их численного интегрирования. Позднее такие аттракторы были названы *самовозбуждающимися* в том смысле, что вычислительная процедура, "стартующая" из любой точки неустойчивого многообразия в окрестности состояния равновесия, "выходит" на аттрактор и рассчитывает его.

В отличие от самовозбуждающихся, *скрытые* аттракторы не содержат в своей области притяжения окрестностей состояния равновесия. Хорошо известными примерами существования скрытых аттракторов у многомерных моделей систем автоматического управления являются контрпримеры к предположениям Айзермана и Калмана [5, 6], где единственное устойчивое в малом состояние равновесия сосуществует с орбитально устойчивым циклом [7, 8]. Эффективно проверяемые условия существования скрытых орбитально устойчивых циклов у некоторого класса многомерных систем получены в работах [10, 11]. В то же время для поиска и обнаружения скрытых аттракторов требуется разработка специальных вычислительных процедур.

С прикладной точки зрения наличие информации о существовании скрытого аттрактора и знание его области притяжения позволяет, в зависимости от решаемой задачи, либо избежать попадания начальных условий системы в эту область, что может привести к катастрофическим последствиям[14], либо "удерживать" систему на скрытом аттракторе. Последнее необходимо, например, в системах шифрования аудио и видеосигналов в устройствах скрытой коммуникации. [15, 16]

В 2010 году Г.А.Леоновым [9] был предложен новый метод поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах $\dot{x} = f(x), x \in R^n$, использующий идею гомотопии.

Рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$\dot{x} = \psi(x, \varepsilon), \varepsilon \in [0, 1] \tag{1}$$

такое, что $\psi(x, 1) = f(x)$, и при малых $\varepsilon > 0$система (1) имеет легко обнаруживаемый самовозбуждающийся орбитально асимптотически устойчивый цикл. Численно отслеживается эволюция этого цикла при возрастании ε до 1. Возможна следующая альтернатива: либо при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ происходит бифуркация исчезновения аттрактора, либо при $\varepsilon = 1$ обнаруживается скрытый аттрактор исследуемой динамической системы. Ясно, что ключевым моментом в приведенном алгоритме является построение функции $\psi(x, \varepsilon)$, обладающей перечисленными выше свойствами. В работе [9] был использован подход, основанный на использовании метода гармонической линеаризации, метода малого параметра и метода описывающих функций в сочетании с прикладной теорией бифуркаций. Дальнейшее развитие этого подхода [14, 17, 18] позволило впервые обнаружить хаотический скрытый аттрактор в контуре Чуа, в системе управления ракетой-носителем, построить контрпример к известной в теории управления гипотезе Калмана. Упомянутые работы вызвали волну интереса к исследованию многомерных динамических систем, которые либо не имеют состояний равновесия, либо имеют устойчивые в малом состояния равновесия и одновременно обладают орбитально устойчивыми циклами, или странными аттракторами [19–24]. Однако в работах [19–24], также как и во многих последующих исследования, для обнаружения скрытых аттракторов применяется "систематический компьютерный поиск то есть, по сути дела, систематическое "сканирование" фазового пространства исследуемой системы.

Принципиально иной подход к построению семейства систем (1), который во многих случаях оказывается существенно "менее затратным" на этапе подготовки к реализации численного алгоритма поиска скрытого аттрактора и не требует прибегать к систематическому сканированию фазового пространства, был предложен в работах [12, 13]. Достоинством этого метода является к тому же предоставляемая им возможность исследовать системы, обладающие одновременно несколькими скрытыми аттракторами.

В последние годы была опубликована серия работ, в которых изучались системы с бесконечным числом состояний равновесия [25–29]. Авторы работы [29] акцентируют внимание на целесообразности дальнейшего изучения систем, обладающих бесконечным числом состояний равновесия: "This study suggests that there exist other chaotic systems with uncountable equilibria in need of further investigation".

В настоящей работе исследуются две системы, обладающие скрытыми аттракторами и имеющие бесконечное число состояний равновесия: кусочно-линейная система с устойчивым отрезком покоя, а также система с периодической нелинейностью, бесконечным числом состояний равновесия и бесконечным числом скрытых аттракторов.

2. Система управления с устойчивым отрезком покоя

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \sigma &= c^T x, \end{aligned} \tag{2}$$

где A–$n \times n$-матрица, b и c- – n-векторы, $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция. Уравнениями вида (2) описывается широкий класс систем автоматического управления. Дробно-рациональную функцию комплексного аргумента p, определенную равенством $\chi(p) = c^*(A - pI_n)^{-1}b$, будем считать невырожденной. Последнее означает, что степень многочлена в знаменателе дроби $\chi(p)$ равна n и эта дробь несократима. Здесь I_n- единичная матрица.

Следующие теоремы являются частным случаем утверждений, доказанных в работе [12].

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ в системе (2) непрерывна, кусочно дифференцируема и выполнены следующие условия:

1. График функции $\varphi(\sigma)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = 0$ с прямой $\sigma+$ $+\chi(0)\varphi = 0$ (или с прямой $\varphi = 0$, если матрица A особая);
2. Существуют такие числа μ_1 и μ_2, что во всех точках дифференцируемости функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия $\mu_1 \leqslant \varphi'(\sigma) \leqslant \mu_2$;
3. Существует число $\lambda > 0$ такое, что при всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство
$$1 + (\mu_1 + \mu_2)Re\chi(i\omega - \lambda) + \mu_1\mu_2|\chi(i\omega - \lambda)|^2 > 0; \tag{3}$$
4. Существует $\varphi'(0)$ и матрица $A + \varphi'(0)bc^T$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями и не имеет их в полосе $-\lambda \leqslant Rep \leqslant 0$;
5. Для некоторого $h \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A+hbc^T$ является гурвицевой и $|\varphi(\sigma)-h\sigma| < \gamma < \infty$.

Тогда система (2) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы.

Как показано в [12] выполнение предположений 2) – 4) теоремы1 гарантируют существование неособой матрицы $H = H^*$, имеющей ровно 2 отрицательных и $n - 2$ положительных собственных значения и являющейся решением неравенства

$$2z^*H[(A + \lambda I)z + b\xi] + (\mu_2 c^* z - \xi)(\xi - \mu_1 c^* z) \leqslant -\varepsilon(|z|^2 + \xi^2), z \in R^n, \xi \in R^1.$$

Теорема 2. Пусть справедливо неравенство (3). Пусть для некоторого $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ матрица $A + \mu\, bc^*$ не имеет собственных значений в полосе $-\lambda \leqslant Rep \leqslant 0$ и имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями. Тогда для всех решений $x(t)$ системы (2) с $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, для которых $x(0) \in \Omega = \{x : x^*Hx \leqslant 0\}$ выполнено $|x(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим систему (2) с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -19 \\ -3.5 \\ -3.2 \end{pmatrix},\ x = col(x_1, x_2, x_3) \tag{4}$$

$$\varphi(\sigma) = 0.775(|\sigma + 1.2| - |\sigma - 1.2|) - 0.65(|\sigma + 0.1923076| - |\sigma - 0.1923076|) - 0.25\sigma.$$

Тогда, как легко видеть, система имеет "отрезок покоя" $\Sigma = \{x : x_2 = x_3 = 0;\ 19|x_1| \leqslant 0.2\}$.

Пользуясь методами исследования устойчивости стационарных множеств систем вида (2), развитыми в книге [30], можно показать, что отрезок покоя Σ точечно устойчив в малом. Этот факт подтверждается и численным интегрированием рассматриваемой системы с начальными условиями в малой окрестности отрезка покоя (рис. 1)

Кроме отрезка покоя, рассматриваемая система имеет еще два седловых состояния равновесия $(\pm 0.338947368, 0, 0)$. Численное интегрирование показывает, что среди траекторий, начинающихся в малой окрестности седловых состояний равновесия, есть "уходящие на бесконечность". Такой, например, является траектория решения с начальным условием $(0.339, 0, 0.09)$.Таким образом, если исследуемая система имеет аттракторы, то эти аттракторы не являются самовозбуждающимися.

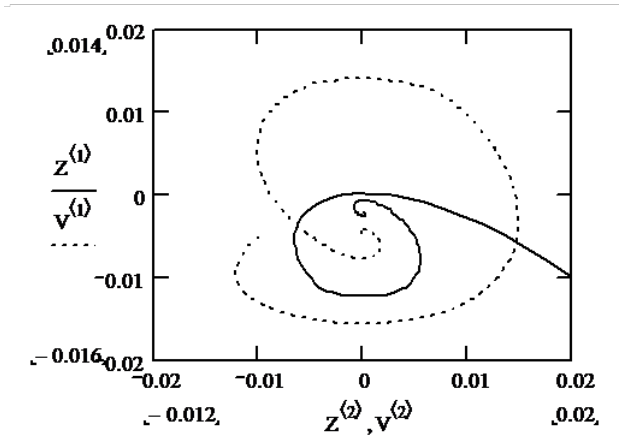


Рис. 2: Поведение траекторий системы в окрестности отрезка покоя (проекция на плоскость (x_1, x_2))

Для поиска возможных скрытых аттракторов рассматриваемой системы воспользуемся аналитическо-численным методом, предложенным в работе [12]. Полагая в системе (2) с матрицей A векторами b, c, заданными соотношениями (4), $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, проведем линейный анализ системы, то есть выделим секторы устойчивости и неустойчивости линейной системы $\dot{x} = (A + \mu bc^T)x$ при различных значениях $\mu \in (-\infty, \infty)$.

При $\mu \in (-\infty, 0)$ матрица $A_\mu = A + \mu bc^T$ имеет одно положительное собственное значение и два комплексно-сопряженных собственных значения в левой открытой полуплоскости. При $\mu = 0$ матрица A_μ имеет одно нулевое собственное значение и два комплексно-сопряженных собственных значения с отрицательными вещественными частями. При $\mu \in (0, 0.088)$ матрица A_μ является гурвицевой (гурвицев сектор). При некотором $\mu \in (0.088, 0.0885)$ матрица A_μ имеет пару чисто мнимых собственных значений и одно отрицательное. При $\mu \in (0.0885,\ 1)$ матрицаA_μ имеет два комплексно-сопряженных собственных значения с положительными вещественными частями и одно отрицательное (сектор неустойчивости степени 2). Наконец, при $\mu \in (1.01, \infty)$ матрица A_μ является гурвицевой.

График нелинейности $\varphi(\sigma)$, определенной формулой (4), поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2. Последнее обстоятельство дает основание предположить[11], что рассматриваемая система может обладать скрытыми аттракторами.

Для рассматриваемой нами системы

$$\chi(p) = (3.2p^2 + 3.5p + 19)(p^3 + p^2 + p)^{-1}$$

положим $\mu_1 = 0.02,\ \mu_2 = 3,\ \lambda = 0.4$. На рис. 2 представлен график функции

$$l(\omega) = 1 + (\mu_1 + \mu_2)Re\chi(i\omega - \lambda) + \mu_1\mu_2|\chi(i\omega - \lambda)|^2.$$

Как видно из этого графика, для рассматриваемой системы выполнено условие (3). Заменим функцию $\varphi(\sigma)$ в рассматриваемой системе на функцию $\psi(\sigma)$, определенную следующим образом:

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 1.5\sigma + 0.5, & \sigma \leqslant -0.5, \\ 0.5\sigma, & |\sigma| \leqslant 0.5, \\ 1.5\sigma - 0.5, & \sigma \geqslant 0.5. \end{cases}$$

Матрица $A+0.5bc^T$имеет 2 собственных значения в правой полуплоскости и не имеет собственных значений в полосе $-0.4 \leqslant Rep \leqslant 0$. Из предыдущих рассуждений следует, что для системы

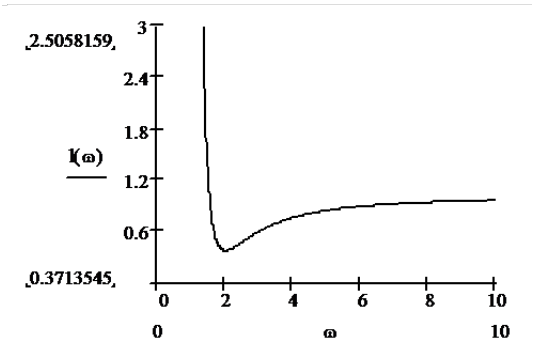


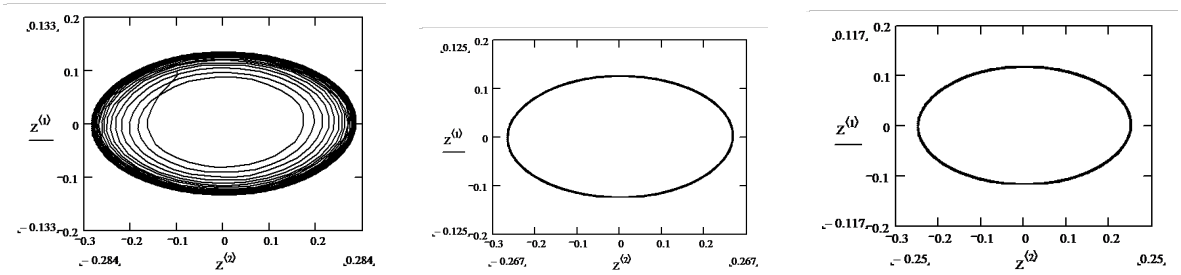
Рис. 3: Проверка выполнения частотного неравенства

с нелинейностью $\psi(\sigma)$ выполнены все условия сформулированной выше теоремы1. Поэтому такая система имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности ее состояния равновесия $x = 0$.

Для поиска скрытого аттрактора исследуемой системы применим метод гомотопии. Пусть $x_0 \neq 0$– какая-либо (произвольная) точка из окрестности состояния равновесия. Найдем численно решение $x_0(t)$ системы (4)с нелинейностью $\psi(\sigma)$ на промежутке $[0, T]$, где T достаточно велико, и начальным условием $x_0(0) = x_0$. Значение $x_0(T)$ будет достаточно близко к циклу. Рассмотрим теперь семейство систем (4) с нелинейностями $\varepsilon_j\varphi(\sigma) + (1 - \varepsilon_j)\psi(\sigma)$, где $\varepsilon_j = jm^{-1}, j = 1, \ldots, m.$. Решения этих систем будем обозначать $x_j(t)$. При численном интегрировании каждой из систем семейства в качестве начального условия $x_j(0)$ будем брать $x_{j-1}(T)$. Если при интегрировании всех систем семейства получаем аттрактор, то при $j = m$ будет найден аттрактор системы (4) с нелинейностью $\varphi(\sigma)$. Если же при некотором значении ε_j аттрактор численным интегрированием не обнаруживается, то это означает, что произошла бифуркация и исчезновение аттрактора.

Замечание. Если в процессе реализации описанного алгоритма на некотором шаге аттрактор не обнаруживается, то это может означать, что очередной аттрактор имеет очень малую область притяжения. В этом случае целесообразно попытаться уменьшить шаг дискретизации по ε и повторить процедуру поиска с меньшим шагом.

Результат работы описанного алгоритма поиска скрытого аттрактора представлен на рис. 3.



$\varepsilon = 0$ $\varepsilon = 0.7$ $\varepsilon = 1$

Рис. 4: Поиск первого скрытого аттрактора (проекция на плоскость (x_1, x_2))

Для найденного аттрактора (цикла) оценим численно амплитуду "выхода" (рис. 4).

$$\sigma(t) = -19x_1(t) - 3.5x_2(t) - 3.2x_3(t)$$

Как видно из рисунка, справедлива оценка $|\sigma(t)| < 1.1$. Пользуясь этой оценкой и теоремой 2, построим еще одну вспомогательную нелинейность $\xi(\sigma)$так, чтобы система (4) с этой

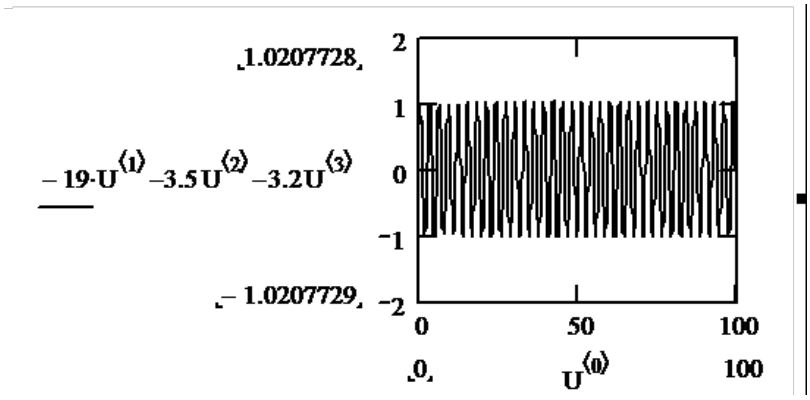
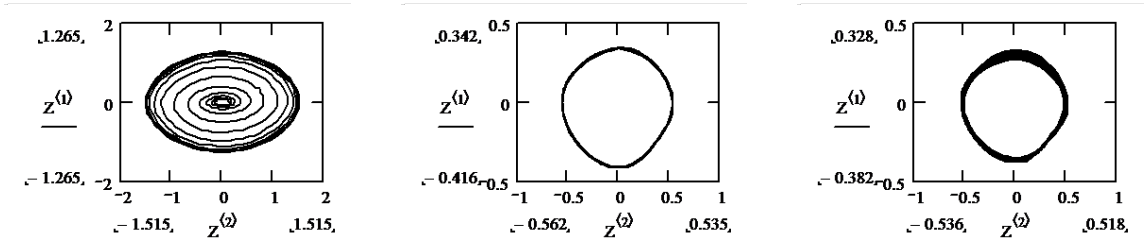


Рис. 5: График "выхода"

нелинейностью имела самовозбуждающийся из состояния равновесия $x = 0$ цикл, заведомо отличный от цикла, найденного выше. В качестве такой нелинейности, как нетрудно убедиться, опираясь на сформулированную выше теорему и результаты линейного анализа, можно взять функцию

$$\xi(\sigma) = \begin{cases} 0.03\sigma - 0.94, & \sigma \leqslant -2, \\ 0.5\sigma, & |\sigma| \leqslant 2, \\ 0.03\sigma + 0.94, & \sigma \geqslant 2. \end{cases} \tag{5}$$

Теперь повторим процедуру поиска скрытого аттрактора, используя построенную вспомогательную нелинейность. Согласно теореме 2, этот аттрактор, если он существует, не может совпасть с аттрактором, найденным ранее. Результат работы алгоритма поиска скрытого аттрактора представлен на рис. 5.



$\varepsilon = 0$ $\varepsilon = 0.8$ $\varepsilon = 1$

Рис. 6: Поиск второго скрытого аттрактора (проекция на плоскость (x_1, x_2))

В результате работы алгоритма найден скрытый аттрактор исследуемой системы, который может быть получен численным интегрированием системы с начальным условием $(-0.36519764, 0.10202236, 0.38718147)$. Найденный аттрактор является хаотическим, о чем можно судить по наблюдаемой в процессе изменения параметра ε серии бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода.

Обратим внимание, что этот аттрактор не является симметричным относительно начала координат, тогда как исходная система не меняется при замене (x_1, x_2, x_3) на $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Последнее обстоятельство дает основания предположить, что система обладает еще одним скрытым аттрактором, который получается численным интегрированием с начальными условиями $(0.36519764, -0.10202236, -0.38718147)$. Это предположение оказывается справедливым. Два скрытых аттрактора-близнеца представлены на рис. 6.

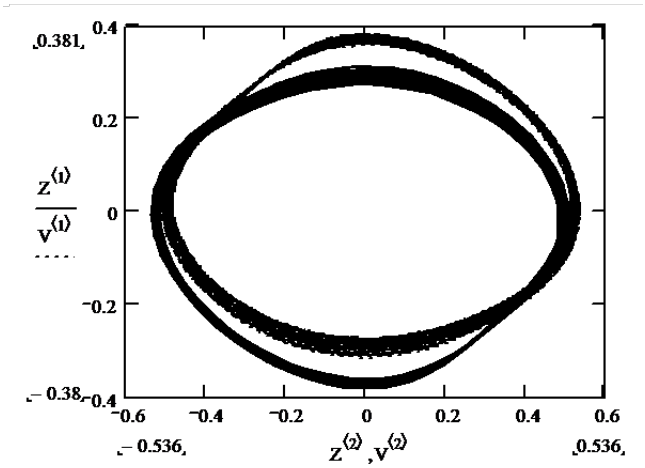


Рис. 7: Аттракторы-близнецы

Каждый из найденных скрытых аттракторов (цикл и аттракторы-близнецы) имеет открытую область притяжения в R^3. На "сепарирующих" поверхностях, разделяющих эти области, могут располагаться неустойчивые многообразия, например, неустойчивые циклы исследуемой системы. Для поиска неустойчивых циклов может быть применен "метод стрельбы" [31]. Применяя этот метод, удается найти два неустойчивых цикла системы, которые вместе с найденными ранее аттракторами образуют минимальный глобальный аттрактор рассматриваемой системы, приведенный на рис. 7.

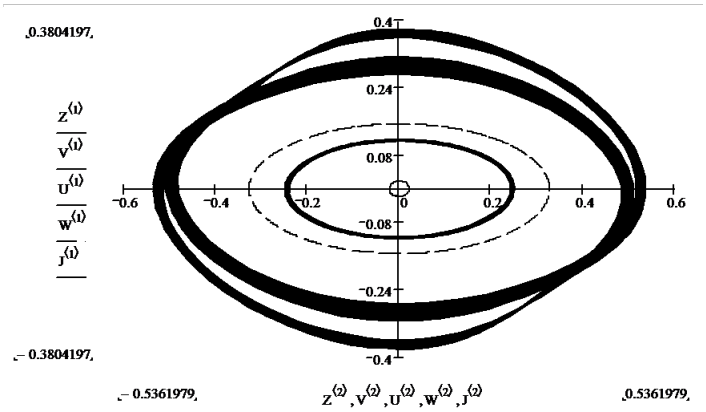


Рис. 8: Минимальный глобальный аттрактор (проекция на плоскость (x_1, x_2))

3. Скрытые аттракторы системы с бесконечным числом точек покоя.

Вновь рассмотрим систему (2), с матрицей A и векторами b, c, определенными соотношениями (4). Поскольку матрица A имеет одно нулевое собственное значение и два собственных значения с отрицательными вещественными частями, рассматриваемая система неособым линейным преобразованием может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Pz + q\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= r^T z + \beta\varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -15.8 \\ -0.3 \end{pmatrix}, \beta = -3.2 \tag{7}$$

Положим $q^T(P - pI_2)^{-1}r = m(p)[n(p)]^{-1}$, где $m(p)$и $n(p)$– многочлены. Системы (6) и (2) эквивалентны и имеет место равенство $\chi(p) = [m(p) - \beta n(p)][pn(p)]^{-1}$.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ в системе (6) непрерывна, кусочно дифференцируема и выполнены следующие условия:

1. График функции $\varphi(\sigma)$ имеет единственную точку пересечения $\sigma = \tilde{\sigma}$ с прямой $\varphi = 0$.
2. Существуют такие числа μ_1 и μ_2, что во всех точках дифференцируемости функции $\varphi(\sigma)$ выполнены условия $\mu_1 \leqslant \varphi'(\sigma) \leqslant \mu_2$;
3. Существует число $\lambda > 0$ такое, что при всех $\omega \in [0, \infty)$ справедливо неравенство
$$1 + (\mu_1 + \mu_2)Re\chi(i\omega - \lambda) + \mu_1\mu_2|\chi(i\omega - \lambda)|^2 > 0;$$
4. Многочлен $[m(p) - \beta n(p)]\varphi'(\tilde{\sigma}) + pn(p)$ имеет ровно два собственных значения с положительными вещественными частями;
5. Для некоторого $h \in (\mu_1, \mu_2)$ все корни многочлена $[m(p) - \beta n(p)]\, h + pn(p)$ имеют отрицательные вещественные части и $|\varphi(\sigma + \tilde{\sigma}) - h\sigma| < \gamma < \infty$.

Тогда система (6)-(7) имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности ее состояния равновесия $z = 0, \sigma = \tilde{\sigma}$.

Доказательство. Запишем систему (6) в виде (2). Тогда матрица A и векторы b, c будут иметь вид

$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ r^T & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = col(z, \sigma)$.Обозначим $\tilde{x} = col(0, \tilde{\sigma})$. Легко убедиться в справедливости равенств $A\tilde{x} = 0, \varphi(c^T\tilde{x}) = 0$. Поэтому, после замены переменной $y = x - \tilde{x}$, получим систему $\dot{y} = Ay + b\varphi(c^Ty + c^T\tilde{x})$. Положив $\sigma = c^Ty, \varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma + c^T\tilde{x})$, приходим к системе $\dot{y} = Ay + b\varphi_1(c^Ty)$, имеющей единственное состояние равновесия $y = 0$. При выполнении предположений теоремы 3 для этой системы, очевидно, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому такая система имеет по крайней мере один орбитально устойчивый цикл, области притяжения которого принадлежат почти все точки окрестности состояния равновесия $y = 0$. Отсюда вытекает справедливость утверждения доказываемой теоремы.

Рассмотрим систему (5)-(6) с 2π- периодической нелинейностью

$$\varphi(\sigma) = \frac{\pi}{6}(1.00052411 \sin\sigma + 0.404720835 \sin 2\sigma + 0.1798759 \sin 3\sigma + 0.062532677 \sin 4\sigma). \tag{8}$$

Нелинейность (8) выбрана таким образом, что ее график поочередно пребывает в секторах гурвицевости и неустойчивости степени 2. Такое поведение нелинейности дает основание предположить [10,11], что рассматриваемая система может содержать скрытые аттракторы. Данная система имеет бесконечное число состояний равновесия вида $(0, 0, \pi k), k \in Z$. При этом, как легко проверить, при четном k матрица системы, линеаризованной в соответствующем состоянии равновесия, является гурвицевой, а при нечетном k матрица линеаризации имеет одно положительное собственное значение и 2 собственных значения с отрицательными вещественными частями. Очевидно, что из окрестностей устойчивых состояний равновесия

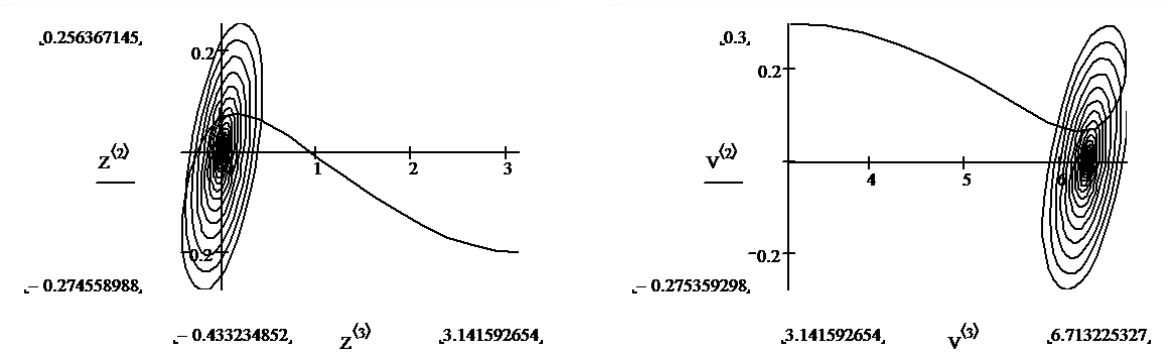


Рис. 9: Решения с начальными условиями $(0.2, -0.2, \pi)$ (слева) и $(-0.3, 0.3, \pi)$(справа)

аттракторы рассматриваемой системы возбуждаться не могут. Численное интегрирование показывает, что из произвольной точки окрестностей неустойчивых состояний равновесия также не возбуждаются аттракторы. Так, например, решения системы с начальными условиями $(0.2, -0.2, \pi)$ и $(-0.3, 0.3, \pi)$ ведут себя так, как показано на рис. 8

Поскольку рассуждения и построения, проведенные ранее для системы (4), остаются справедливыми и для системы (6)-(7), в качестве "стартовой" нелинейности для реализации процедуры поиска скрытого аттрактора можно использовать, например, функцию (5). Результат работы описанного выше алгоритма поиска скрытого аттрактора представлен на рисунке 9-10. на этом же рисунке представлен и "аттрактор-близнец который удалось найти исходя из соображений симметрии системы.

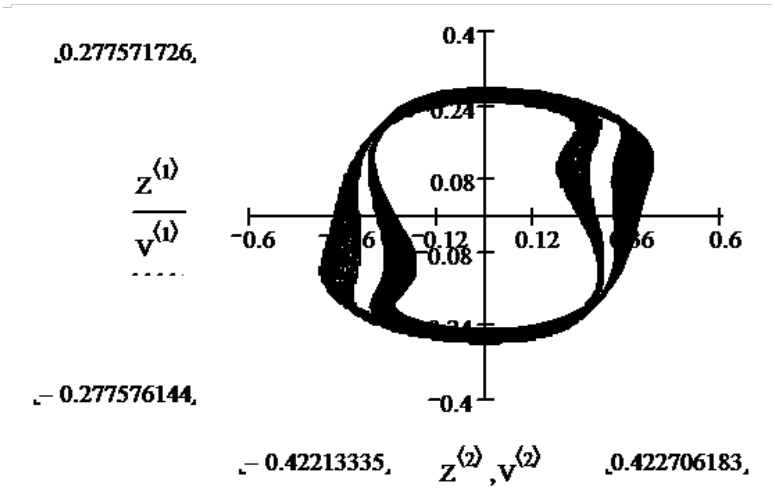


Рис. 10: Аттракторы-близнецы системы с нелинейностью (8).(проекция на плоскость (z_1, z_2))

Заметим (рис. 10), что для найденных аттракторов выполнено соотношение $|\sigma(t)| < \pi$. Поэтому, пользуясь теоремой 3, попытаемся найти срытые аттракторы, отличные от аттракторов, найденных выше. Для этого повторим процедуру поиска аттракторов, взяв в качестве "стартовых" нелинейностей функции $\xi(\sigma+2\pi k), k = \pm 1$. В результате находим еще 4 скрытых аттрактора исследуемой системы, изображенные на рисунке 11.

Теперь очевидно, что исследуемая система имеет бесконечное число скрытых аттракторов, каждая пара которых расположена в своей полосе $\pi(2k-1) < \sigma < \pi(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

В заключение отметим, что гурвицевость матрицы P в системе (6) и ограниченность функции $\varphi(\sigma)$ влечет ограниченность компонент $z_1(t)$и $z_2(t)$ всех решений рассматриваемой системы. Поэтому система устойчива по Лагранжу и фазовая траектория любого ее решения при

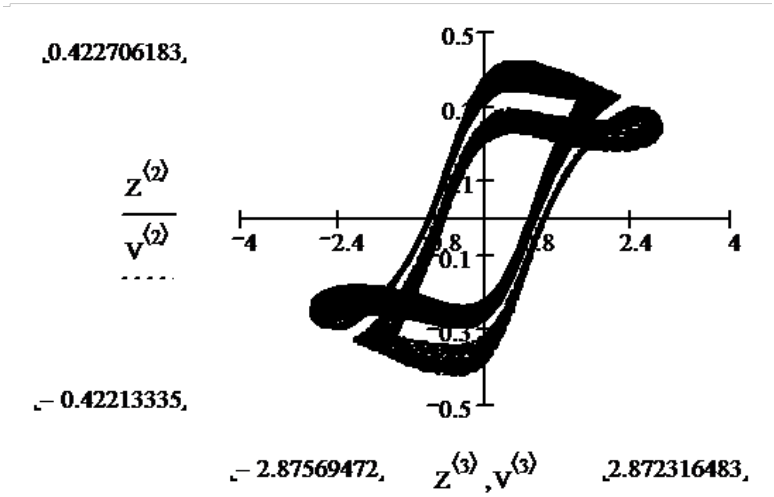


Рис. 11: Аттракторы-близнецы системы с нелинейностью (8).(проекция на плоскость (z_2, σ))

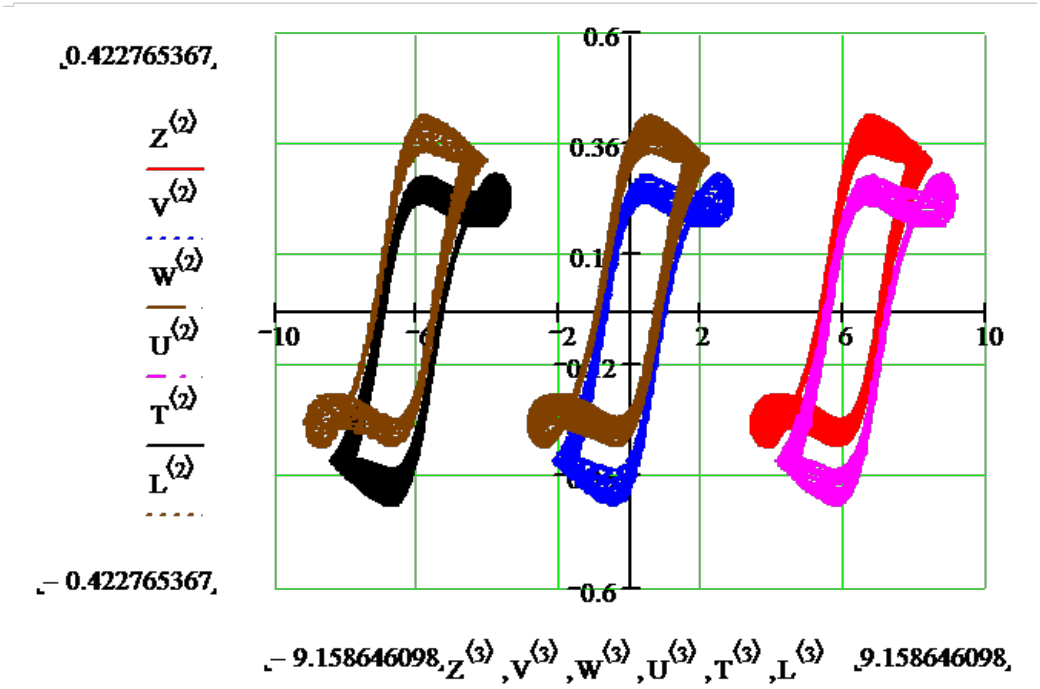
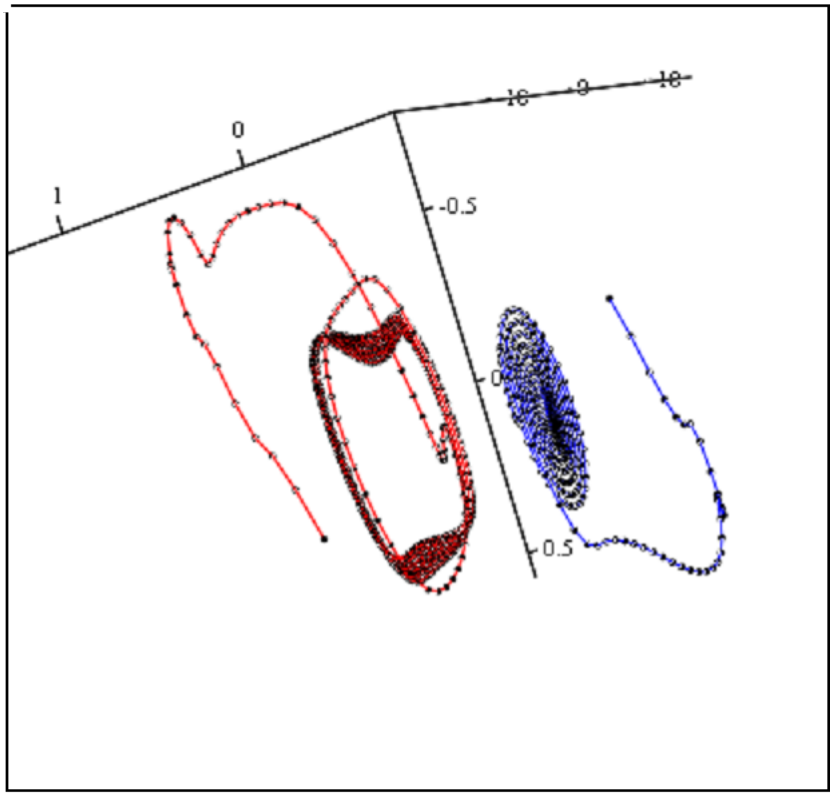


Рис. 12: Семейство скрытых аттракторов (проекция на плоскость (z_2, σ))

$t \to +\infty$ асимптотически приближается либо к некоторому состоянию равновесия, либо к одному из аттракторов найденного семейства (рис. 12)

4. Заключение

В результате проведенного исследования найдены новые классы динамических систем, имеющих бесконечное число состояний равновесия и обладающих скрытыми хаотическими аттракторами. Для поиска скрытых аттракторов применен разработанный автором оригинальный метод, позволяющий избежать "глобального сканирования" фазового пространства исследуемой системы. Автор выражает надежду, что вновь найденные системы найдут применение в приложениях, опирающихся на использование хаоса.



$\left(v^{\langle 1\rangle}, v^{\langle 2\rangle}, v^{\langle 3\rangle}\right), \left(z^{\langle 1\rangle}, z^{\langle 2\rangle}, z^{\langle 3\rangle}\right)$

Рис. 13: Поведение траекторий в фазовом пространстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений. // ДАН СССР, 1965, т. 169, №3. С.558-561.

2. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow" *J.Atmos.Sci.*, vol. 20, pp. 65 -75.

3. Rössler, O. E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos. Physics Letters A, vol. 57, no. 5, pp. 397 -398.

4. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". *Proc. Of the IEEE 35th placeMidwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No. 92CH3099-9). StateplaceWashington,* ,vol. 2, pp. 916 – 926.

5. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости “в большом” динамических систем. //УМН, 1949, 4:4(32). С. 187–188.

6. Kalman, R. E. 1957, "Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems" .*Transactions of ASME.*,vol. 79, no. 3, pp. 553-566.

7. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. 1964 .М. Наука, 367 с.

8. Леонов Г. А. Об устойчивости в целом нелинейных систем в критическом случае двух нулевых корней. // ПММ,1981, т.45, №4.С 752-755.

9. Леонов Г. А. Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах.//ПММ, 2010, т.74, №1. С 24–50.

10. Буркин И. М. О явлении буферности в многомерных динамических системах // Диф. уравнения, 2002, т.38, №5. С 615-625.

11. Буркин И. М., Соболева Д.В. О структуре глобального аттрактора многосвязных систем автоматического регулирования. // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2012, Вып. 1. С. 5-16.

12. Буркин И. М., Нгуен Нгок Хиен. Аналитико-численные методы поиска скрытых колебаний в многомерных динамических системах // Диф. уравнения, 2014, т. 50, № 13. С 1695–1717.

13. 13. Буркин И. М. Метод перехода в пространство производных:40 лет эволюции.// Диф.уравнения, 2015, т. 51, № 13. С. 1717–1751.

14. Andrievsky, B. R., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., Seledzhi, S. M. 2013, "Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators". *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 19, no. 1, pp. 37-41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).

15. Wang, B , Zhou, S., Zheng, X., Zhou, C., Dong, J., Zhao, J. 2015, "Image watermarking using chaotic map and DNA coding." *Optik*, vol. 126, pp. 4846–4851.

16. Liu, H.,. Kadir, A, Li, Y. 2016, "Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys." *Optik*, vol. 127 , pp. 7431–7438.

17. Брагин В. О, Вагайцев В. И., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблема Айзермана, Калмана и цепи Чуа.// Известия РАН, Теория и системы управления. 2011, т. 50, №4. С. 511–543.

18. Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V. 2013, "Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits." *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 1.1330002.

19. Jafari, S., Sprott J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria." *Phys. Lett. A,* vol. 377, pp. 699-702.

20. Molaie, M., Jafari, S., Sprott, J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium." *Int. J. Bifurcation and Chaos.,* vol. 23, no. 11. 1350188.

21. .Wangand X., Chen G. 2012, "A chaotic system with only one stable equilibrium." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.*, vol. 17, no. 3, pp.1264–1272.

22. Wei Z. 2011,"Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria." *Phys. Lett. A,* vol. 376, pp. 102–108.

23. Wei, Z. 2011, "Delayed feedback on the 3-D chaotic system only with two stable node-foci." *Comput.Math. Appl.*, vol. 63, pp. 728-738..

24. Wang, X., Chen, G. 2013, "Constructing a chaotic system with any number of equilibria." *Nonlinear Dyn.*, vol. 71, pp. 429-436.

25. Jafari, S., Sprott, J. C. 2013, "Simple chaotic ?ows with a line equilibrium. *Chaos Solitons Fractals*, vol. 57, pp. 79–84

26. Pham, V.-T., Jafari, S., Volos, C. Vaidyanathan, S. , Kapitaniak, T., 2016, "A chaotic system with in?nite equilibria located on a piecewise linear curve." *Optik,* vol. 127, pp. 9111–9117.

27. Jafari, S, Sprott, J. C., Malihe Molaie 2016, "A Simple Chaotic Flow with a Plane of Equilibria" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no. 6 1650098 , DOI: 10.1142/S021812741650098X

28. Viet-Thanh Phama, Jafari, S, CityplaceVolos, C. 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349

29. Wang, X., Viet-Thanh Pham, CityplaceVolos,C. 2017, "Dynamics, Circuit Design, and Synchronization of a New Chaotic System with Closed Curve Equilibrium" *Complexity:1-9.* DOI: 10.1155/2017/7138971

30. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. 1978. М. Наука.400 с.

31. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. 1991. М., Мир,364 с.

REFERENCES

1. Shilnikov, L. P. 1965, "A case of the existence of a countable number of periodic motions *Sov. Math. Docklady*, vol 169, no. 3, pp. 558-561.

2. Lorenz, E. N. 1963, "Deterministic nonperiodic flow" *J.Atmos.Sci.*, vol. 20, pp. 65 -75.

3. Rössler, O.E. 1976, "An Equation for Continuous Chaos. Physics Letters A, vol. 57, no. 5, pp. 397 -398.

4. Chua, L. O. 1992, "A zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits". *Proc. Of the IEEE 35th placeMidwest Symp. on Circuits and Systems (Cat. No. 92CH3099-9). StateplaceWashington,* ,vol. 2, pp. 916 – 926.

5. Aizerman, M. A. 1949 "On a problem concerning the stability in the large of dynamical systems" *Uspekhi Mat. Nauk,* , vol. 4, pp. 187–188

6. Kalman, R. E. 1957, "Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems" *.Transactions of ASME.*,vol. 79, no. 3, pp. 553-566.

7. Pliss, V. A. 1964 , "*Nelokal'nye problemy teorii kolebaniy"[Nonlocal problems of the theory of oscillations].* Moscow, Nauka Publ.,. 367 pp

8. Leonov, G. A 1981 "On stability in the large of nonlinear systems in the critical case of two zero roots" *Pricl. Mat. Mekh,* , vol. 45, no. 4, pp. 752-755.

9. Leonov, G. A. 2010, "E?ective methods for periodic oscillations search in dynamical systems." *Appl. Math. Mech.*, vol. 74, no. 1, pp. 24–50.

10. Burkin, I. M. 2002, "The Buffer Phenomenon in Multidimensional Dynamical Systems." *Diff. Equations*, vol. 38, no. 5, pp. 615–625.

11. Burkin, I. M., Soboleva, D.V. 2012, "On structure of global attractor of MIMO automatic control systems". *Izvestiya TulGU. Estestvenniye nauki,* , vol. 1, pp. 5–16.

12. Burkin, I. M., Nguen, N. K. 2014, "Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dynamical Systems *Diff.l Equations, ,* vol. 50, No. 13, pp. 1695–1717.

13. Burkin, I. M., 2015, "Method of “Transition into Space of Derivatives”: 40 Years of Evolution" *Diff. Equations*, vol. 51, no. 13, pp. 1717–1751

14. Andrievsky, B. R., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A., Seledzhi, S.M. 2013, "Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators". *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 19, no. 1, pp. 37-41. (doi: 10.3182/20130902-5-DE-2040.00040).

15. Wang,B , Zhou, S., Zheng, X., Zhou, C., Dong, J., Zhao, J. 2015, "Image watermarking using chaotic map and DNA coding." *Optik*, vol. 126, pp. 4846–4851.

16. Liu, H.,. Kadir, A, Li, Y. 2016, "Audio encryption scheme by confusion and diffusion based on multi-scroll chaotic system and one-time keys." *Optik*, vol. 127 , pp. 7431–7438.

17. Bragin, V. O., Vagaitsev, V. I., Kuznetsov, N. V., Leonov, G. A. 2011, "Algorithms for ?nding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits." *J. Comput.Syst. Sci. Int.*, vol. 50, no. 4, pp. 511–543.

18. Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V. 2013, "Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits.*"* *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 1.1330002.

19. Jafari, S., Sprott J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria." *Phys. Lett. A,* vol. 377, pp. 699-702.

20. Molaie, M., Jafari, S., Sprott, J. C., Golpayegani, S. M. R. H. 2013, "Simple chaotic flows with one stable equilibrium." *Int. J. Bifurcation and Chaos.,* vol. 23, no. 11. 1350188.

21. .Wangand X., Chen G. 2012, "A chaotic system with only one stable equilibrium." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.*, vol. 17, no. 3, pp.1264–1272.

22. Wei Z. 2011, "Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria." *Phys. Lett. A,* vol. 376, pp. 102–108.

23. Wei, Z. 2011, "Delayed feedback on the 3-D chaotic system only with two stable node-foci." *Comput.Math. Appl.*, vol. 63, pp. 728–738..

24. Wang, X., Chen, G. 2013, "Constructing a chaotic system with any number of equilibria." *Nonlinear Dyn.*, vol. 71, pp. 429-436.

25. Jafari, S., Sprott, J. C. 2013, "Simple chaotic ?ows with a line equilibrium. *Chaos Solitons Fractals*, vol. 57, pp. 79–84

26. Pham, V.-T., Jafari, S., Volos, C. Vaidyanathan, S. , Kapitaniak, T., 2016, "A chaotic system with in?nite equilibria located on a piecewise linear curve." *Optik,* vol. 127, pp. 9111–9117.

27. Jafari, S, Sprott, J. C., Malihe Molaie 2016, "A Simple Chaotic Flow with a Plane of Equilibria" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 26, no. 6 1650098 , DOI: 10.1142/S021812741650098X

28. Viet-Thanh Phama, Jafari, S, CityplaceVolos,C. 2017, "A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation". *Optik*, vol. 131, pp. 343–349

29. Wang, X., Viet-Thanh Pham, CityplaceVolos, C. 2017, "Dynamics, Circuit Design, and Synchronization of a New Chaotic System with Closed Curve Equilibrium" *Complexity:1-9.* DOI: 10.1155/2017/7138971

30. Gelig, A. Kh., Leonov, G. A., Yakubovich, V. A. 1978, *"The stability of nonlinear systems with nonunique equilibrium"* CityplaceMoscow, Nauka Publ.,. 400 p.

31. Holodniok, M., Klíč, A., Kubíček, M., Marek, M. 1991, "*Metody analiza nelineynych dinamicheskich modeley" [Methods of the analysis of nonlinear dynamic models]* placeCityMoscow, Mir, 364 p.

Получено 06.12.2017 г.
Принято в печать 12.06.2017 г.