ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.

АНАТОЛИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ КАРАЦУБА [1]

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

В статье авторы ставили перед собой две главные задачи: охарактеризовать основные этапы жизни выдающегося русского математика, Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующего отделом теории чисел МИАН им. В. А. Стеклова, доктора физико-математических наук Анатолия Алексеевича Карацубы и дать краткий анализ его научной деятельности, оказавшей значительное влияние на развитие аналитической теории чисел.

Достаточно подробно описываются исследования профессора А. А. Карацубы и его учеников по аналитической теории чисел, где выделяются, следуя А. А. Карацубе, три основных направления:
1) тригонометрические суммы и тригонометрические интегралы;
2) дзета-функция Римана;
3) характеры Дирихле.

А. А. Карацуба, являясь учеником профессора Н. М. Коробова, руководил научной школой и научным семинаром по аналитической теории чисел в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Среди его учеников многие защитили кандидатские диссертации, причём семь из них впоследствии стали докторами физико-математических наук.

Анатолий Алексеевич опубликовал 158 научных работ, среди которых 4 монографии и один классический учебник по аналитической теории чисел, был переводчиком ряда фундаментальных научных монографий. Являлся членом редколлегии журнала "Математические заметки" и членом программных комитетов ряда международных конференций по алгебре и теории чисел.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, тригонометрические интегралы, дзета-функция Римана, характеры Дирихле.

Библиография: 58 названий.

ANATOLY ALEKSEEVICH KARATSUBA

G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov (Moscow)

[1]Работа поддержана фондом РФФИ: грант № НК 13-01-00835.

Abstract

The authors set themselves two main objectives: to characterize the main stages of the life of the outstanding Russian mathematician, Honored Scientist of Russia, Professor of Moscow State University named after M. V. Lomonosov, head of the department of number theory Steklov Mathematical Institute, Doctor of Physical and Mathematical Sciences Anatolii Alexeevich Karatsuba and give a brief analysis of his scientific work, which has had a significant impact on the development of analytic number theory.

Sufficiently detailed description of the research of Professor A. A. Karatsuba and his disciples on the analytic theory of numbers, which are allocated following the Karatsuba, three main areas:
1) trigonometric sums and trigonometric integrals;
2) the Riemann zeta function;
3) Dirichlet characters.

A. A. Karatsuba, being a disciple of Professor N. M. Korobov, led the scientific schools and seminars on analytic number theory at Moscow State University named after M. V. Lomonosov.

Among his many students defended their dissertations, with seven of them later became Doctor of Physical and Mathematical Sciences.

Anatoly Alekseevich has published 158 scientific papers, including 4 monographs and a classic textbook on analytic number theory, was the translator of a number of fundamental scientific monographs. He was a member of the editorial board of the journal "Mathematical notes"and a member of the program committees of several international conferences on algebra and number theory.

Keywords: trigonometric sums, trigonometric integrals, Riemann zeta function, Dirichlet characters.

Bibliography: 58 titles.

1. Введение

28 сентября 2008 г. скончался выдающийся российский математик Анатолий Алексеевич Карацуба. Его научная и педагогическая деятельность была неразрывно связана с Механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова, где он с 1983 г. возглавлял Отдел теории чисел.

А. А. Карацуба родился 31 января 1937 г. в г. Грозном. В 1944–1954 гг. он учился в средней мужской школе № 6 г. Грозного и окончил ее с серебряной медалью. Уже в школьные годы проявились его математические способности в решении трудных задач, которые предлагались в математическом кружке школьникам более старших классов. В школе он увлекался рисованием, силовыми видами спорта, а впоследствии стал известным альпинистом.

В 1954 г. А. А. Карацуба поступил на Механико-математический факультет МГУ, пройдя собеседование у известного историка математики К. А. Рыбникова. Научным руководителем студента Карацубы стал академик А. Н. Колмогоров, который в то время являлся деканом факультета. Под его руководством были выполнены замечательные работы А. А. Карацубы по теории автоматов Мура [14] и быстрому умножению многозначных чисел [15].

На старших курсах обучения на факультете Анатолий Алексеевич посещал специальные курсы и семинары кафедры теории чисел под руководством А. О. Гельфонда, который заметил способного студента. А. А. Карацубе нравились занятия теорией чисел и он перешел для обучения на кафедру теории чисел. В 1959 г. А. А. Карацуба защитил дипломную работу, выполненную под руководством профессора Н. М. Коробова, с отличием закончил Механико-математический факультет МГУ и поступил в аспирантуру Отделения математики Механико-математического факультета по кафедре теории чисел. В 1962 г. под руководством Н. М. Коробова он защитил кандидатскую диссертацию на тему “Рациональные тригонометрические суммы и их приложения”. С этого времени его научно-педагогическая деятельность проходит на Механико-математическом факультете МГУ. В 1966 г. А. А. Карацуба в совете МИАН СССР защищает докторскую диссертацию на тему “Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем”.

В том же году по рекомендации одного из оппонентов по докторской диссертации, директора Стекловского института, академика И. М. Виноградова он стал сотрудником Отдела теории чисел МИАН СССР, продолжая по совместительству работу на Механико-математическом факультете МГУ. С этого периода начинается плодотворное сотрудничество А. А. Карацубы с И. М. Виноградовым, которого он считал своим учителем. В 1983 г. И. М. Виноградов скончался. С этого момента А. А. Карацуба возглавил Отдел теории чисел МИАН СССР, заведующим которого он оставался до последних дней жизни.

А. А. Карацубе принадлежит 158 научных печатных работ, он автор четырех монографий и известного учебника по аналитической теории чисел, выдержавшего несколько изданий и переведенного на иностранные языки. Под руководством А. А. Карацубы защищено 15 кандидатских диссертаций, семеро его учеников стали докторами наук. Его научная деятельность отмечена академическими премиями им. П. Л. Чебышёва и И. М. Виноградова, а в 1999 г. он получил звание Заслуженного деятеля науки РФ.

Всю жизнь А. А. Карацуба активно занимался спортом. В студенческие годы он увлекался альпинизмом, скалолазанием, спелеологией и горным туризмом. Был чемпионом МГУ по тяжелой атлетике. Впоследствии А. А. Карацуба одиннадцать раз покорял горные вершины-семитысячники Советского Союза.

Под влиянием академиков А. Н. Колмогорова и П. С. Александрова он стал большим любителем и знатоком классической музыки, в особенности И. С. Баха и А. Вивальди, был постоянным слушателем концертов в Московской консерватории.

2. Научное творчество А. А. Карацубы

Научное творчество А. А. Карацубы в основном относится к аналитической теории чисел. Но первые две его замечательные работы относятся к информатике. Один из этих результатов касается теории конечных автоматов. Впоследствии он получил название теоремы Мура–Карацубы и до сих пор является единственным нелинейным результатом в теории автоматов.

Другой результат открыл новое направление в информатике — теорию быстрых вычислений. А. А. Карацуба впервые предложил способ быстрого умножения многозначных чисел, который более эффективен, чем "школьный способ умножения чисел в столбик". Сейчас этот метод используется не только в математическом обеспечении компьютеров, но и в самой конструкции ЭВМ, то есть "в железе".

Работы А. А. Карацубы по теории чисел достаточно полно освещены в статье [8], посвященной его 60-летию. Сам А. А. Карацуба выделял три направления его исследований по теории чисел:
1) тригонометрические суммы и тригонометрические интегралы;
2) дзета-функция Римана;
3) характеры Дирихле.

К первому направлению он относил:

- p-адический метод,
- проблему Хуа Ло-кена о показателе сходимости тригонометрического интеграла от многочлена,
- теорию кратных тригонометрических сумм,
- оценку функции Харди в проблеме Варинга,
- проблему Артина о локальном представлении нуля формой,
- оценку коротких сумм Клоостермана.

Ко второму направлению относятся его работы:

- по гипотезе А. Сельберга о правильном порядке количества нулей дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой и о наличии нулей на очень коротких промежутках этой прямой,
- об исключительности критической прямой у функции Дэвенпорта–Хейльбронна в смысле аномальности большого количества нулей на ней,
- по оценке остатка в асимптотической формуле многомерной проблемы делителей Дирихле,

- по исследованию поведения аргумента дзета-функции Римана на критической прямой.

К третьему направлению исследований — теории характеров Дирихле, — относятся работы А. А. Карацубы:

- по оценкам коротких сумм характеров в конечных полях,
- по оценкам сумм характеров по “сдвинутым простым числам”,
- по оценкам сумм характеров от многочленов с простым аргументом,
- по нижним оценкам сумм характеров по простому модулю от многочленов высокой степени,
- по суммам характеров по аддитивным последовательностям,
- по распределению степенных вычетов и первообразных корней в редких последовательностях.

3. Работы А. А. Карацубы по p-адическому методу

Цикл работ А. А. Карацубы по p-адическому методу открывается работой по L-суммам. Эти суммы возникли в теории характеров Дирихле по модулю, равному степени простого числа, как следствие формулы А. Г. Постникова о представлении характера в виде экспоненты от многочлена с рациональными коэффициентами. С помощью сдвига промежутка суммирования на подходящую степень простого числа А. А. Карацубе удалось резко понизить степень многочлена в экспоненте, что, в частности, привело к новой границе нулей для соответствующих L-функций Дирихле. Эта работа лежит в основе его кандидатской диссертации.

Дальнейшее развитие p-адического метода выполнено в работе по выводу асимптотической формулы для числа решений в проблеме Варинга для сравнения по модулю, равному высокой степени фиксированного простого числа. Там по существу происходит замена неравенств в “вещественном” доказательстве проблемы Варинга по методу Виноградова сравнениями по модулю степени данного простого числа. Впоследствии идея этой замены была развита до замены вещественной метрики в методе И. М. Виноградова на p-адическую метрику Гензеля. В частности, в совместной работе А. А. Карацубы и Н. М. Коробова [16] дано новое p-адическое доказательство теоремы И. М. Виноградова о среднем значении модуля тригонометрической суммы Г. Вейля. Ранее p-адический метод в теореме о среднем применял Ю. В. Линник, однако его подход существенно отличался от подхода И. М. Виноградова, которому следовали А. А. Карацуба и Н. М. Коробов.

Развитие p-адического метода легло в основу докторской диссертации А. А. Карацубы. Наиболее совершенная форма применения этого метода к тригонометрическим суммам Г. Вейля и теоремам о среднем изложена им в статье [23].

Нахождению точного значения показателя сходимости особого интеграла в проблеме Терри посвящено две статьи Г. И. Архипова, А. А. Карацубы и В. Н. Чубарикова [3, 4]. В них авторы полностью решили проблему Хуа Ло-кена об этом показателе. Там же удалось найти новую характеристику для многочлена в экспоненте тригонометрического интеграла, учитывающую вклад всех особых точек многочлена в оценку интеграла. В случае кратного тригонометрического интеграла в настоящее время получены только верхние и нижние оценки для показателя сходимости.

Следующий цикл работ связан с оценками кратных тригонометрических сумм. Постановка задачи принадлежит И. М. Виноградову [9]. В основе этих оценок лежат теорема о среднем значении степени модуля кратных тригонометрических сумм и лемма о кратности пересечения многомерных параллелепипедов, центры которых имеют координатами коэффиценты многочлена в экспоненте при всевозможных допустимых сдвигах переменных суммирования [1, 2, 7].

Следует сказать, что сама теорема о среднем состоит в доказательстве проблемы моментов для тригонометрических сумм Г. Вейля, то есть в нахождении такой степени осреднения, при которой удается получить асимптотику этого среднего значения относительно основного параметра — длины промежутка суммирования. Для приложений важно, чтобы степень осреднения имела по возможности наименьший порядок. Для кратных тригонометрических сумм Г. Вейля до 70-х годов решение проблемы моментов не было найдено ни при каких значениях степени осреднения. В указанных выше работах эта проблема в кратном случае была доведена до того же состояния, что и в одномерном случае. Добавим к этому, что основные моменты доказательства следуют методу И. М. Виноградова с заменой вещественной метрики на p-адическую метрику.

Усовершенствовав p-адический метод Ю. В. Линника для оценок тригонометрических сумм с малыми простыми числами, А. А. Карацуба [31] получил новую оценку функции Харди в проблеме Варинга.

В проблеме Артина о p-адическом представлении нуля формой произвольной степени Г. И. Архипов и А. А. Карацуба [5] показали, что вместо предполагавшегося степенного роста числа переменных для нетривиального представления нуля формой, это число переменных должно расти почти экспоненциально в зависимости от степени формы. Ранее Г. И. Архипов [6] при решении проблемы Гильберта – Камке нашел, что для нетривиального p-адического представления нуля системой форм, число переменных будет расти экспоненциально.

Наконец, для коротких тригонометрических сумм Клоостермана А. А. Карацуба [38, 42, 43] нашел новый метод их оценки. Как известно, из оценок А. Вейля для таких сумм с простым знаменателем имеет место корневая оценка, а для сумм со знаменателем, равным степени простого числа, корневую оценку доказал Г. Салье. Тем самым из свойства мультипликативности суммы Клоостермана по знаменателю, корневая оценка имеет место для любого знаменателя в сумме Клоостермана. Отметим также, что А. Г. Постникову для сумм Клоостермана со знаменателем, являющимся высокой степенью простого числа, методом И. М. Виноградова удалось получить нетривиальные оценки для промежутков суммирования более коротких, чем корень квадратный из знаменателя выражения, стоящего в экспоненте. А. А. Карацуба оценил эти суммы нетривиально для любого знаменателя m и число слагаемых в них не превосходит m^{ε}, а в некоторых случаях — величины $\exp\left((\ln m)^{2/3+\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Найденные А. А. Карацубой оценки нашли широкие применения в аналитической теории чисел. Рассмотрим дробную долю выражения следующего вида $\left\{\frac{an^*+bn}{m}\right\}$, где a, b — любые фиксированные целые числа, m — достаточно большое натуральное число, переменная n пробегает натуральные числа, взаимно простые с m, не превосходящие любой наперед заданной границы, меньшей $\sqrt{m}$, и $nn^* \equiv 1 \pmod m$. Сам А. А. Карацуба вывел асимптотику среднего значения указанных выше величин, нашел нижнюю границу для числа попаданий этих дробных долей на любой фиксированный промежуток единичного отрезка и оценил точность приближения этими дробными долями любого вещественного числа из единичного отрезка. Различные аспекты метода А. А. Карацубы были применены Г. Иванцом, Д. Фридлендером, Д. Р. Хиз-Брауном и др.

4. Работы А. А. Карацубы по гипотезе А. Сельберга

Второе направление в исследованиях А. А. Карацубы открывают работы [27]–[33], связанные с гипотезой А. Сельберга. В 1914 г. Г. Х. Харди доказал, что $\zeta(1/2+it)$ имеет бесконечно много вещественных нулей. Этот результат Харди Э. Ландау отнес к самым значительным успехам математики настоящего времени.

Следующие два утверждения Г. Х. Харди и Д. Е. Литтлвуда [55, 56] стали источником двух направлений исследования, одно из которых касается оценки сверху расстояния между вещественными нулями $\zeta(1/2+it)$, а другое — "плотности" нулей $\zeta(1/2+it)$ на промежутках $(T, T+H]$ при достаточно больших $T > 0, H = T^{a+\varepsilon}$, с возможно меньшим значением постоянной $a > 0$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. Пусть $N_0(T)$ — количество нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$, лежащих на промежутке $(0, T]$. Тогда
1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $T \geq T_0$ и $H = T^{0{,}25+\varepsilon}$ промежуток $(T, T+H]$ содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ и $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при

$T \geq T_0$ и $H = T^{0,5+\varepsilon}$ справедливо неравенство $N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH$.

В 1942 г. А. Сельберг [58] получил выдающийся результат в связи утверждением 2): для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ и $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при $T \geq T_0$ и $H = T^{0,5+\varepsilon}$ справедливо неравенство $N(T+H) - N(T) \geq cH \ln T$. Он высказал гипотезу об уменьшении показателя степени $a = 0,5$ для величины $H = T^{a+\varepsilon}$.

Следует отметить замечательные результаты Я. Мозера [50, 51, 52]. Он доказал, что
1) существует $T_0 > 0$ такое, что при $T \geq T_0$ и $H = T^{1/6} \ln^6 T$ промежуток $(T, T+H]$ содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2 + it)$;
2) существует $T_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что при $T \geq T_0$ и $H = T^{5/12} \ln^3 T$ справедливо неравенство $N_0(T+H) - N_0(T) \geq cH$.

Исследования в этих направлениях привели А. А. Карацубу [27, 29, 30] к доказательству гипотезы А. Сельберга с показателем $a = \frac{27}{82} = \frac{1}{3} - \frac{1}{246}$ и выводу, что существует $T_0 > 0$ такое, что для любого $T \geq T_0$ на промежутке $(T, T+H]$ при $H = T^{5/32} \ln^2 T$ содержится нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2 + it)$.

В 1992 г. А. А. Карацуба [36] разработал новый подход к проблеме распределения нулей дзета-функции Римана на “сверхкоротких” промежутках критической прямой. Он доказал, что гипотеза Сельберга справедлива для “почти всех” промежутков вида $(T, T+H)$ при $H = T^{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая положительная постоянная. Более того, для любых чисел $\varepsilon, \varepsilon_1$ с условием $0 < \varepsilon, \varepsilon_1 < 1$ “почти все” промежутки $(T, T+H)$ при $H = \exp{(\ln T)^{\varepsilon}}$ содержат не менее $H(\ln T)^{1-\varepsilon_1}$ нулей функции $\zeta(1/2 + it)$.

Начиная с 1990 г. А. А. Карацуба [34, 35, 37] стал изучать распределение нулей линейных комбинаций L-функций Дирихле. Первым примером такой функции служит функция Дэвенпорта – Хейльбронна $f(s)$, представляющая собой линейную комбинацию двух L-функций Дирихле от комплексно-сопряженных характеров по модулю 5. Г. Дэвенпорт и Г. Хейльбронн [53] доказали, что число нулей $N_0(T)$ на промежутке $(0, T]$ функции $f(1/2 + it)$ по порядку не меньше, чем T, а для всякой другой вертикальной прямой на комплексной плоскости соответствующее количество по порядку не превосходит T. Они доказали также, что количество нулей $f(s)$ в полуполосе $\Re s \geq 1, 0 \leq t \leq T$, по порядку не меньше, чем T.

Далее С. М. Воронин [10, 12, 13] обнаружил, что прямая $\sigma = \Re s = 1/2$ является критической для функции $f(s)$ в том смысле, что она содержит аномально много нулей. Точнее, он доказал, что $N_0(T) \gg T \exp{(0,05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T})}$. А. А. Карацуба заметил, что любая линейная комбинация L-функций имеет множитель, представимый в виде эйлеровского произведения. Развивая метод А. Сельберга для дзета-функции Римана, А. А. Карацуба доказал, что $N_0(T) > T(\ln T)^{0,5-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$. Тем самым он существенно усилил результат С. М. Воронина.

В 1971 г. А. А. Карацуба [22] установил связь современной оценки модуля дзета-функции Римана в окрестности единичной прямой с оценкой остаточного члена в многомерной проблеме делителей Дирихле. Пусть при $x \geq 1$ символ $T_k(x)$ обозначает количество решений неравенства $n_1 \ldots n_k \leq x$ в натуральных числах $n_1, \ldots, n_k$. Пусть, также, при некоторых постоянных $a > 1$ и $B > 0$ таких, что для любых $|t| \geq 2$ и $0,5 \leq \sigma \leq 1$ имеет место оценка

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq B|t|^{a(1-\sigma)^{3/2}} \ln |t|.$$

Тогда при некотором $c > 0$ и при $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$T_k(x) = xP_{k-1}(\ln x) + R_k(x), \quad R_k(x) \leq x^{\alpha(k)}(c \ln x)^k, \; \alpha(k) = 1 - 0,5(2ak)^{-2/3},$$

где $P_{k-1}(u)$ — многочлен степени $k-1$ от переменной u, коэффициенты которого зависят от k и могут быть найдены явно. Ранее Х.-Э. Рихерт [57] получил подобную оценку остатка без явного вычисления постоянных.

А. А. Карацуба [46, 47] ввел в рассмотрение и исследовал следующие две функции

$$F(T; H) = \max_{|t-T| \leq H} |\zeta(1/2 + it)|, \quad G(s_0; \Delta) = \max_{|s-s_0| \leq \Delta} |\zeta(s)|.$$

Он нашел нижние оценки этих функций, то есть показал насколько большие значения может принимать модуль дзета-функции Римана на коротких отрезках критической прямой или в малых окрестностях точек, лежащих в критической полосе. В частности, пусть $T > 0$ — достаточно большое число, $0 < H \ll \ln lnT$, $s_0 = \sigma_0 + iT$, $1/2 \leq \sigma_0 \leq 1$, $0 < \Delta < 1/3$. Тогда найдутся положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $F(T; H) \geq T^{-c_1}$, $G(s_0; \Delta) \geq T^{-c_2}$.

Завершают второе направление исследований А. А. Карацубы его работы [40, 41], связанные с поведением функции $S(t)$. Если t не является ординатой нуля $\zeta(1/2+it)$, то $S(t)$ обозначает значение величины $\pi^{-1} \arg \zeta(1/2 + it)$, полученное непрерывным изменением вдоль звеньев ломаной, соединяющей точки 2, $2+it$, $1/2+it$, начиная со значения, равного 0. Если же t является ординатой нуля $\zeta(1/2 + it)$, то полагают $S(t) = S(t + 0)$.

А. А. Карацуба доказал теоремы о средних значениях функции $S(t)$ и ее первообразной $S_1(t) = \int\limits_0^t S(u)\, du$ на отрезках вещественной прямой. Он также получил замечательный результат о том, что при $H \geq T^{27/82+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная, на промежутке $(T, T+H]$ функция $S(t)$ меняет знак не менее, чем в $[H(\ln T)^{1/3}e^{-c\sqrt{\ln\ln T}}]$ точках. Ранее А. Сельберг доказал подобный результат для $H \geq T^{1/2+\varepsilon}$.

5. Работы А. А. Карацубы по теории характеров Дирихле

Третье направление исследований — теория характеров Дирихле, — открывается работами [17, 18]. Пусть $n \geq 1$ — натуральное число и пусть $F(x) =$

$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами, неприводимый над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Рассмотрим любой корень θ уравнения $F(\theta) = 0$ в поле разложения многочлена $F(x)$ над полем рациональных чисел и пусть $\mathbf{Q}(\theta)$ — простое расширение поля $\mathbf{Q}$ с естественным базисом $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \theta, \ldots, \theta^{n-1}$. Далее, найдется $p_0 = p_0(F)$ такое, что для всех простых чисел $p \geq p_0$ многочлен $F(x)$ неприводим по модулю p. Рассмотрим поле Галуа $GF(p^n)$ с базисом $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, и пусть χ — неглавный характер Дирихле поля $GF(p^n)$. Пусть, наконец, символ $D(X)$ обозначает множество $\bar{x} = x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n$ из поля $GF(p^n)$ с условием $0 \leq \nu_s < x_s \leq \nu_s + X$ при всех $s = 1, \ldots, n$.

В 1968 г. А. А. Карацуба доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, $p_1 = p_1(\varepsilon)$, такие, что при при всех простых $p > p_1$ и $X > p^{1/4+\varepsilon}$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{\bar{x}\in D(X)} \chi(x)\right| < (Xp^{-\delta})^n.$$

В частности, количество первообразных корней, лежащих в области $D(X)$, равно $\frac{\varphi(p^n-1)}{p^n-1}X^n(1 + O(p^{-n\delta}))$. Тем самым А. А. Карацуба существенно усилил результат Г. Дэвенпорта и Д. Д. Льюиса [54].

В 1970 г. А. А. Карацуба [19] значительно расширил область $N \geq q^{3/4+\varepsilon}$ нетривиальности оценки И. М. Виноградова сумм характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел, то есть сумм вида $\sum\limits_{p\leq N} \chi(p+k)$, где $N > 1$ — натуральное число, χ — неглавный характер Дирихле по простому модулю q, $(k, q) = 1$, p пробегает последовательность всех простых и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. Оценка А. А. Карацубы имеет вид: при $N \geq q^{1/2+\varepsilon}$ справедливо неравенство $|\sum\limits_{p\leq N} \chi(p+k)| \leq cNq^{-\varepsilon^2/1024}$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от ε.

В 1978 г. А. А. Карацуба [25, 26] впервые получил нетривиальную оценку суммы символов Лежандра от многочлена второй степени в случае, когда аргумент многочлена пробегает короткую последовательность подряд идущих простых чисел. Пусть q — достаточно большое простое число, $\left(\frac{n}{q}\right)$ — символ Лежандра целого числа n по простому модулю q. Далее, пусть, $f(x) = (x-a)(x-b)$ — многочлен второй степени с условием $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod q$ и $S_N = \sum\limits_{p\leq N} \left(\frac{f(x)}{q}\right)$. Тогда при $N > q^{3/4+\varepsilon}$ справедлива оценка $|S_N| \leq c\pi(N)q^{-\varepsilon^2/100}$, где $\pi(N)$ — количество простых чисел, не превосходящих N; $0 < \varepsilon < 1/2$ — сколь угодно малая постоянная и $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε.

В статье [24] А. А. Карацуба построил бесконечную последовательность простых чисел p и для каждого p нашел многочлены вида $ax^n + b$, $(a, p) = (b, p) = 1$, такие, что $\sum\limits_{x=1}^{p} \left(\frac{ax^n+b}{p}\right) = p$, где $n \asymp \frac{p}{\ln p}$. Этот результат показывает, что оценку

А. Вейля полных рациональных сумм с простым знаменателем нельзя сильно улучшить.

А. А. Карацуба [20, 21] нашел новый метод оценки сумм значений неглавных характеров Дирихле по модулю простого числа q на аддитивных последовательностях, т.е. на последовательностях вида $a+b$, где $a \in A$ и $b \in B$ и A, B — некоторые подмножества поля вычетов по модулю q. Ранее он доказал [17, 18], что при условиях $\|A\| > q^{\varepsilon}$, $\|B\| > q^{1/2+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная и символ $\|X\|$ обозначает количество элементов множества X, справедлива оценка

$$\left|\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\chi(a+b)\right| \le c\|A\|\cdot\|B\|q^{-\varepsilon^2/20},$$

причем $c = c(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная.

Пусть, теперь, A и B представляют собой множества простых чисел, лежащих в промежутках $(1, X]$ и $(1, Y]$ соответственно, и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. Тогда при $X \ge q^{1/4+\varepsilon}$ и $Y \ge q^{1/4+\varepsilon}$ имеем

$$\left|\sum_{p\le X}\sum_{p'\le Y}\chi(p+p')\right| \le c\pi(X)\pi(Y)q^{-c_1\varepsilon^2},$$

где символ $\pi(Z)$ обозначает количество простых чисел, не превосходящих Z, постоянная $c = c(\varepsilon) > 0$ зависит только от ε, а постоянная c_1 — абсолютная.

Привлекая соображения “тернарности задачи в мультипликативной форме”, А. А. Карацуба [20] нашел асимптотический закон распределения пар (p, p') простых чисел, удовлетворяющих сравнению $p(p'+a) \equiv l \pmod D$ по простому модулю D, где $(a, D) = (l, D) = 1$.

К этому кругу проблем принадлежат задачи о нетривиальных оценках сумм неглавных характеров Дирихле по простому модулю q “с весами”, т.е. сумм вида $\sum\limits_{n\le x}\chi(n+a)f(n)$, $(a,q)=1$ и $f(n)$ — функция натурального аргумента. В частности, для среднего значения многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ по последовательности n таких, что $(n+a)$ является квадратичным вычетом (невычетом, первообразным корнем) А. А. Карацуба [44, 45]получил асимптотические формулы на коротких промежутках суммирования.

В 2008 г. А. А. Карацуба и Е. А. Карацуба [48, 49] на основе теоретико-числовых методов нашли качественно новые эффекты в модели Джейнса – Камингса в квантовой оптике.

6. Заключение

Подводя итог научной деятельности А. А. Карацубы, можно выделить такие характерные и яркие ее черты, как комбинаторная изобретательность, основательность, аккуратность и определенная законченность результатов. Более того, в своих работах он постоянно разрешал чрезвычайно трудные арифметические вопросы. Его отличала безграничная любовь к математике и глубокая заинтересованность в развитии науки.

А. А. Карацуба был выдающимся профессором Механико-математического факультета МГУ. Как лектор, он был очень требователен к себе и тщательно готовился к любому своему выступлению с научным докладом. Многие его лекции, к счастью, опубликованы в его известном учебнике [28], а часть результатов работы его специальных семинаров обобщена в прекрасной книге [39].

Неожиданная кончина А. А. Карацубы — большая потеря для математики и для всех, кто его знал. Несомненно, он занял почетное место среди выдающихся математиков, внесших значительный вклад в развитие теории чисел.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И. Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 143–153.

2. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976. Т. 40, № 1. С. 209–220.

3. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Показатель сходимости особого интеграла проблемы Терри // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 2. С. 268–272.

4. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 5. С. 971–1003.

5. Архипов Г. И., Карацуба А. А. О локальном представлении нуля формой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 5. С. 948–961.

6. Архипов Г. И. О значении особого ряда в проблеме Гильберта – Камке // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 2. С. 265–267.

7. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987. 368 с.

8. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О математических работах профессора А. А. Карацубы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 218. С. 7–19.

9. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1947. Т. 23. 109 с.

10. Виноградов И. М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953. Т. 17. С. 285–290.

11. Воронин С. М. О нулях дзета-функций квадратичных форм // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142. С. 136–147.

12. Воронин С. М. О нулях дзета-функций квадратичных форм // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 257–258.

13. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 63–91.

14. Карацуба А. А. Решение одной задачи из теории конечных автоматов // УМН. 1960. Т. 15, № 3(93). С. 157–159.

15. Карацуба А. А., Офман Ю. П. Умножение многозначных чисел на автоматах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 293–294.

16. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 245–248.

17. Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1287–1289.

18. Карацуба А. А. Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 1. С. 20–30.

19. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 2. С. 299–321.

20. Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 4. С. 724–727.

21. Карацуба А. А. Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 759–760.

22. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 3. С. 475–483.

23. Карацуба А. А. Среднее значение модуля тригонометрической суммы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 6. С. 1203–1227.

24. Карацуба А. А. Об оценках снизу сумм характеров от многочленов // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 1. С. 67–72.

25. Карацуба А. А. Распределение значений символов Лежандра от многочленов с простыми числами // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 524–526.

26. Карацуба А. А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 2. С. 315–324.

27. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981. Т. 157. С. 49–63.

28. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М: Наука. 1983.– 240 с.

29. Карацуба А. А. О нулях $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 3. С. 569–584.

30. Карацуба А. А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 6. С. 1214–1224.

31. Карацуба А. А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 5. С. 935–947.

32. Карацуба А. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 167. С. 167–178.

33. Карацуба А. А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2+it)$ // УМН. 1985. Т. 40, № 4. С. 171–172.

34. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта – Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 303–315.

35. Karatsuba A. A. On Zeros of the Davenport – Heilbronn function // Proc. Amalfi Conf. Analytic Number Theory. 1992. P. 271–293.

36. Карацуба А. А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 2. С. 372–397.

37. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 5. С. 3–14.

38. Карацуба А. А. Аналоги сумм Клоостермана // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1995. Т. 59, № 5. С. 93–102.

39. Karatsuba A. A. Complex analysis in number theory. — Boca Raton: CRC Press, 1995, 187 pp.

40. Карацуба А. А. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Мат. заметки. 1996. т. 60, № 3. С. 448–449.

41. Карацуба А. А. О функции $S(t)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 5. С. 27–56.

42. Карацуба А. А. Аналоги неполных сумм Клоостермана и их приложения // Tatra Mountains Math. Publ., 1997. T. 11. C. 89–120.

43. Карацуба А. А. Двойные суммы Клоостермана // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 5. С. 682–687.

44. Карацуба А. А. Sums of characters with prime numbers and their applications // Tatra Mountains Math. Publ. 2000. T. 20. C. 155–162.

45. Карацуба А. А. Суммы характеров с весами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 2. С. 29–42.

46. Карацуба А. А. О нижних оценках максимума модуля $\zeta(s)$ в малых областях критической полосы // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 796–797.

47. Карацуба А. А. О нижних оценках максимума модуля дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 2. С. 372–397.

48. Karatsuba A. A., Karatsuba E. A. Application of ATS in a quantum-optical model // Analysis and Mathematical Physics: Trends in Mathematics. 2009. pp. 211–232.

49. Karatsuba A. A., Karatsuba E. A. Resummation formula for collapse and revival in Jaynes – Cummings model // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. 195304, 16.

50. Мозер Я. Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана // Acta Arith. 1976. Vol. 31. P. 45–51.

51. Мозер Я. Улучшение теоремы Харди–Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ // Acta Math. Univ. Comen. Bratislava. 1983. Vol. 42/43. P. 41–50.

52. Мозер Я. Некоторые следствия из формулы Римана – Зигеля // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 163. С. 183–186.

53. Davenport H., Heilbronn H. On Zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. Vol. 11. PP. 181–185 and pp. 307–312.

54. Davenport H., Lewis D. J. Primitive roots in finite fields // Rend. Circolo Mat. di Palermo. 1963. Vol. 12. P. 129–136.

55. Hardy G. H., Littlewood J. E. Contributions to the theory of Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes // Acta Math. 1918. Vol. 41. P. 119–196.

56. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Zs. 1921. Vol. 10. P. 283–317.

57. Richert H. E. Einführung in die Theorie der Starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Math.-Physik). 1960. P. 17–75.

58. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps–Akademi i Oslo. I. Mat.-Naturv. Klasse. 1942. Vol. 10. P. 1–59.

REFERENCES

1. Arkhipov, G. I. 1975, "A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum" , *Mat. Zametki*, vol. 17, no. 1, pp. 143–153. (Russian)

2. Arkhipov, G. I. & Chubarikov, V. N. 1976, "Multiple trigonometric sums" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 40, no. 1, pp. 209–220, 223. (Russian)

3. Arhipov, G. I., Karacuba, A. A. & Chubarikov, V. N. 1979, "Exponent of convergence of the singular integral in the Terry problem" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 248, no. 2, pp. 268–272. (Russian)

4. Arhipov, G. I., Karacuba, A. A. & Chubarikov, V. N. 1979, "Trigonometric integrals" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 43, no. 5, pp. 971–1003, 1197. (Russian)

5. Arkhipov, G. I. & Karatsuba, A. A. 1982 "On local representation of zero by a form" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 45, no. 5, pp. 948–961. (Russian)

6. Arkhipov, G. I. 1981, "The values of a singular series in a Hilbert-Kamke problem" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 259, no. 2, pp. 265–267. (Russian)

7. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A. & Chubarikov, V. N. 1987, "Teoriya kratnykh trigonometricheskikh summ" , [Theory of multiple trigonometric sums] *Nauka, Moscow*, 368 pp. . (Russian)

8. Arkhipov, G. I. & Chubarikov, V. N. 1997, "On the mathematical papers of Professor A. A. Karatsuba" , *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 218, pp. 1-–14.

9. Vinogradov, I. M. 1947, "The method of trigonometrical sums in the theory of numbers" , *Trav. Inst. Math. Stekloff*, vol. 23, 109 pp. (Russian)

10. Vinogradov, I. M. 1953, "Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$" , *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 17, pp. 285—290. (Russian)

11. Voronin, S. M. 1976, "The zeros of zeta-functions of quadratic forms" , *Number theory, mathematical analysis and their applications. Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 142, pp. 135–147, 269. (Russian)

12. Voronin, S. M. 1977, "The zeros of zeta-functions of quadratic forms" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 235, no. 2, pp. 257–258. (Russian)

13. Voronin, S. M. 1980, "Zeros of some Dirichlet series lying on the critical line" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 44, no. 1, pp. 63–91, 238. (Russian)

14. Karatsuba, A. A. 1960, "Solution to a problem in the theory of finite automatons" , *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 15, no. 3 (93), pp. 157–159. (Russian)

15. Karatsuba, A. A. & Ofman, Yu. P. 1962, "Multiplication of Many-Digital Numbers by Automatic Computers" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 145, № 2, pp. 293–294. (Russian)

16. Karatsuba, A. A. & Korobov, N. M. 1963, "A mean-value theorem" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 149, № 2, pp. 245–248. (Russian)

17. Karatsuba, A. A. 1968, "Sums of characters, and primitive roots, in finite fields" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 180, № 6, pp. 1287–1289. (Russian)

18. Karatsuba, A. A. 1970, "Estimates of character sums" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 34, № 1, pp. 20–30. (Russian)

19. Karatsuba, A. A. 1970, "Sums of characters with prime numbers" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 34, № 2, pp. 299–321. (Russian)

20. Karatsuba, A. A. 1970, "The distribution of products of shifted prime numbers in arithmetic progressions" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 192, № 4, pp. 724–727. (Russian)

21. Karatsuba, A. A. 1971, "Distribution of power residues and non-residues in additive squences" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 196, № 4, pp. 759–760. (Russian)

22. Karatsuba, A. A. 1972, "A uniform estimate for the remainder term in Dirichlet's problem of divisors" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 36, № 3, pp. 475–483. (Russian)

23. Karatsuba, A. A. 1973, "Mean value of the modulus of a trigonometric sum" , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 37, № 6, pp. 1203–1227. (Russian)

24. Karatsuba, A. A. 1973, "Lower bounds for sums of the characters of polynomials" , *Mat. Zametki*, vol. 14, № 1, pp. 67–72. (Russian)

25. Karatsuba, A. A. 1978, "Distribution of the values of Legendre symbols in polynomials with prime numbers", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 238, no. 3, pp. 524–526. (Russian)

26. Karatsuba, A. A. 1978, "Sums of Legendre symbols of quadratic polynomials with prime numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 42, no. 2, pp. 315—324, 470. (Russian)

27. Karatsuba, A. A. 1981, "On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line", *Number theory, mathematical analysis and their applications. Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 157, pp. 49–63, 235. (Russian)

28. Karatsuba, A. A. 1983, "Osnovy analiticheskoi teorii chisel", [Principles of analytic number theory] Second edition. *Nauka, Moscow*, 240 pp. (Russian)

29. Karatsuba, A. A. 1984, "Zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 48, no. 3, pp. 569–584. (Russian)

30. Karatsuba, A. A. 1984, "Distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 48, no. 6, pp. 1214–1224. (Russian)

31. Karatsuba, A. A. 1985, "The function G(n) in Waring's problem", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 49, no. 5, pp. 935–947, 1119. (Russian)

32. Karatsuba, A. A. 1985, "Zeros of the Riemann zeta function on the critical line", *Current problems in mathematics. Mathematical analysis, algebra, topology. Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 167, pp. 167–178, 277. (Russian)

33. Karatsuba, A. A. 1985, "Real zeros of the function $\zeta(1/2+it)$", *Uspekhi Mat. Nauk* vol. 40, no. 4(244), pp. 171–172. (Russian)

34. Karatsuba, A. A. 1990, "On zeros of the Davenport-Heilbronn function lying on the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 54, no. 2, pp. 303–315. (Russian)

35. Karatsuba A. A. 1992 "On Zeros of the Davenport – Heilbronn function", *Proc. Amalfi Conf. Analytic Number Theory*, pp. 271–293.

36. Karatsuba, A. A. 1992, "On the number of zeros of the Riemann zeta function lying on almost all short intervals of the critical line", *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 56, no. 2, pp. 372–397. (Russian)

37. Karatsuba, A. A. 1993, "On zeros of arithmetic Dirichlet series without an Euler product", *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 57, no. 5, pp. 3–14. (Russian)

38. Karatsuba, A. A. 1995, "Analogues of Kloosterman sums" , *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 59, no. 5, pp. 93–102. (Russian)

39. Karatsuba A. A. 1995, "Complex analysis in number theory" , *Boca Raton: CRC Press*, 187 pp.

40. Karatsuba, A. A. 1996, "A density theorem and the behavior of the argument of the Riemann zeta function" , *Mat. Zametki*, vol. 60, no. 3, pp. 448–449. (Russian)

41. Karatsuba, A. A. 1996, "On the function S(t)" , *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 60, no. 5, pp. 27–56. (Russian)

42. Karatsuba, A. A. 1997, "Analogues of incomplete Kloosterman sums and their applications" , *Tatra Mountains Math. Publ.*, vol. 11, pp. 89–120.

43. Karatsuba, A. A. 1999, "Double Kloosterman sums" , *Mat. Zametki*, vol. 66, no. 5, pp. 682–687. (Russian)

44. Karatsuba, A. A. 2000, "Sums of characters with prime numbers and their applications" , *Tatra Mountains Math. Publ.*, vol. 20, pp. 155–162.

45. Karatsuba, A. A. 2000, "Character sums with weights" , *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 64, no. 2, pp. 29–42. (Russian)

46. Karatsuba, A. A. 2001, "Lower bounds for the maximum modulus of $\zeta(s)$ in small domains of the critical strip" , *Mat. Zametki*, vol. 70, no. 5, pp. 796–797. (Russian)

47. Karatsuba, A. A. 2004, "On lower bounds for the maximum modulus of the Riemann zeta function on short intervals of the critical line" , *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 68, no. 6, pp. 99–104. (Russian)

48. Karatsuba, A. A. & Karatsuba, E. A. 2009, "Application of ATS in a quantum-optical model" , *Analysis and Mathematical Physics: Trends in Mathematics*, pp. 211–232.

49. Karatsuba, A. A. & Karatsuba, E. A. 2009, "Resummation formula for collapse and revival in Jaynes – Cummings model" , *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 42, 195304, 16.

50. Mozer, Jan 1976, "A certain Hardy-Littlewood theorem in the theory of the Riemann zeta-function" , *Acta Arith.*, vol. 31, no. 1, pp. 45–51. (Russian)

51. Mozer, Yan 1983, "Sharpening of the Hardy-Littlewood theorem on the density of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$" , *Acta Math. Univ. Comenian*, vol. 42/43, pp. 41—50. (Russian)

52. Mozer, Ya. 1984, "Some corollaries of the Riemann-Siegel formula", *International conference on analytical methods in number theory and analysis (Moscow, 1981). Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 163, pp. 183–186. (Russian)

53. Davenport H. & Heilbronn H. 1936, "On Zeros of certain Dirichlet series", *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 11, pp. 181–185 and pp. 307–312.

54. Davenport H. & Lewis D. J. 1963, "Primitive roots in finite fields", *Rend. Circolo Mat. di Palermo*, vol. 12, pp. 129–136.

55. Hardy G. H. & Littlewood J. E. 1918, "Contributions to the theory of Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes", *Acta Math.*, vol. 41, pp. 119–196.

56. Hardy G. H. & Littlewood J. E. 1921, "The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line", *Math. Zs.*, vol. 10, pp. 283–317.

57. Richert H. E. 1960, "Einführung in die Theorie der Starken Rieszschen Summierbarkeit von Dirichletreihen", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (Math.-Physik)*, pp. 17–75.

58. Selberg A. 1942, "On the zeros of Riemann's zeta-function", *Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps–Akademi i Oslo. I. Mat.-Naturv. Klasse*, vol. 10, pp. 1–59.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 31.01.2010 г.