ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 512.572 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-143-159

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА–ПУАССОНА

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко (г. Ульяновск)

Аннотация

В работе приведен обзор недавних результатов о многообразиях алгебр Лейбница–Пуассона, которые являются обобщениями алгебр Пуассона. Показано, что рост любого многообразия алгебр Лейбница–Пуассона над произвольным полем либо ограничен полиномом, либо не ниже экспоненциального с показателем 2. Показана конечная базируемость многообразий алгебр Лейбница–Пуассона полиномиального роста в случае основного поля нулевой характеристики. Приводится многообразие алгебр Лейбница–Пуассона почти полиномиального роста. В случае основного поля нулевой характеристики приводятся эквивалентные условия полиномиальности роста для многообразий алгебр Лейбница–Пуассона. Показаны все многообразия алгебр Лейбница–Пуассона почти полиномиального роста в одном классе многообразий. Исследуются многообразия алгебр Лейбница–Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождество $\{x,y\}\cdot\{z,t\}=0$, исследуется взаимосвязь таких многообразий с многообразиями алгебр Лейбница. Показано, что из любой алгебры Лейбница можно построить алгебру Лейбница–Пуассона с похожими свойствами исходной алгебры. Показано, что если идеал тождеств многообразия алгебр Лейбница–Пуассона $\mathbf{V}$ не содержит ни одного тождества из свободной алгебры Лейбница, то рост многообразия $\mathbf{V}$ является сверхэкспоненциальным. Приводится многообразие алгебр Лейбница–Пуассона почти экспоненциального роста. Пусть $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ — последовательность собственных коразмерностей многообразия алгебр Лейбница–Пуассона $\mathbf{V}$. Приводится класс минимальных многообразий алгебр Лейбница–Пуассона полиномиального роста последовательности $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$, т.е. последовательность $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ любого такого многообразия $\mathbf{V}$ растет как полином некоторой степени k, но последовательность $\{\gamma_n(\mathbf{W})\}_{n\geq 1}$ любого собственного подмногообразия $\mathbf{W}$ многообразия $\mathbf{V}$ растет как полином строго меньшей степени, чем k.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Лейбница, алгебра Лейбница–Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Библиография: 31 названий.

NUMERICAL CHARACTERISTICS OF LEIBNIZ–POISSON ALGEBRAS

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko (Ulyanovsk)

Abstract

The paper is survey of recent results of investigations on varieties of Leibniz-Poisson algebras. We show that a variety of Leibniz-Poisson algebras has either polynomial growth or growth with exponential not less than 2, the field being arbitrary. We show that every variety of Leibniz-Poisson algebras of polynomial growth over a field of characteristic zero has a finite basis for its polynomial identities. We construct a variety of Leibniz-Poisson algebras with almost polynomial growth. We give equivalent conditions of the polynomial codimension growth of a variety of Leibniz-Poisson algebras over a field of characteristic zero. We show all varieties of Leibniz-Poisson algebras with almost polynomial growth in one class of varieties. We study varieties of Leibniz-Poisson algebras, whose ideals of identities contain the identity $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$, we study an interrelation between such varieties and varieties of Leibniz algebras. We show that from any Leibniz algebra L one can construct the Leibniz-Poisson algebra A and the properties of L are close to the properties of A. We show that if the ideal of identities of a Leibniz-Poisson variety $\mathbf{V}$ does not contain any Leibniz polynomial identity then $\mathbf{V}$ has overexponential growth of the codimensions. We construct a variety of Leibniz-Poisson algebras with almost exponential growth. Let $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ be the sequence of proper codimension growth of a variety of Leibniz-Poisson algebras $\mathbf{V}$. We give one class of minimal varieties of Leibniz-Poisson algebras of polynomial growth of the sequence $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$, i.e. the sequence of proper codimensions of any such variety grows as a polynomial of some degree k, but the sequence of proper codimensions of any proper subvariety grows as a polynomial of degree strictly less than k.

Keywords: Poisson algebra, Leibniz algebra Leibniz–Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

Bibliography: 31 titles.

Введение

На протяжении всей работы, если это специально не оговорено, основное поле K считается произвольным.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница–Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b,$$

$$\{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. При этом алгебра Лейбница $A(+, \{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Заметим, что если в алгебре Лейбница выполнено тождество $\{x, x\} = 0$, то она будет являться алгеброй Ли, поэтому если данное тождество выполнено в алгебре Лейбница–Пуассона, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры Лейбница–Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т. д.

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке:

$$\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}.$$

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Лейбница, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница–Пуассона. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а через P_n^L пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Лейбница $L(X)$.

Лемма 1 ([1]). *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \tag{1}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) $r \geq 0$, $k_1 < \ldots < k_r$;

(ii) *каждая из переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *встречается в* (1) *ровно один раз;*

(iii) *каждый множитель* $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}, \ldots, \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}$ *в* (1) *левонормирован и имеет длину* ≥ 2;

(iv) *множители в* (1) *упорядочены по длине:* $s \leq \ldots \leq t$;

(v) *если два соседних множителя в* (1), *являющиеся скобками* $\{,\}$, *имеют одинаковую длину*

$$\ldots \cdot \{x_{p_1}, \ldots, x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, \ldots, x_{q_s}\} \cdot \ldots,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \ldots, \ t \geq 2.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница–Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [2–4]). Пусть $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad c_n(\mathbf{V}) = \dim\ P_n(\mathbf{V}),$$

$$\Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim\ \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

1. Рост многообразий

Хорошо известно, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств произвольного многообразия $\mathbf{V}$ порождается совокупностью полилинейных тождеств данного многообразия. Поэтому одной из важных числовых характеристик многообразия $\mathbf{V}$ является последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$, которая называется *последовательностью коразмерностей* многообразия $\mathbf{V}$. Асимптотическое поведение данной последовательности называют *ростом многообразия* $\mathbf{V}$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *полиномиальный рост*, если существуют такие константы C и k, что для любого n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) \leqslant Cn^k$. Аналогично вводится понятие *экспоненциального роста*: для любого n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) \leq Ca^n$, где C и a — некоторые константы. Если многообразие $\mathbf{V}$ имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижние и верхние экспоненты соответствующих последовательностей $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ и $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$:

$$\underline{Exp}(\mathbf{V}) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \qquad \overline{Exp}(\mathbf{V}) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

$$\underline{Exp^{\Gamma}}(\mathbf{V}) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n(\mathbf{V})}, \qquad \overline{Exp^{\Gamma}}(\mathbf{V}) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n(\mathbf{V})}.$$

Если $\underline{Exp}(\mathbf{V}) = \overline{Exp}(\mathbf{V})$, то обозначим $Exp(\mathbf{V}) = \underline{Exp}(\mathbf{V})$. Аналогично и с $Exp^{\Gamma}(\mathbf{V})$.

В случае многообразий ассоциативных алгебр хорошо известен следующий результат А. Регева [5]: *многообразие ассоциативных алгебр* $\mathbf{V}$, *в котором выполнено нетривиальное тождество степени* m, *удовлетворяет неравенству* $c_n(\mathbf{V}) \leqslant (m-1)^{2n}$ *для любого* n. В случае основного поля нулевой характеристики М.В. Зайцев и А. Джамбруно [6] доказали гипотезу С.А. Амицура о существовании и целочисленности экспоненты произвольного многообразия ассоциативных алгебр.

В теории ассоциативных алгебр очень важную роль играет бесконечно порожденная алгебра Грассмана Λ и алгебра верхнетреугольных матриц порядка 2, которую обозначим через

UT_2. Из работы А. Р. Кемера [7] следует, что в случае основного поля нулевой характеристики многообразие ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда $\Lambda \notin \mathbf{V}$, $UT_2 \notin \mathbf{V}$. Из этого результата следует, что существуют только два многообразия ассоциативных алгебр почти полиномиального роста: $var(\Lambda)$, $var(UT_2)$. Также из данного результата следует, что при $char\ K = 0$ произвольное многообразие ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$ либо имеет полиномиальный рост, либо $c_n(\mathbf{V}) \geq 2^{n-1}$ для любого n. В случае ассоциативных алгебр с единицей В. Дренски и А. Регев в работе [8] показали, что это свойство распространяется на случай произвольного поля: *для любого нетривиального многообразия ассоциативных алгебр с единицей над произвольным полем либо*

(i) $c_n(\mathbf{V}) \geq 2^{n-1}$ для любого n,

либо

(ii) найдется такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что для всех достаточно больших n будет выполнено равенство $c_n(\mathbf{V}) = f(n)$.

В отличие от ассоциативных алгебр существуют многообразия алгебр Ли, в которых выполняются нетривиальные тождества, со сверхэкспоненциальным ростом (т. е. сверху не ограничиваются никакой экспонентой). Одним из хорошо изученных примеров таких многообразий является многообразие алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$, определяемое тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ (см. [9]). Для элементов последовательности $\{c_n(\mathbf{AN}_2)\}_{n\geq 1}$ выполняется такое равенство ([10]):

$$c_n(\mathbf{AN}_2) = \sqrt{n!}(1 + o(1))^n,$$

при этом рост произвольного собственного подмногообразия в $\mathbf{AN}_2$ ограничен экспоненциальной функцией [9].

Алгебры Лейбница–Пуассона наследуют ряд свойств как ассоциативных алгебр, так и алгебр Ли. И в то же время данные алгебры обладают уникальными свойствами.

Лемма 2 ([1]). *Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница–Пуассона и пусть элементы*

$$u_s^n(x_1, \ldots, x_n), \ s = 1, \ldots, \gamma_n(\mathbf{V}),$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(\mathbf{V})$, $n \geq 0$. Тогда

(i) полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$ вида

$$\begin{gathered} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \\ k = 0, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, \gamma_k(\mathbf{V}), \quad i_1 < \ldots < i_{n-k}, \quad j_1 < \ldots < j_k, \end{gathered}$$

будут образовывать базис пространства $P_n(\mathbf{V})$;

(ii) коразмерности многообразия $\mathbf{V}$ вычисляются по следующей формуле:

$$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \gamma_k(\mathbf{V}),$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Из леммы 2 следует, что если для многообразия алгебр Лейбница–Пуассона $\mathbf{V}$ существует одна из экспонент $Exp(\mathbf{V})$ или $Exp^{\Gamma}(\mathbf{V})$, то будет существовать и другая, причем $Exp(\mathbf{V}) = Exp^{\Gamma}(\mathbf{V}) + 1$.

Обозначим через B линейную оболочку элементов (не обязательно полилинейных) свободной алгебры Лейбница–Пуассона $F(X)$ вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \ldots, t \geq 2.$$

Лемма 3 ([1]). *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Лейбница–Пуассона над бесконечным полем* K. *Тогда идеал тождеств* $Id(\mathbf{V})$ *порождается элементами из множества тождеств* $B \cap Id(\mathbf{V})$. *Если* $char\ K = 0$, *то* $Id(\mathbf{V})$ *порождается системой полилинейных тождеств из множества*

$$\bigcup_{n\geq 1}(\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})).$$

Теорема 1 ([1]). *Для многообразия алгебр Лейбница–Пуассона* $\mathbf{V}$ *над произвольным полем следующие условия эквивалентны:*

(i) *последовательность* $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ *ограничена полиномом;*

(ii) *для некоторого* $m \geq 2$ *в* $\mathbf{V}$ *выполнены полилинейные тождества*

$$\{x_1, \ldots, x_m\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0;$$

(iii) *найдется такое число* N, *что для любого* $n > N$ *выполнено равенство* $\gamma_n(\mathbf{V}) = 0$;

(iv) *найдется такое число* N, *что для любого* $n \geq N$ *будет выполнено равенство*

$$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k(\mathbf{V}).$$

Теорема 2 ([1]). *Пусть* $\mathbf{V}$ — *нетривиальное многообразие алгебр Лейбница–Пуассона над произвольным полем. Тогда либо*

(i) $c_n(\mathbf{V}) \geq 2^{n-1}$ *для любого* n,

либо

(ii) *найдется такой многочлен* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, *что для всех достаточно больших* n *будет выполнено равенство* $c_n(\mathbf{V}) = f(n)$.

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подпространство свободной алгебры Лейбница $L(X)$, которое является линейной оболочкой элементов вида $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}]$, $s \geq 2$. Также обозначим через $PL_{\geq 2}(X)$ подпространство свободной алгебры Лейбница–Пуассона $F(X)$, являющееся линейной оболочкой элементов вида $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$, $s \geq 2$. Так как алгебры Лейбница $L_{\geq 2}(X)$ и $PL_{\geq 2}(X)$ равны с точностью до изоморфизма алгебр Лейбница, то далее везде будет фигурировать алгебра Лейбница $L_{\geq 2}(X)$.

В следующей лемме рассмотрим конструкции алгебр Лейбница–Пуассона на основе алгебр Лейбница, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 4 ([1]). *Пусть* A_L — *некоторая ненулевая алгебра Лейбница с умножением* $[,]$ *над бесконечным полем* K. *Рассмотрим векторное пространство*

$$A = A_L \oplus K,$$

в котором определим операции $\cdot$ *и* $\{,\}$ *следующим образом:*

$$\begin{gathered}(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta, \\ \{a+\alpha, b+\beta\} = [a,b], \quad a,b \in A_L, \quad \alpha,\beta \in K.\end{gathered} \tag{2}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ *будет являться алгеброй Лейбница–Пуассона, причем будут выполнены следующие условия:*

(i) $Id(A_L) = Id(A) \cap L_{\geq 2}(X)$ *и в алгебре* A *выполнено тождество* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$;

(ii) $\Gamma_n(A) = P_n^L(A) = P_n^L(A_L)$ *для любого* $n \geq 2$, *где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств;*

(iii) *для любого* n *выполнено равенство*

$$c_n(A) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim\ P_k^L(A_L).$$

Рассмотрим двумерную алгебру Лейбница L_2 над полем K с базисом a, b и таблицей умножения $[a,b]=a$, $[a,a]=[b,b]=[b,a]=0$. Обозначим через A_2 алгебру Лейбница–Пуассона $L_2\oplus K$, построенную с помощью леммы 4.

Теорема 3 ([1]). *Для алгебры Лейбница–Пуассона A_2 в случае основного поля нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

1) *полилинейные тождества*

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0,\quad \{x_1,\{x_2,x_3\}\}=0$$

порождают идеал тождеств алгебры A_2;

2) *полилинейные элементы*

$$\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n}\},\quad i_2<\ldots<i_n,$$

от переменных $x_1,\ldots,\ x_n$ образуют базис пространства $\Gamma_n(A_2)$;

3) *полилинейные элементы*

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_s}\}\cdot x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_t},$$

$$s+t=n,\quad 0\le s\le n,\quad s\ne 1,\quad i_2<\ldots<i_s,\quad j_1<\ldots<j_t,$$

от переменных $x_1,\ldots,\ x_n$ образуют базис пространства $P_n(A_2)$;

4) *рост многообразия $var(A_2)$, порожденного алгеброй A_2, является почти полиномиальным, причем для любого натурального n выполнено равенство*

$$c_n(A_2)=n\cdot 2^{n-1}-n+1.$$

Пусть, как и ранее, UT_2 — алгебра верхнетреугольных матриц порядка два, $[UT_2]$ — алгебра Ли относительно операции коммутирования. Обозначим через U_2 алгебру Пуассона $[UT_2]\oplus K$ с операциями

$$(x+\alpha)\cdot(y+\beta)=(\beta x+\alpha y)+\alpha\beta,$$
$$\{x+\alpha,y+\beta\}=[x,y],\quad x,y\in[UT_2],\quad \alpha,\beta\in K.$$

Теорема 4 ([11]). *Для алгебры Пуассона U_2 в случае основного поля нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

1) *полилинейные тождества*

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0,\quad \{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\}=0$$

порождают идеал тождеств алгебры Пуассона U_2;

2) *для любого $n\ge 2$ полилинейные элементы от переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$*

$$\{x_{i_1},x_{i_2}\ldots,x_{i_n}\},\quad i_1>i_2<\ldots<i_n,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(U_2)$;

3) *полилинейные элементы от переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$*

$$\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_s}\}\cdot x_{j_1}\cdot x_{j_2}\cdot\ldots\cdot x_{j_t},$$

$$s+t=n,\quad 0\le s\le n,\quad s\ne 1,\quad i_1>i_2<\ldots<i_s,\quad j_1<\ldots<j_t,$$

образуют базис пространства $P_n(U_2)$;

4) *рост многообразия $var(U_2)$, порожденного алгеброй U_2, является почти полиномиальным, причем для любого $n\ge 2$ выполнено равенство $c_n(U_2)=2^{n-1}(n-2)+2$;*

Пространство $P_n(\mathbf{V})$ наделено структурой левого S_n-модуля, где S_n — симметрическая группа степени n. Напомним, что последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ называют *разбиением числа* n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0$. Пусть χ_λ — характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n. Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(\mathbf{V})$ в случае поля нулевой характеристики для многообразия $\mathbf{V}$ имеет место разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi_n(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda, \tag{3}$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n.

Обозначим через $\mathbf{W}_s$ многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, порожденное полилинейным тождеством

$$\{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_s, y_s\} = 0.$$

Теорема 5 ([12]). *В случае основного поля нулевой характеристики для многообразия алгебр Лейбница–Пуассона* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *последовательность* $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ *ограничена полиномом;*

(*ii*) $A_2 \notin \mathbf{V}$, $U_2 \notin \mathbf{V}$ *и для некоторого* $s \geq 2$ *выполнено включение* $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}_s$*;*

(*iii*) *существует такая константа* C, *что в сумме* (3) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - \lambda_1 > C$.

Пусть $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, определенное тождеством

$$[[x_1, x_2], \ldots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]] = 0.$$

В работе [13] построена серия подмногообразий в $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$, каждое из которых имеет полиномиальный рост и является минимальным по отношению к старшему коэффициенту полинома. В работах [14, 15] В.М. Петроградский, используя разработанный им так называемый *метод ожерелий*, доказал, что в случае произвольного поля экспоненты всех подмногообразий в $var(UT_s)$, а также подмногообразий в $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ существуют и являются целыми числами. В работах [16–19], в частности, усилены оценки роста данных многообразий и приведены эквивалентные условия для значений экспонент. В следующих двух теоремах приведены аналогичные результаты для алгебр Лейбница–Пуассона.

Теорема 6 ([20]). *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Лейбница–Пуассона над произвольным полем, идеал тождеств которого содержит полилинейные тождества*

$$\{\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_m, y_m\}\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0 \tag{4}$$

для некоторого числа m. *Тогда существуют такие константы* N, α, β *и такое целое число* d, *причем* $d \in \{1, 2, \ldots, s\}$, *что для любого* $n \geqslant N$ *будет выполнено следующее двойное неравенство:*

$$n^\alpha d^n \leqslant c_n(\mathbf{V}) \leqslant n^\beta d^n.$$

После выяснения того факта, чем аппроксимируется последовательность коразмерностей произвольного многообразия алгебр Лейбница–Пуассона, идеал тождеств которого содержит полилинейные тождества вида (4), закономерно возникает вопрос, с помощью каких условий (критериев) искать значения экспонент d, фигурируемых в теореме 6. Следующая теорема в какой-то степени дает ответ на поставленный вопрос.

Теорема 7 ([21]). *Пусть* $\mathbf{V}$ *— многообразие алгебр Лейбница–Пуассона над полем нулевой характеристики, идеал тождеств которого содержит тождества вида* (4) *для некоторого* m. *Также пусть* d *— некоторое неотрицательное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $Exp(\mathbf{V}) \leq d$*;*

(ii) $Exp^{\Gamma}(\mathbf{V}) \leq d-1$*;*

(iii) *найдется некоторый набор чисел* $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_d$, *в котором содержится хотя бы один ненулевой элемент, что для некоторого целого числа* $m \geq 0$ *в многообразии* $\mathbf{V}$ *выполнены все тождества вида*

$$\sum_{\sigma_m \in S_d} \dots \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_m} \dots \alpha_{\sigma_1} \dots \{y_1, y_2, x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_2(1)}, \dots, x_{\sigma_m(1)}\} \dots$$

$$\dots \{y_2, y_3, x_{\sigma_1(2)}, x_{\sigma_2(2)}, \dots, x_{\sigma_m(2)}\} \dots \{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{\sigma_1(d)}, x_{\sigma_2(d)}, \dots, x_{\sigma_m(d)}\} = 0,$$

где вместо многоточий, находящихся вне элементов

$$\{y_1, y_2, \dots\}, \dots, \{y_{2d-1}, y_{2d}, \dots\},$$

каким-либо образом расставлены скобки $\{,\}$ *и умножения* $\cdot$*;*

(iv) *найдется такое целое* $p \geq 0$, *что в многообразии* $\mathbf{V}$ *выполнены все полилинейные тождества вида*

$$\sum_{\sigma_m \in S_d} \dots \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_m} \dots \alpha_{\sigma_1} \dots \{y_1, y_2, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, \dots, x_{m\sigma_m(1)}\} \dots$$

$$\dots \{y_2, y_3, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, \dots, x_{m\sigma_m(2)}\} \dots$$

$$\dots \{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, \dots, x_{m\sigma_m(d)}\} = 0,$$

где вместо многоточий, находящихся вне элементов

$$\{y_1, y_2, \dots\}, \dots, \{y_{2d-1}, y_{2d}, \dots\},$$

каким-либо образом расставлены скобки $\{,\}$ *и умножения* $\cdot$*;*

(v) *существует такая константа* C, *что в сумме* (3) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) > C$.

2. Алгебры Лейбница–Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$

В данном параграфе исследуются многообразия алгебр Лейбница–Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. Исследуется взаимосвязь таких многообразий с многообразиями алгебр Лейбница. Будет показано, что из любой алгебры Лейбница можно построить алгебру Лейбница–Пуассона с похожими свойствами исходной алгебры.

Обозначим через $Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ идеал тождеств в свободной алгебре Лейбница–Пуассона $F(X)$, порожденный элементом $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$.

Теорема 8 ([22]). *Пусть* $\mathbf{V}_L$ *— некоторое многообразие алгебр Лейбница над бесконечным полем* K, *определенное системой тождеств*

$$\{f_i = 0 \,|\, i \in I,\ f_i \in L_{\geq 2}(X)\}.$$

Пусть также имеется совокупность элементов $g_j \in Id(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$, $j \in J$, $|J| > 0$. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, определенное тождествами*

$$\{f_i = 0,\, g_j = 0 \,|\, i \in I,\, j \in J\}.$$

Тогда будут верны следующие условия:

(*i*) $Id(\mathbf{V}_L) = Id(\mathbf{V}) \cap L_{\geq 2}(X)$;

(*ii*) $P_n^L(\mathbf{V}) = P_n^L(\mathbf{V}_L)$;

(*iii*) $c_n(\mathbf{V}) \geq 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim\ P_k^L(\mathbf{V}_L)$;

(*iv*) *если* $|I| = 0$, *то* $c_n(\mathbf{V}) \geq [n! \cdot e] - n$, *где* $e = 2.71\ldots$, $[\ ]$ — *целая часть числа.*

Теорема 9 ([22]). *Пусть* $\mathbf{V}_L$ — *некоторое многообразие алгебр Лейбница над бесконечным полем* K, *определенное системой тождеств*

$$\{f_i = 0 \,|\, i \in I,\, f_i \in L_{\geq 2}(X)\}.$$

Пусть также $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, определенное тождествами* $f_i = 0$, $i \in I$, *и* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. *Тогда будут верны следующие утверждения.*

1) $\Gamma_n(\mathbf{V}) = P_n^L(\mathbf{V}) = P_n^L(\mathbf{V}_L)$ *для любого* $n \geq 2$, *где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств.*

2) *Пусть элементы*

$$u_s^n(x_1, \ldots, x_n),\ s = 1, \ldots, \dim\ P_n^L(\mathbf{V}_L),$$

образуют базис пространства $P_n^L(\mathbf{V}_L)$, $n \geq 2$. *Тогда полилинейные элементы*

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$
$$x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}),$$

$k = 2, \ldots, n,\quad s = 1, \ldots, \dim\ P_k^L(\mathbf{V}_L),\quad i_1 < \ldots < i_{n-k},\quad j_1 < \ldots < j_k$, *будут образовывать базис пространства* $P_n(\mathbf{V})$;

3) *Для любого* n *выполнено равенство*

$$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim\ P_k^L(\mathbf{V}_L).$$

4) *Если существует* $Exp(\mathbf{V}_L)$, *то* $Exp(\mathbf{V}) = Exp(\mathbf{V}_L) + 1$, *более точно, если найдутся такие действительные числа* $d \geq 0$, α *и* β, *что для всех достаточно больших* n *выполнено двойное неравенство*

$$n^\alpha d^n \leq \dim\ P_n^L(\mathbf{V}_L) \leq n^\beta d^n,$$

то найдутся такие γ *и* δ, *что для всех достаточно больших* n *будет выполнено такое двойное неравенство:*

$$n^\gamma (d+1)^n \leq c_n(\mathbf{V}) \leq n^\delta (d+1)^n.$$

5) *Если некоторая алгебра Лейбница* A_L *порождает многообразие* $\mathbf{V}_L$, *то алгебра* $A = A_L \oplus K$, *построенная с помощью леммы 4, будет порождать многообразие* $\mathbf{V}$.

6) *Если* $|I| < +\infty$ *и многообразие* $\mathbf{V}_L$ *является шпехтовым, то многообразие* $\mathbf{V}$ *также будет являться шпехтовым.*

7) *Пусть* $\mathbf{W}$ — *некоторое собственное подмногообразие в* $\mathbf{V}$. *Тогда идеал тождеств* $Id(\mathbf{W}) \cap L_{\geq 2}(X)$ *определяет некоторое собственное подмногообразие в* $\mathbf{V}_L$.

8) *Многообразие* $\mathbf{V}_L$ *нильпотентно тогда и только тогда, когда рост многообразия* $\mathbf{V}$ *ограничен полиномом.*

Из теоремы 9 следует, рост многообразия $\mathbf{W}_2$ является сверхэкспоненциальным, причем для многообразия $\mathbf{W}_2$ над произвольным полем для любого $n \geq 2$ выполнено равенство

$$c_n(\mathbf{W}_2) = [n! \cdot e] - n.$$

Теорема 10 ([22, 23]). *Пусть основное поле имеет нулевую характеристику и* ${}_3\widetilde{\mathbf{N}}$ *— многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, определенное тождеством*

$$\{x_1, \{x_2, \{x_3, x_4\}\}\} = 0.$$

Тогда многообразие $\mathbf{W}_2 \cap {}_3\widetilde{\mathbf{N}}$ *имеет почти экспоненциальный рост.*

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, определенное тождеством

$$\{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0.$$

Теорема 11 ([22]). *Многообразие* $\mathbf{W}_2 \cap \widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ *над полем нулевой характеристики является шпехтовым.*

Лемма 5 ([24]). *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $C = A \oplus A \oplus K$ над полем K, в котором определим операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:*

$$(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),$$

$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1, 0),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$. Тогда полученная алгебра C будет являться алгеброй Лейбница–Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Пусть $SU_N = SU_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка N над полем K, $U_N^{LP} = SU_N \oplus SU_N \oplus K$ — алгебра Лейбница–Пуассона, построенная с помощью леммы 5.

Теорема 12 ([24]). *В случае основного поля K нулевой характеристики для алгебры Лейбница–Пуассона U_N^{LP} справедливы следующие утверждения:*

(i) полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры U_N^{LP};

(ii) для любого натурального n базис полилинейной компоненты $P_n(U_N^{LP})$ состоит из элементов вида

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$
$$x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\},$$

где $k = 2, \ldots, min\{n, N-1\}$, $\{i_1, \ldots, i_{n-k}, j_1, \ldots, j_k\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ как множества и $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$;

(iii) для любого натурального n выполнено равенство

$$c_n(U_N^{LP}) = 1 + \sum_{k=2}^{min\{n,N-1\}} C_n^k \cdot k!,$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим функцию сложности

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Определим многообразия алгебр Лейбница–Пуассона $\mathbf{A}_s$ и $\mathbf{B}_s$ следующими полилинейными тождествами:

$$\mathbf{A}_s: \ \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_0, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2s-1}, x_{2s}\}\} = 0,$$

$$\mathbf{B}_s: \ \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \ldots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0.$$

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Теорема 13 ([25]). *Для многообразий $\mathbf{A}_s$ и $\mathbf{B}_s$ над произвольным полем выполнены следующие равенства:*

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}_s, z) = exp(z) - exp(z)z + \frac{exp(z)z}{z-1}\left(\left(1 + (z-1)exp(z)\right)^s - 1\right),$$

$$c_n(\mathbf{A}_s) = 1 - n + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1} C_{k-2}^i (-1)^{k-i} k^{-i-1} \frac{n!}{(n-i-1)!}, \ n \geq 1,$$

$$c_n(\mathbf{A}_s) \approx n^s (s+1)^{n-s},$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{B}_s, z) = exp(z) + \frac{exp(z)z^2}{z-1}\left(\left(1 + (z-1)exp(z)\right)^s - 1\right),$$

$$c_n(\mathbf{B}_s) = 1 + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1} C_{k-2}^i (-1)^{k-i} k^{-i-2} \frac{n!}{(n-i-2)!}, \ n \geq 1,$$

$$c_n(\mathbf{B}_s) \approx n^{s+1} (s+1)^{n-s-1},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

3. Алгебры Лейбница–Пуассона с экстремальными свойствами

На сегодняшний день известны всего четыре многообразия алгебр Лейбница почти полиномиального роста. Для однородности записи обозначим их через $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, $\widetilde{\mathbf{V}}_2$, $\widetilde{\mathbf{V}}_3$, $\widetilde{\mathbf{V}}_4$.

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ определяется тождеством $[x_1, [x_2, x_3], [x_4, x_5]] = 0$ (см. [26]).

Пусть Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с умножением $\wedge$ над произвольным полем K. В векторном пространстве $\widetilde{G} = \Lambda \oplus \Lambda$ над полем K определим операцию умножения $[,]$ следующим образом:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \widetilde{G}$. Полученная алгебра $\widetilde{G}$ является алгеброй Лейбница, которая порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_2$. В работе [27] показано, что многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_2$ порождается тождествами

$$[x_1, [x_2, [x_3, x_4]]] = 0, \quad [z, [x, y], [x, y]] = 0,$$

и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно лейбницево стандартное тождество, т.е. тождества вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] = 0.$$

Многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_4$ определяются следующим образом (см. [28]). Рассмотрим кольцо многочленов R от переменной t как алгебру Лейбница с нулевым умножением. Алгебру R будем считать правым N_3-модулем алгебры Гейзенберга N_3 со следующим действием:

$$f(t)a = f'(t),\ f(t)b = tf(t),\ f(t)c = f(t).$$

Обозначим через $\widetilde{N}$ прямую сумму алгебр N_3 и R. Умножение в $\widetilde{N}$ задается так:

$$(x + f(t))(y + g(t)) = xy + f(t)y,$$

где $x, y \in N_3,\ f(t), g(t) \in R$. Алгебра Лейбница $\widetilde{N}$ порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. Зададим действие элементов двумерной метабелевой алгебры Ли M_2 на элементы R:

$$f(t)e = tf'(t),\ f(t)h = tf(t).$$

Пусть $\widetilde{M}$ — прямая сумма алгебр N_3 и R с умножением

$$(m_1 + f(t))(m_2 + g(t)) = m_1 m_2 + f(t)m_2,$$

где $m_1, m_2 \in M_2,\ f(t), g(t) \in R$. Алгебра Лейбница $\widetilde{M}$ порождает многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_4$.

Обозначим через $\widetilde{G} \oplus K$, $\widetilde{N} \oplus K$ и $\widetilde{M} \oplus K$ алгебры Лейбница–Пуассона с операциями (2), а через $\widetilde{\mathbf{V}}_2^P$, $\widetilde{\mathbf{V}}_3^P$ и $\widetilde{\mathbf{V}}_4^P$ — многообразия алгебр Лейбница–Пуассона, порожденные соответственно алгебрами $\widetilde{G} \oplus K$, $\widetilde{N} \oplus K$ и $\widetilde{M} \oplus K$. Также обозначим через $\widetilde{\mathbf{V}}_1^P$ многообразие алгебр Лейбница–Пуассона, порожденное тождествами

$$\{x_1, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Теорема 14 ([29]). $Exp(\widetilde{\mathbf{V}}_1^P) = Exp(\widetilde{\mathbf{V}}_2^P) = Exp(\widetilde{\mathbf{V}}_4^P) = 3, Exp(\widetilde{\mathbf{V}}_3^P) = 4$. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий* $\widetilde{\mathbf{V}}_i^P$, $i = 1, \ldots, 4$. *Тогда рост многообразия* $\mathbf{V}$ *либо ограничен полиномом, либо найдется такое* β, *что для любого* n *будет выполнено неравенство*

$$2^{n-1} \le c_n(\mathbf{V}) \le n^\beta 2^n.$$

Теорема 15 ([29]). *Многообразие* $\widetilde{\mathbf{V}}_2^P$ *порождается тождествами*

$$\{x_1, \{x_2, \{x_3, x_4\}\}\} = 0, \quad \{z, \{x, y\}, \{x, y\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0,$$

и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница–Пуассона, в котором не выполнено ни одно лейбницево стандартное тождество.

Обозначим чрез $J = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$ квадратную матрицу порядка k, которая на диагонали, проходящей выше главной диагонали, содержит единицы, а все остальные элементы равны нулю, e_{ij} — матричные единички. Рассмотрим следующую подалгебру в UT_k над полем K, которая была введена в работе [30]:

$$N_k = \langle E, J, J^2, \ldots, J^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1k} \rangle_K,$$

где E — единичная матрица. Пусть также Λ_{2k} — алгебра Грассмана с единицей и $2k$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$, $G_{2k} = \Lambda_{2k} \times \Lambda_{2k} \times K$, $R_k = N_k \times N_k \times K$ — алгебры Лейбница–Пуассона, построенные с помощью леммы 5.

Важность изучения пространств $\Gamma_n(\mathbf{V})$ показана в лемме 3.

Теорема 16 ([31]). *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница–Пуассона G_{2k}, $k \geq 1$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $Id(G_{2k})$ порождается тождествами*

$$\{z, \{x_1, x_2, x_3\}\} = 0, \quad \{z, \{x, y\}, \{x, y\}\} = 0,$$
$$\{z, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_{k+1}, y_{k+1}\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;$$

2) *для любого $n \geq 1$ полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$\{x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \ldots, \{x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}\}\},$$
$$r + 2s + 1 = n,\ i_1 < i_2 < \ldots < i_r,\ j_1 < j_2 < \ldots < j_{2s},\ 0 \leq s \leq k,\ r \geq 0,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(G_{2k})$;

3) *размерности пространств $\Gamma_n(G_{2k})$ вычисляются по следующей формуле:*

$$\gamma_n(G_{2k}) = \begin{cases} n2^{n-2}, & 1 < n < 2k+1, \\ n\sum_{i=0}^{k} C_{n-1}^{2i}, & n \geq 2k+1, \end{cases}$$

причем для любого $n \geq 2k+1$

$$\gamma_n(G_{2k}) = \gamma_n(G_{2k-2}) + nC_{n-1}^{2k} \approx \frac{n^{2k+1}}{(2k)!},\ n \to \infty,$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k;

4) *если $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $var(G_{2k})$, то найдется такой многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами, зависящий от $\mathbf{W}$, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $\gamma_n(\mathbf{W}) \leq f(n)$, причем $deg\ f(x) < 2k+1$.*

Теорема 17 ([31]). *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница–Пуассона R_k, $k \geq 3$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $Id(R_k)$ порождается полилинейными тождествами*

$$\{z, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0, \quad \{z, \{x_1, \ldots, x_k\}\} = 0,$$
$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;$$

2) *для любого $n \geq 1$ полилинейные элементы от переменных $x_1,\ldots,x_n$*

$$\{x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}\}\},$$
$$r + s + 1 = n, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_r, \quad j_1 > j_2 < \ldots < j_s,$$
$$0 \leq s \leq k-1, \quad s \neq 1, \quad r \geq 0,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(R_k)$;

3) *размерности пространств $\Gamma_n(R_k)$ вычисляются по следующей формуле:*

$$\gamma_n(R_k) = \begin{cases} n!, & 1 \leq n \leq \min\{4, k\}, \\ n(n-3)2^{n-2} + 2n, & 5 \leq n \leq k, \\ n\left(1 + \sum_{i=2}^{k-1}(i-1)C_{n-1}^{i}\right), & n \geq k+1, \end{cases}$$

причем для любого $n \geq k+1$

$$\gamma_n(R_k) = \gamma_n(R_{k-1}) + n(k-2)C_{n-1}^{k-1} \approx \frac{k-2}{(k-1)!}n^k,\ n \to \infty;$$

4) *если $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $var(R_k)$, то найдется такой многочлен $f(x) = a_0 + \ldots + a_k x^k$ с рациональными коэффициентами, зависящий от $\mathbf{W}$, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $\gamma_n(\mathbf{W}) \leq f(n)$, причем $a_k \leq \dfrac{k-3}{(k-1)!}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рацеев С. М. Коммутативные алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2012. Т. 94, № 3/1. С. 54–65.
2. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985.
3. Giambruno A., Zaicev M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R. I., 2005.
4. Drensky, V. Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verlag, 2000.
5. Regev A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 6. P. 1067–1069.
6. Giambruno A., Zaicev M. V. Exponential codimension growth of P. I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. Vol. 142. P. 221–243.
7. Кемер А. Р. Шпехтовость T-идеалов со степенным ростом коразмерностей // Сиб. матем. журнал. 1978. Т. 19, № 1. С. 54–69.
8. Drensky V., Regev A. Exact behaviour of the codimention of some P. I. algebras // Israel J. Math. 1996. Vol. 96. P. 231–242.
9. Воличенко И. Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журнал. 1984. Т. 25, № 3. С. 40–54.
10. Петроградский В. М. Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 6. С. 119–138.
11. Рацеев С. М. Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13.
12. Рацеев С. М. Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Лейбница–Пуассона // Изв. вузов. Матем. 2014. № 3. С. 33–39.
13. Рацеев С. М. Об алгебрах Ли с экстремальными свойствами // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 444–454.
14. Петроградский В. М. О численных характеристиках подмногообразий трех многообразий алгебр Ли // Матем. сборник. 1999. Т. 190, № 6. С. 111–126.
15. Petrogradsky V. M. Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral // Serdica Math. J. 2000. Vol. 26, № 2. P. 167–176.
16. Рацеев С. М. Тождества в многообразиях, порожденных алгебрами верхнетреугольных матриц // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 2. С. 416–429.
17. Рацеев С. М. Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2006. Т. 46, № 6/1. С. 70–77.
18. Рацеев С. М. Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2010. Т. 78, № 4. С. 65–72.

19. Рацеев С. М. Об экспонентах некоторых многообразий линейных алгебр // Прикладная дискретная математика. 2013. Т. 21, № 3. С. 32–34.

20. Ratseev S. M. Growth of some varieties of Leibniz-Poisson algebras // Serdica Mathematical Journal. 2011. Vol. 37, № 4. P. 331–340.

21. Рацеев С. М., Череватенко О. И. Экспоненты некоторых многообразий алгебр Лейбница–Пуассона // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. Т. 104, № 3. С. 42–52.

22. Ratseev S. M. On varieties of Leibniz-Poisson algebras with the identity $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$ // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». 2013. Т. 6, № 1. С. 97–104.

23. Скорая Т. В., Фролова Ю. Ю. О многообразии ${}_3\mathbf{N}$ алгебр Лейбница и его подмногообразиях // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, № 1. С. 155–185.

24. Рацеев С. М., Череватенко О. И. О нильпотентных алгебрах Лейбница–Пуассона // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2012. Т. 29, № 4. С. 207–211.

25. Рацеев С. М., Череватенко О. И. Функции сложности некоторых алгебр Лейбница–Пуассона // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 500–507.

26. Mishchenko S., Valenti A. A Leibniz variety with almost polynomial growth // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 202. № 1-3. P. 82–101.

27. Абанина Л. Е., Рацеев С. М. Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2005. Т. 40, № 6. С. 36–50.

28. Абанина Л. Е., Мищенко С. П. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды десятых математических чтений МГСУ. Москва: Союз. 2002. С. 95–99.

29. Рацеев С. М., Череватенко О. И. О некоторых многообразиях алгебр Лейбница–Пуассона с экстремальными свойствами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. Т. 22, № 2. С. 57–59.

30. Giambruno A., Mattina D. La., Petrogradsky V. M. Matrix algebras of polynomial codimention growth // Israel J. Math. 2007. Vol. 158. P. 367–378.

31. Рацеев С. М. О минимальных алгебрах Лейбница–Пуассона полиномиального роста // Дальневост. матем. журн. 2014. Т. 14, № 2. С. 248–256

REFERENCES

1. Ratseev S. M. 2012, "Commutative Leibniz-Poisson algebras of polynomial growth", Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., vol. 94, no 3/1, pp. 54–65.

2. Bahturin Yu. A. 1987, "Identical relations in Lie algebras", VNU Science Press, Utrecht.

3. Giambruno A., Zaicev M. V. 2005, "Polynomial Identities and Asymptotic Methods", AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R. I.

4. Drensky, V. 2000, "Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra", Singapore: Springer-Verlag.
5. Regev A. 1971, "Existence of polynomial identities in $A \otimes B$", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 77, no 6, pp. 1067–1069.
6. Giambruno A., Zaicev M. V. 1999, "Exponential codimension growth of P. I. algebras: an exact estimate", Adv. Math., vol. 142, pp. 221–243.
7. Kemer A. R. 1978, "T-ideals with power growth of the codimensions are Specht", Sibirsk. Mat. Jh., vol. 19, no. 1, pp. 54–69. English translation: Siberian Math. J., 1978, vol. 19, no. 1. pp. 37–48.
8. Drensky V., Regev A. 1996, "Exact behaviour of the codimention of some P. I. algebras", Israel J. Math., vol. 96, pp. 231–242.
9. Volichenko I. B. 1984, "Varieties of Lie algebras with identity $[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]] = 0$ over a field of characteristic zero", Sibirsk. Mat. Jh., vol. 25, no. 3, pp. 40–54. English translation: Siberian Math. J., 1984, vol. 25, pp. 370–382.
10. Petrogradsky, V. M. 1997, "Growth of polynilpotent varieties of Lie algebras and rapidly growing entire functions", Mat. Sb., vol. 188, no. 6, pp. 119–138. English translation: Russian Acad. Sci. Sb. Math., 1997, vol. 188, no. 6, pp. 913–931.
11. Ratseev S. M. 2012, "Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras", Moscow University Mathematics Bulletin, vol. 67, no 5-6, pp. 195–199. (in Eng.)
12. Ratseev S. M. 2014, "Necessary and sufficient conditions of polynomial growth of varieties of Leibniz-Poisson algebras", Russian Mathematics (Iz. VUZ.), no 3, pp. 26–30. (in Eng.)
13. Ratseev S. M. 2015, "Lie algebras with extremal properties", Sibirsk. Mat. Jh., vol. 56, no 2, pp. 444–454. English translation: Siberian Math. J., 2015, vol. 56, no 2, pp. 358–366.
14. Petrogradsky, V. M. 1999, "On numerical characteristics of subvarities of three varieties of Lie algebras", Mat. Sb., vol. 190, no. 6, pp. 111–126. English translation: Sb. Math., vol. 190, no. 6, pp. 913–931.
15. Petrogradsky V. M. 2000, "Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral", Serdica Math. J., vol. 26, no. 2, pp. 167–176.
16. Ratseev S. M. 2011, "Identities in the varieties generated by the algebras of upper triangular matrices", Siberian Mathematical Journal, vol. 52, no 2, pp. 329–339. (in Eng.)
17. Ratseev S. M. 2006, "Growth of some varieties of leibniz algebras", Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., vol. 46, no 6/1. pp. 70–77.
18. Ratseev S. M. 2010, "Asymptotic behavior of the codimentions growth of Leibniz algebras with a nilpotent commutator subalgebra", Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., vol. 78, no 4, pp. 65–72.
19. Ratseev S. M. 2013, "On exponents of some varieties of linear algebras" Prikl. Diskr. Mat., vol. 21, no 3, pp. 32–34.
20. Ratseev S. M. 2011, "Growth of some varieties of Leibniz-Poisson algebras", Serdica Mathematical Journal, vol. 37, no 4, pp. 331–340.

21. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. 2013, "Exponents of some varieties of Leibniz-Poisson algebras", Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., vol. 104, no 3, pp. 42–52.

22. Ratseev S. M. 2013, "On varieties of Leibniz-Poisson algebras with the identity $\{x, y\}\cdot\{z, t\} = 0$", J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., vol. 6, no 1, pp. 97–104.

23. Skoraya T. V., Frolova Yu. Yu. 2014, "About variety ${}_3\mathbf{N}$ of Leibniz algebras and its subvarieties", Chebyshevskii Sb., vol. 15, no 1, pp. 155–185.

24. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. 2012, "On the nilpotent Leibniz-Poisson algebras", Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz. -Mat. Nauki., vol. 29, no 4, pp. 207–211.

25. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. 2015, "Complexity functions of some Leibniz-Poisson algebras", Sib. Elektron. Mat. Izv. Vol. 12, pp. 500–507.

26. Mishchenko S., Valenti A. 2005, "A Leibniz variety with almost polynomial growth", J. Pure Appl. Algebra., vol. 202, no 1-3, pp. 82–101.

27. Abanina L. E., Ratseev S. M. 2005, "Variety of Leibniz algebras connected with standard identities", Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser., vol. 40, no 6, pp. 36–50.

28. Abanina, L. E., Mishchenko S. P. 2002, "Some Leibniz varieteis", Mathematical methods and applications. Proceedings of the 14th Mathematical Readings, pp. 95–99.

29. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. 2013, "On some varieties of Leibniz-Poisson algebras with extreme properties", Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., vol. 22, no 2, pp. 57–59.

30. Giambruno A., Mattina D. La., Petrogradsky V. M. 2007, "Matrix algebras of polynomial codimention growth", Israel J. Math., vol. 158, pp. 367–378.

31. Ratseev S. M. 2014, "On minimal Leibniz-Poisson algebras of polynomial growth", Far Eastern Mathematical Journal, vol. 14, no 2, pp. 248–256.

Ульяновский государственный университет
Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова
Получено 12.11.2016 Принято 13.03.2017