ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 512.554.36 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-134-142

О СВОЙСТВАХ ПЕРВИЧНОГО РАДИКАЛА СЛАБОАРТИНОВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова, А. Н. Благовисная (г. Оренбург)

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы, относящиеся к структурной теории алгебр Ли. Построение структурной теории алгебраических систем предполагает наличие определенных конструкций специального вида, изучение которых представляется более простым по сравнению с изучением самой системы. Важнейшим инструментом исследования алгебраических систем является радикал.

Развитие структурной теории алгебр Ли привело к появлению различных радикалов. В многочисленных публикациях рассматриваются такие радикалы алгебр Ли, как разрешимый радикал Киллинга, слабо разрешимый радикал Парфёнова, радикал Джекобсона, первичный радикал. Одним из актуальных направлений исследований является изучение свойств радикалов бесконечномерных алгебр Ли.

Статья посвящена доказательству свойств первичного радикала алгебры Ли, на которую накладывается дополнительное условие — слабоартиновость. Слабоартиновой называется алгебра Ли, удовлетворяющая условию обрыва убывающих цепей идеала.

В первом разделе работы вводится понятие первичного радикала следующим образом. Алгебра Ли L называется первичной, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$. Идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P — первична. Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех ее первичных идеалов.

Во втором разделе работы показано, что любое конечное множество элементов первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли порождает в ней нильпотентную подалгебру, что означает локальную нильпотентность первичного радикала.

Третий раздел посвящен свойству разрешимости первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли. Доказательству свойства предшествует история решения проблемы А. В. Михалева о разрешимости первичного радикала алгебр Ли, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Ключевые слова: слабоартинова алгебра Ли, первичный радикал алгебр Ли.

Библиография: 16 названий.

ON THE PROPERTIES OF THE PRIME RADICAL OF A WEAKLY ARTINIAN LIE ALGEBRA

S. A. Pikhtilkov, O. A. Pikhtilkova, A. N. Blagovisnaya (Orenburg)

Abstract

This article deals with the issues of the structural theory of Lie algebras. The construction of the structural theory of algebraic systems implies the existence of certain structures of a special form, which are simpler than the base system. The important tool to study algebraic systems is the radical.

The development of the structural theory of Lie algebras led to the emergence of various radicals. There are many radicals of Lie algebras in numerous publications. For example, the

Killing radical, the Parfenov radical, the Jacobson radical and the prime radical are considered in various articles. The important area of research is the study of radicals of infinite-dimensional Lie algebras.

The article is devoted to proving properties of prime radical of a weakly artinian Lie algebra. A Lie algebra is said to be a weakly artinian if the Lie algebra satisfies the descending chain condition on ideals.

In the first section of the paper we introduced the concept of the prime radical in the following way. A Lie algebra L is said to be prime if $[U, V] = 0$ implies $U = 0$ or $V = 0$ for any ideals U and V of L. We say that the ideal P of a Lie algebra L is prime if the factor algebra L/P is prime. The intersection of all prime ideals is called the prime radical $P(L)$ of a Lie algebra L.

In the second section it is shown that any finite set of elements of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra generates the nilpotent subalgebra. This means that the prime radical is locally nilpotent.

The third section is devoted to the solvability of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra. There is a history of solving Mikhalev' s problem about the prime radical of a weakly artinian Lie algebra in this section also.

Keywords: weakly artinian Lie algebra, prime radical of a Lie algebra.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Одной из основных задач, возникающих при изучении алгебраических систем, является построение структурной теории, позволяющей свести изучение исходной системы к более простой. К основным инструментам построения структурной теории относится радикал. Наиболее разработанной считается теория конечномерных алгебр Ли, начало которой в конце XIX века положили работы С. Ли, Э. Картана, Ф. Энгеля, В. Киллинга. Тогда же появляется понятие радикала для конечномерных алгебр Ли, описанное в трудах В. Киллинга. Согласно современному пониманию объектов структурной теории алгебр Ли, радикал по Киллингу – это наибольший разрешимый идеал в алгебре Ли.

Особый интерес представляет исследование радикалов бесконечномерных алгебр Ли. Существуют многочисленные публикации, в которых изучаются вопросы создания структурной теории алгебр Ли на основе различных радикалов. Так, в работах [2–7] рассматриваются радикалы Джекобсона, Парфенова, первичный и другие классические радикалы бесконечномерных алгебр Ли.

Первичный радикал алгебр Ли разных типов активно исследуется в последние десятилетия. В относительно недавно появившихся работах рассматривается первичный радикал специальных алгебр Ли [8], специальных супералгебр Ли [9], артиновых алгебр Ли [10], алгебр Ли, удовлетворяющих дополнительным условиям [11].

Определение 1. *Назовем алгебру Ли L первичной, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.*

Определение 2. *Идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P — первична.*

Определение 3. *Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех ее первичных идеалов.*

Подробнее с теорией первичного радикала для алгебр Ли можно познакомиться, обратившись, например, к работе [12].

Построение общей структурной теории для произвольных алгебр Ли затруднительно, поэтому выделяются специальные классы алгебр, для которых рассматриваются свойства различных радикалов. При этом на алгебры Ли накладываются дополнительные условия. В работе в качестве дополнительного условия, накладываемого на алгебры Ли, рассматривается слабоартиновость.

Определение 4. *Алгебра Ли называется слабоартиновой, если она удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов.*

2. Свойство локальной нильпотентности первичного радикала

Определение 5. *([1, стр. 43]) Алгебра L называется локально нильпотентной, если любое её конечное множество элементов порождает в L нильпотентную подалгебру.*

Для первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть L — слабоартинова алгебра Ли. Тогда ее первичный радикал $P = P(L)$ — локально нильпотентен.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое было рассмотрено в [10].

Пусть $\sigma(L)$ — это любой ненулевой абелев идеал из $P(L)$. Такой идеал существует, так как идеал $\sigma(L)$ содержится в первичном радикале.

Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует, согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ [12] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено). Как известно [13], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.

2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$.

б) Если β — предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

Построим еще одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\sigma(L)$ — это сумма всех ненулевых абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновсти алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [13] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли — нильпотентна. Следовательно, идеал $\sigma(L)$ — нильпотентен.

Также как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\sigma(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1. $\sigma(0) = 0$.

2. Предположим, что $\sigma(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\sigma(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\sigma(\beta)/\sigma(\gamma) = \sigma(L/\sigma(\gamma))$.

б) Если β — предельное порядковое число, то

$$\sigma(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \sigma(\gamma).$$

Из соображений мощности $\sigma(\beta) = \sigma(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда $\sigma(\beta) = P(L)$.

Обозначим через $N(\sigma(L))$ степень нильпотентности идеала $\sigma(L)$.

Пусть $X \subset P(L)$ непустое конечное множество. Докажем, что все произведения

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}], x_{i_k} \in X$$

с левой расстановкой скобок равны 0 для некоторого натурального r.

Для каждого $x \in X$ обозначим через $\alpha(x)$ порядковое число α такое, что $x \in \sigma(\alpha)\backslash\sigma(\alpha-1)$, если $\alpha - 1$ определено и α, если $x \in \sigma(\alpha)$ и $\alpha - 1$ не определено.

Пусть $\alpha_1 = max(\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}], x_{i_k} \in X))$, $m = N(\sigma(\alpha_1))$.

Рассмотрим все произведения $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]$. Они удовлетворяют условию

$$\alpha([x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}]) < \alpha_1$$

.

Введем множество $X_2 = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}] | x_{i_k} \in X, 1 \leqslant k \leqslant m\}$.

Пусть $\alpha_2 = max_{x \in X_2}(\alpha(x))$, $m_2 = N(\sigma(\alpha_2))$.

Из сказанного выше следует, что $\alpha_2 < \alpha_1$.

Введем множество $X_3 = \left\{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{m_2}}] | x_{i_k} \in X, 1 \leqslant k \leqslant m_2\right\}$.

Получим последовательность множеств $X_1, X_2, ...$ и убывающую последовательность ординальных чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > ...$, которая не может быть бесконечной.

Следовательно, для некоторого k все элементы множества X_k равны нулю.

Это означает нильпотентность алгебры Ли, порожденной множеством X и локальную нильпотентность первичного радикала $P(L)$.

3. Свойство разрешимости первичного радикала

В 2001 году А. В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова “Кольца и модули” поставил проблему: существует ли слабоартинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

Поиск ответа на данный вопрос привел к следующим результатам.

С. А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабоартиновой алгебры — разрешим [14]. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабоартиновых локально нильпотентных алгебр Ли [11].

Решение ослабленной проблемы А. В. Михалева показано в работе [10]. Авторами доказано, что первичный радикал алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек внутренних идеалов или подалгебр, — разрешим.

Известно, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим, может не быть локально разрешимым [12]. Локальная разрешимость первичного радикала доказана для слабоартиновой алгебры Ли в [15].

Следующая теорема отвечает на вопрос о разрешимости первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли.

Теорема 2. *Пусть L — слабоартинова алгебра Ли. Тогда ее первичный радикал $P = P(L)$ — разрешим.*

Доказательство. 1. Рассмотрим производный ряд первичного радикала P

$$P' = [P, P], ..., P^{(n+1)} = [P^{(n)}, P^{(n)}], ... \tag{1}$$

Имеют место включения $P \supset P' \supset P'' \supset ... \supset P^{(n)} \supset ...$.

Так как алгебра Ли L является слабоартиновой, убывающая последовательность идеалов стабилизируется, т.е. $R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)}$. Получаем $[R_1, R_1] = R_1$.

Если $R_1 = 0$, первичный радикал P — разрешим и утверждение теоремы имеет место.

Предположим, что $R_1 \neq 0$.

Пусть идеал R_1 содержит собственный неразрешимый идеал P_1.

Строим для P_1 производный ряд (1) и так же показываем существование идеала R_2 такого,что $[R_2, R_2] = R_2$.

Равенство $R_2 = 0$ противоречит неразрешимости P_1.

Получили убывающую последовательность различных ненулевых идеалов

$$R_1 \supset R_2 \supset ... \supset R_n \supset ...,$$

удовлетворяющих условию $[R_k, R_k] = R_k, k = 1, 2, ...$.

Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что убывающая последовательность идеалов не может быть бесконечной.

Пусть $K = R_m$ последний ненулевой идеал убывающей цепи идеалов. Из построения идеалов $R_1, R_2, ...$ следует, что $[K, K] = K$ и каждый собственный идеал K — разрешим.

2. Далее рассмотрим представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала [10].

Пусть $\sigma(L)$ — это любой ненулевой минимальный абелев идеал из L. Такой идеал существует, если первичный радикал ненулевой $P(L) \neq 0$ - то есть алгебра L не является полупервичной [12].

Абелев идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует, согласно конструкции нижнего слабо разрешимого радикала, если $P(L) \neq 0$ [12] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено). Как известно [16], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1) $\tau(0) = 0$.

2) Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$.

б) Если β — предельное порядковое число, то

$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

3. Покажем, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = [K, K]$ равен $K = \tau(\omega)$ — занумерован первым бесконечным порядковым числом.

Идеал K не может равняться $K = \tau(n)$, где n — натуральное. В этом случае идеал K — разрешим как конечное последовательное расширение абелевых идеалов.

Заметим, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым — первый неразрешимый идеал в возрастающей последовательности идеалов $\tau(0) \subset \tau(1) \subset ...$.

Разрешимый идеал S_1 слабоартиновой алгебры Ли ступени k является последовательным расширением конечного числа идеалов.

У него конечное число n_1 минимальных абелевых идеалов, иначе нарушается слабая артиновость. Обозначим через J_1 сумму минимальных абелевых идеалов S_1.

Рассмотрим фактор-алгебру $S_2 = S_1/J_1$. Обозначим через J_2 сумму n_2 минимальных абелевых идеалов S_2.

Снова рассмотрим фактор-алгебру $S_3 = S_2/J_2$.

Нам придется факторизовать по абелевым идеалам k раз после чего получим нулевую алгебру.

Пересчитывая количество минимальных абелевых идеалов, получим

$$K = \tau(n), \tag{2}$$

где $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Равенство (2) противоречит предположению $K = \tau(\omega)$.

Мы доказали, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым.

4. Построим еще одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\varphi(L)$ — это сумма всех ненулевых минимальных абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число.

В [16] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли — нильпотентна. Следовательно, идеал $\varphi(L)$ — нильпотентен.

Также как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом.

1) $\rho(0) = 0$.

2) Предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом.

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ это такой идеал алгебры L, что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \varphi(L/\rho(\gamma))$.

б) Если β — предельное порядковое число, то

$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \rho(\gamma).$$

Из соображений мощности $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда $\rho(\beta) = P(L)$.

Расширение нильпотентной алгебры Ли при помощи нильпотентной является нильпотентной алгеброй Ли [16].

Так как идеалы $\{\rho(n)|n \in \mathbb{N}\}$ являются конечной последовательностью расширений нильпотеных алгебр Ли, все они — нильпотентны.

Мы получили представление идеала K как последовательности возрастающих нильпотентных идеалов

$$\rho(0) \subset \rho(1) \subset ... \subset \rho(n) \subset ...,$$

при этом $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i)$.

Обозначим через $N(\rho(n))$ степень нильпотентности идеала $\rho(n)$.

Для каждого $x \in K$ обозначим через $\alpha(x)$ натуральное число α такое, что $x \in \rho(\alpha) \backslash \rho(\alpha - 1)$.

5. В этом разделе используется рассуждение из работы [11].

Напомним одну важную теорему из [16].

Теорема 3. *([16, стр. 21]) Пусть I — идеал в алгебре Ли L. Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением k элементов из L (при некоторой расстановке скобок), причем r из этих элементов содержатся в I. Тогда $x \in I^r$.*

Следствие 1. *Для любого нильпотентного идеала I алгебры Ли L степени нильпотентности r произведение k элементов алгебры Ли при любой расстановке скобок равно нулю, если оно содержит r элементов из I.*

Напомним, что для идеала K выполнено условие $[K, K] = K$.

Пусть $b \in K$ — ненулевой элемент. Тогда $b = \sum_{i=1}^{n}[b_i, b'_i]$, где все элементы $b_i, b'_i \in K$. Тогда $[b_i, b'_i] \neq 0$ для некоторого i. Обозначим этот коммутатор $[b_1, b'_1]$.

Представляя далее b'_1 в виде суммы коммутаторов элементов из K и рассуждая аналогично, получим ненулевой коммутатор $[b_1, [b_2, b'_2]]$, где $b_1, b_2, b'_2 \in I$. В силу равенства $[b_1, [b_2, b'_2]] = [[b_1, b_2], b'_2] - [[b_1, b'_2], b_2]$, одно из слагаемых отлично от нуля. Обозначим его элементы $[[b_1, b_2], b'_2]$.

Действуя аналогично, получим бесконечную последовательность $b_1, b_2, ... \in K$ такую, что все конечные коммутаторы с левой расстановкой отличны от нуля $[b_1, b_2, ..., b_n] \neq 0, n = 1, 2, ...$.

Рассмотрим цепочку идеалов J_k, порожденных элементами

$$J_k = ([b_1, ..., b_k]), k = 1, 2, ..., J_1 \supseteq J_2 \supseteq ... \supseteq J_k \supseteq ... .$$

Из слабой артиновости алгебры Ли L следует существование натурального n такого, что $J_n = J_{n+1}$.

Введем обозначение $a = [b_1, ..., b_n]$.

Пусть $\beta = max(\alpha(a), \alpha(b_{n+1}))$. Обозначим через $m = N(\rho(\beta))$ степень нильпотентности идеала $\rho(\beta)$.

Отметим, что элемент a отличен от нуля.

Существуют натуральное число r и элементы

$$c_{ij} \in L, i = 1, ..., r, j = 1, ..., k_i$$

такие, что

$$a = \sum_{i=1}^{r}[a, b_{n+1}, c_{i1}, ..., c_{ik_i}].$$

Подставляя выражение элемента a в правую часть получим

$$a = \sum_{i,j=1}^{r}[a, b_{n+1}, c_{i1}, ..., c_{ik_i}, b_{n+1}, c_{j1}, ..., c_{jk_j}].$$

Продолжая этот процесс m раз получим в каждом коммутаторе под знаком суммы не менее m элементов вида a, b_{n+1}.

Напомним, что элементы a, b_{n+1} лежат в нильпотентном идеале $\rho(\beta)$ степени нильпотентности m.

Согласно следствию 1, все коммутаторы под знаком суммы и, следовательно, элемент a равны нулю.

Это противоречит предположению сделанному выше о том, что элемент a — ненулевой.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

4. Заключение

Таким образом, установлено, что первичный радикал слабоартиновой алгебры Ли обладает следующими свойствами. Во-первых, первичный радикал слабоартиновой алгебры Ли локально нильпотентен. Во-вторых, первичный радикал слабоартиновой алгебры Ли разрешим.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. 496 с.

2. Kamiya N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1979. V. 9. P. 37-40.

3. Kubo F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat.Sci. 1991. V. 38. P. 23-30.

4. Togo S. Radicals of infinite-dimensional Lie algebras // Hiroshima Math. J. 1972. V. 2. P. 179-203.

5. Парфенов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. мат. журнал. 1971. Т. 12, № 1. С. 171-176.

6. Пихтильков С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, Вып. 3. С. 769-782.

7. Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О некоторых классических радикалах для специальных алгебр Ли // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, Вып. 1. С. 153-157.

8. Бейдар К. И., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, Вып. 3. С. 643-648.

9. Балаба И. Н., Пихтильков С. А. Первичный радикал специальных супералгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, Вып. 1. С. 51-60.

10. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О проблеме А.В. Михалева для алгебр Ли. // Изв. Сарат. ун-та, Новая серия, Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. № 4, Ч. 2. С. 84-89.

11. Пихтильков С. А., Поляков В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, № 1. С. 163-169.

12. Михалев А. В., Балаба И. Н., Пихтильков С. А. Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 159-174.

13. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 357 с.

14. Пихтильков С. А. Артиновые специальные алгебры Ли // В мв. сб. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2001. С. 189-194.

15. Пихтилькова О. А., Пихтильков С. А. Локальная разрешимость первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 3. С. 697-699.

16. Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974. 152 с.

REFERENCES

1. Andrunakievich, V. A., & Ryabukhin, Y. M. 1979, *Radicals of algebras and structure theory*, Nauka, Moscow.

2. Kamiya, N. 1979, "On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, vol. 9, pp. 37-40.

3. Kubo, F. 1991, "Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat.Sci.*, vol. 38, pp. 23-30.

4. Togo, S. 1972, "Radicals of infinite-dimensional Lie algebras", *Hiroshima Math. J.*, vol. 2, pp. 179-203.

5. Parfenov, V. A. 1971, "On weakly solvable radical of Lie algebras", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 12, no. 1, pp. 171-176.

6. Pikhtilkov, S. A. 2002, "On locally nilpotent radical of special Lie algebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 8, no. 3, pp. 769-782.

7. Pikhtilkov, S. A. & Pikhtilkova, O. A. 2008, "On some classical radicals for special Lie algebras", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 153-157.

8. Beidar, K. I. & Pikhtilkov, S. A. 2000, " The prime radical of the special Lie algebras ", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 6, no. 3, pp. 643-648.

9. Balaba, I. N. & Pikhtilkov, S. A. 2003 , "Prime radicals of special Lie superalgebras", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 51-60.

10. Mescherina, E. V., Pikhtilkov, S. A. & Pikhtilkova, O. A. 2013, "On the A.V. Mikhalev's Problem for Lie Algebras", *Izvestiya Saratov. Universiteta., New ser. Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 4, no. 2, pp. 84-89.

11. Pikhtilkov, S. A. & Polyakov, V. M. 2005, "On locally nilpotent Artinian Lie algebras", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 6, no. 1, pp. 163-169.

12. Mikhalev,A.V., Balaba, I. N. & Pikhtilkov, S. A. 2006, "Prime radicals of graded Ω-groups", *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 12, no. 2, pp. 159-174.

13. Jacobson, N. 1964, *Lie Algebras*, Mir, Moscow.

14. Pikhtilkov, S. A. 2001, " Special Artinian Lie algebras",*in: Algorithmic Problems in Group and Subgroup Theory*, Izdat. Tul'sk. Gos. Ped. Univ., Tula.

15. Pikhtilkova, O. A. & Pikhtilkov, S. A. 2016 "Local solvability of the prime radical of a weakly artinian Lie algebra", *Sib. Mat. Zh.*, vol. 57, no. 3, pp. 697-699.

16. Kaplansky, I. 1974, *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Mir, Moscow.

Оренбургский государственный университет
Получено 25.01.2016 Принято 13.03.2017