ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 517.521.2 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-123-133

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ РЯДОВ[1]

А. И. Козко (г. Москва)

Аннотация

В курсе анализа хорошо изучены свойства числовых рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, которые на бесконечности имеют асимптотический рост по степеням n. Соответствующие признаки сходимости были заложены ещё в работах Гаусса. В работе изучается необходимые и достаточные условия на положительную (а также знакочередующуюся) последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, имеющую скорость убывания (роста) в логарифмической шкале для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Приводятся примеры на использования полученных критериев сходимости, как в случае знакопостоянного ряда, так и в случае знакопеременного рада. Важность логарифмической шкалы обусловлена тем, что она встречается в различных разделах анализа и, в частности, в задаче о нахождении спектра оператора Штурма–Лиуввиля на полуоси для быстрорастущих потенциалах. В логарифмической шкале возникают и соответствующие вопросы о нахождение регуляризованных сумм для специальных потенциалов оператора Штурма–Лиуввиля на полуоси.

Ключевые слова: сходимость ряда, знакопостоянный ряд, знакопеременный ряд, признак сходимости ряда, асимптотика, асимптотическое разложение, спектр оператора Штурма–Лиуввиля.

Библиография: 21 названий.

ON SOME CONVERGENCE TESTS FOR ALTERNATING SERIES AND CONSTANT SIGN SERIES

A. I. Kozko (Moscow)

Abstract

Well known properties of numerical series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ in the course of analysis, which have asymptotic growth of powers of n at infinity. Relevant tests of convergence was laid in the works of Gauss. We study the necessary and sufficient conditions for the positive (and constant sign) a sequence of numbers $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ with the rate of decrease (growth) in logarithmic scale for the convergence of the series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Examples of the use of the criteria of convergence, as in the case of constant sign of series, and in the case of alternating series. The importance of a logarithmic scale due to the fact that it is found in various sections of the analysis and, in particular, the problem of finding the spectrum of the operator of Sturm–Liouville on the half-line for the fast growing potentials. On a logarithmic scale arise and the relevant questions on the presence of regularized sums, for the special potentials of the operator of Sturm–Liouville on the half-line.

Keywords: convergence of the series, series of constant sign, alternating series, test of convergence of series, test asymptotic behavior, asymptotic expansion, the spectrum of the operator of Sturm–Liouville.

Bibliography: 21s titles.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-01-00295).

1. Введение

В курсе анализа (см. [1] - [4]) хорошо изучены свойства числовых рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, которые на бесконечности имеют асимптотический рост по степеням n. Но, в задачах анализа часто ряды возникают не только в степенной шкале, но и в других, например, логарифмической шкале. Например, при изучении спектра оператора Штурма–Лиуввиля на полуоси с быстрорастущим потенциалом асимптотическое поведение собственных чисел при $n \to +\infty$ может находится в логарифмической шкале (см. [5]). И поэтому при исследовании вопросов, связанных с регуляризованными суммами в такой ситуации требуется умение работать с рядами (необязательно сходящимися), которые имеют асимптотическое поведение на бесконечности в логарифмической шкале. В работе [6] приведено несколько результатов, полученные при помощи теоремы 1 (приведена ниже) в которой решаются вопросы о сходимости регуляризованных сумм оператора Штурма–Лиуввиля на полуоси. Работы по нахождению регуляризованных сумм можно посмотреть в статьях [7] – [21]. В последней работе приведён большой список работ в этом направлении. В работе приведём две теоремы, которые дают ответ на вопрос сходимости рядов, как знакопостоянных, так и знакочередующихся, для которых n-ый член ряда имеет убывание (рост) в логарифмической шкале. Напомним хорошо известные определения:

Определение 1.

- *Будем говорить, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ знакопостоянный, если $a_k > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$ либо $a_k < 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*
- *Будем говорить, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$ знакочередующейся, если $b_k > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Определение 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ рассмотрим набор действительных чисел $\vec{\lambda}_m = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$.*

- *Определим вспомогательные множества:*

$$A_1^+(\alpha) = \{\vec{\lambda}_m \in \mathbb{R}^m : \ \lambda_1 > \alpha\}; \quad A_2^+(\alpha, \beta) = \{\vec{\lambda}_m \in \mathbb{R}^m : \ \lambda_1 = \alpha, \ \lambda_2 > \beta\};$$

для оставшихся $k = 3, \ldots, m$ положим

$$A_k^+(\alpha, \beta) = \{\vec{\lambda}_m \in \mathbb{R}^m : \ \lambda_1 = \alpha, \ \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = \beta, \ \lambda_k > \beta\}.$$

Определим множество

$$\Lambda_m^+(\alpha, \beta) = A_1^+(\alpha) \cup A_2^+(\alpha, \beta) \cup \ldots \cup A_m^+(\alpha, \beta),$$

иначе говоря $\vec{\lambda}_m \in \Lambda_m^+(\alpha, \beta)$ означает, что либо $\vec{\lambda}_m \in A_1^+(\alpha)$, либо существует $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$ такое, что $\vec{\lambda}_m \in A_k^+(\alpha, \beta)$.

- *По аналогии определим множества*

$$A_1^-(\alpha) = \{\vec{\lambda}_m \in \mathbb{R}^m : \ \lambda_1 < \alpha\}; \quad A_2^-(\alpha, \beta) = \{\vec{\lambda}_m \in \mathbb{R}^m : \ \lambda_1 = \alpha, \ \lambda_2 < \beta\};$$

для оставшихся $k = 3, \ldots, m$ положим

$$A_k^-(\alpha, \beta) = \{\vec{\lambda}_m \in \mathbb{R}^m : \ \lambda_1 = \alpha, \ \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = \beta, \ \lambda_k < \beta\}.$$

Определим множество

$$\Lambda_m^-(\alpha, \beta) = A_1^-(\alpha) \cup A_2^-(\alpha, \beta) \cup \ldots \cup A_m^-(\alpha, \beta),$$

иначе говоря $\vec{\lambda}_m \in \Lambda_m^-(\alpha, \beta)$ означает, что либо $\vec{\lambda}_m \in A_1^-(\alpha)$, либо существует $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$ такое, что $\vec{\lambda}_m \in A_k^-(\alpha, \beta)$.

Заметим, что $\vec{\lambda}^*_m = (\alpha, \beta, \cdots, \beta)$ *не принадлежит ни* $\Lambda^+_m(\alpha,\beta)$, *ни* $\Lambda^-_m(\alpha,\beta)$. *Справедливо:* $\Lambda^+_m(\alpha,\beta) \cup \Lambda^-_m(\alpha,\beta) \cup \{\vec{\lambda}^*_m\} = \mathbb{R}^m$. *Таким образом произвольное значение* $\vec{\lambda}_m$ *принадлежит одному из множеств* $\Lambda^+_m(\alpha,\beta)$, *либо* $\Lambda^-_m(\alpha,\beta)$, *либо* $\vec{\lambda}_m = \{\vec{\lambda}^*_m\}$. *На рисунке 11 изображены множества* $\Lambda^\pm_2(\alpha,\beta)$ *для* $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *и* $\alpha = \beta = 1$.

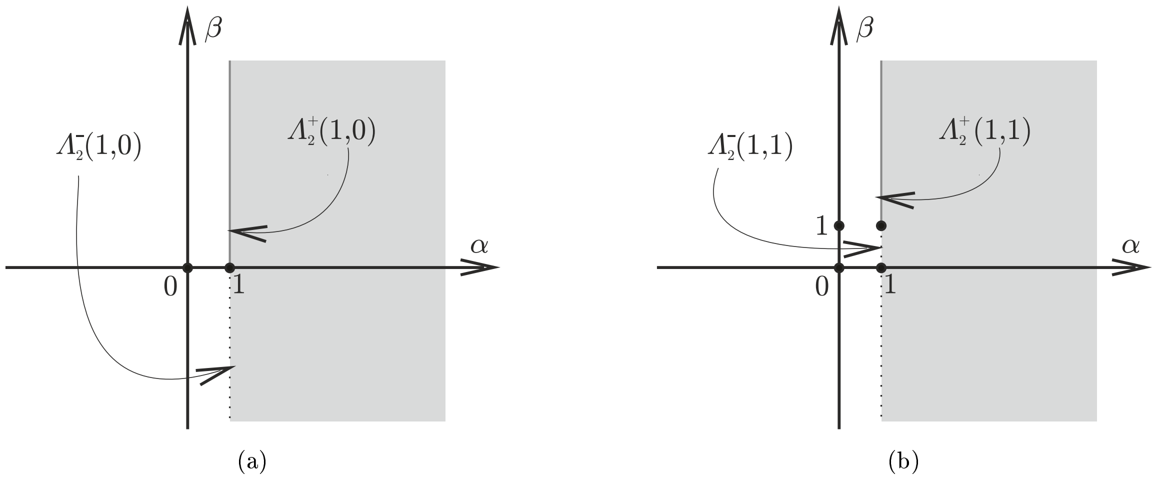

Рис. 11: (a): Случай $m = 2$ и $\alpha = 1$, $\beta = 0$; (b): Случай $m = 2$ и $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Теорема 1. *Пусть для произвольной последовательности* a_n *с положительными членами, начиная с некоторого* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n\ln n} + \sum_{k=4}^{m} \frac{\lambda_k}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-2-\text{раз}} n} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m-2-\text{раз}} n \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m-1-\text{раз}} n}\right), \quad (n \to +\infty),$$

тогда если для набора чисел $\vec{\lambda}_m = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \Lambda^+_m(1,1)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *сходится, иначе, т.е.* $\vec{\lambda}_m \in \Lambda^-_m(1,1) \cup \{\vec{1}\}$ *ряд расходится.*

Пример 1. *Иследовать на сходимость ряд* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$. *Положим* $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$. *Тогда*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^p.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^p = \left(\frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^p =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)^p = 1 + \frac{p}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right), \quad (n \to +\infty),$$

то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right), \quad (n \to +\infty),$$

Признак Гаусса для данного примера неприменим, а согласно теореме 1 делаем вывод о том, что исходный ряд в случае $p>1$ сходится, а иначе $p\leqslant 1$ расходится. Данный пример можно было бы решить используя интегральный признак Коши.

Пример 2. *Иcледовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{s}{3\ln 3\ln\ln 3}\right)\left(1+\frac{s}{4\ln 4\ln\ln 4}\right)\dots\left(1+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}\right)}\cdot\frac{n^q}{\ln^p n}.$$

Обозначим через a_n соответствующий член ряда, тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-q}\cdot\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{p}\cdot\left(1+\frac{s}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}\right).$$

Поскольку при $(n\to+\infty)$ выполнено

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-q}=1-\frac{q}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad (n\to+\infty),$$
$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{p}=1+\frac{p}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right),\quad (n\to+\infty),$$
$$1+\frac{s}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}=1+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n\ln\ln n}\right),\quad (n\to+\infty),$$

то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1-\frac{q}{n}+\frac{p}{n\ln n}+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=1-\frac{q}{n}+\frac{p}{n\ln n}+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}\right),\quad (n\to+\infty).$$

Следовательно, из теоремы 1 следует, что исходный ряд

- *при $\vec{\lambda}_4=(1,-q,p,s)\in\Lambda_4^+(1,1)$ ряд сходится;*
- *при $\vec{\lambda}_4=(1,-q,p,s)\in\Lambda_4^-(1,1)\cup\{\vec{1}\}$ ряд расходится;*

или можно переписать в виде неравенств на параметры q, p, s:

- *при $q<-1$ ряд сходится, при $q>-1$ расходится;*
- *при $q=-1$, $p>1$ сходится, при $q=-1$, $p<1$ расходится;*
- *при $q=-1$, $p=1$, $s>1$ сходится, при $q=-1$, $p=1$, $s\leqslant 1$ расходится.*

Теорема 2. *Пусть для произвольной последовательности b_n с положительными членами, начиная с некоторого $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant n_0$ выполнено*

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\lambda_1+\frac{\lambda_2}{n}+\frac{\lambda_3}{n\ln n}+\sum_{k=4}^{m}\frac{\lambda_k}{n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\dots\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-2-\text{раз}}n}+$$
$$+o\left(\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\dots\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m-3-\text{раз}}n\cdot\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m-2-\text{раз}}n}\right),\quad (n\to+\infty),$$

тогда если для набора чисел $\vec{\lambda}_m=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in\Lambda_m^+(1,0)$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k$ сходится, если $\vec{\lambda}_m\in\Lambda_m^-(1,0)$, то ряд расходится. Случай $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ зависит от поведения o -малого.

Пример 3. *Иследовать на сходимость условную и абсолютную ряд*

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(1+\frac{p}{2\ln 2}\right)\left(1+\frac{p}{2\ln 2}\right)\ldots\left(1+\frac{p}{n\ln n}\right)} \cdot \frac{1}{n^q \cdot (\ln\ln n)^p}.$$

Обозначим через b_n соответствующий член ряда, взятый по модулю. Тогда

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \cdot \left(1+\frac{p}{(n+1)\ln(n+1)}\right) \cdot \left(\frac{\ln\ln(n+1)}{\ln\ln n}\right)^s =$$
$$= \left(1+\frac{q}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{p}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\left(1+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n\ln\ln n}\right)\right) =$$
$$= 1+\frac{q}{n}+\frac{p}{n\ln n}+\frac{s}{n\ln n\ln\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (n\to+\infty).$$

Следовательно, из теоремы 2 следует, что исходный ряд сходится, если $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^+(1,0)$ и расходится если $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^-(1,0)$. В случае, если $p=q=s=0$, то ряд принимает вид: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, который расходится, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости.

При исследовании на абсолютную сходимость достаточно сослаться на теорему 1, согласно которой получаем: если $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^+(1,1)$ ряд сходится абсолютно и если $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^-(1,1)\cup\{\vec{1}\}$ ряд не является абсолютно сходящимся.

В итоге получаем:

- $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^-(1,0)\cup\{\vec{0}\}$ *ряд расходится;*
- $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^+(1,0)\cap\left(\Lambda_4^-(1,1)\cup\{\vec{1}\}\right)$ *ряд сходится условно;*
- $\vec{\lambda}_4 = (1,q,p,s) \in \Lambda_4^+(1,1)$ *ряд сходится абсолютно.*

2. Доказательство теорем 1, 2

Определим рекурентно числа e_k, следующим образом $e_1 = e$, $e_2 = e^{e_1} = e^e$, ..., $e_k = e^{e_{k-1}}$. Иначе говоря, число e_k представляет из себя степень e в степени e в степени e и т. д. ровно k раз.

Лемма 1. *Пусть $k,n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant n_0$, где $n_0=[e_k]+1$. Тогда справедливо*

$$\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}}(n+1) = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n}\right)\right), \quad n\to+\infty. \quad (1)$$

$$(n+1)\ln(n+1)\,\ln\ln(n+1)\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}}(n+1) = n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\ldots+\frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right), \quad n\to+\infty. \quad (2)$$

Доказательство. Докажем при помощи индукции первое равенство в утверждении. Справедливо

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ = \ln n\left(1+\frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right), \quad n\to+\infty.$$

Таким образом равенство (1) при $k=1$ доказано. Предположим, что равенство доказано для некоторого фиксированного натурального числа $k=N$. Докажем, что равенство (1) справедливо и при последующем номере $N+1$. Действительно

$$\ln\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}}(n+1) = \ln\left[\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n\cdot\right. \\ \left.\cdot\left(1+\frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n}\right)\right)\right] = \\ = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N+1-\text{раз}} n + \ln\left(1+\frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n}\right)\right) = \\ = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N+1-\text{раз}} n + \frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-\text{раз}} n}\right) = \\ = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N+1-\text{раз}} n\left[1+\frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N+1-\text{раз}} n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N+1-\text{раз}} n}\right)\right], \\ n\to+\infty.$$

Равенство (1) доказано. Докажем второе равенство в лемме. Действительно, перемножив равенства

$$(n+1) = n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\ln(n+1) = \ln n\left(1+\frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}}(n+1) = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n\cdot \\ \cdot\left(1+\frac{1}{n\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n\,\ln\ln n\ldots\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k-\text{раз}} n}\right)\right).$$

получаем требуемый результат. □

Лемма 2. *Пусть для произвольной последовательности a_n с положительными членами, начиная с некоторого $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n\ln n} + \sum_{k=4}^{m} \frac{\lambda_k}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{k-2-\text{раз}} n} + \\ + o\left(\frac{1}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{m-2-\text{раз}} n}\right), \quad (n \to +\infty),$$

тогда если для набора чисел $\vec{\lambda}_m = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \Lambda_m^+(1,1)$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится, если $\vec{\lambda}_m \in \Lambda_m^-(1,1)$, то ряд расходится. Случай $\vec{\lambda}_m = \vec{1}$ зависит от поведения о -малого.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по m. При $m = 1$ данное утверждение совпадает с признаком Даламбера, при $m = 2$ утверждение вытекает из признака Гаусса (и Раабе тоже). Пусть утверждение справедливо при некотором $m = N$. Докажем справедливость при $m = N + 1$. Для этого нужно разобраться со случаем, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = 1$, а $\lambda_{N+1} > 1$ либо $\lambda_{N+1} < 1$.

Для этого воспользуемся признаком Куммера. Положим

$$c_n = n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{N+1-\text{раз}} n.$$

Заметим, что ряд из $\sum_{n=[e_N]+1}^{+\infty} \frac{1}{c_n}$ — расходится, что следует из интегрального признака сходимости. Отметим, что при любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant e_N$ справедливо $c_n > 0$. Из равенства (2) вытекает

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{N+1-\text{раз}} n \cdot \\ \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \ldots + \frac{1}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{N-\text{раз}} n} + \frac{\lambda_{N+1}}{n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{N+1-\text{раз}} n}\right) - \\ - (n+1)\ln(n+1)\,\ln\ln(n+1)\ldots\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{N+1-\text{раз}}(n+1) = \lambda_{N+1} - 1 + o(1), \quad (n \to +\infty).$$

Теперь из признака Куммера вытекает, что при $\lambda_{N+1} > 1$ ряд сходится, а при $\lambda_{N+1} < 1$ — расходится. □

Доказательство. [Доказательство теоремы 1] Случай сходимости при

$$\vec{\lambda}_m = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in \Lambda_m^+(1,1)$$

сразу вытекает из леммы 2. Если $\vec{\lambda}_m \in \Lambda_m^-(1,1)$, то утверждение теоремы также вытекает из леммы 2. Рассмотрим теперь случай когда все $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1$. Но в этой ситуации исходный ряд расходится, поскольку к нему можно применить ту же лемму с $m+1$, где $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1$ и $\lambda_{m+1} = 0$, поскольку $\vec{\lambda}_{m+1} = (1, \ldots, 1, 0) \in \Lambda_{m+1}^-(1,1)$. □

Доказательство. [Доказательство теоремы 2] Пусть $m = 1$. Тогда надо доказать, что при $\lambda_1 > 1$ ряд сходится, но это вытекает из теоремы 1, поскольку в этом случае ряд сходится даже абсолютно. При $\lambda_1 < 1$ ряд расходится, т.к. начиная с некоторого натурального номера n_0

будет выполено $b_{n+1} > b_n$ и следовательно не выполняется необходимый признак сходимости ряда $\lim_{n\to+\infty} |(-1)^n\, b_n| \neq 0$.

В дальнейшем разбираем случай $\lambda_1 = 1$. Доказательство проведём при помощи индукции. Для $m = 2$ результат хорошо известен. Предположим, что результат доказан при $m = N$, докажем справедливость при $m = N + 1$. Таким образом достаточно разобраться со случаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_N = 0$, а λ_{N+1} положительна или отрицательна.

Случай $\lambda_{N+1} < 0$. Из равенства

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda_{N+1}}{n \ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-1-\text{раз}} n}, \quad (n \to +\infty).$$

верного, начиная с некоторого натурального номера n_0, получаем оценку $b_n \leqslant b_{n+1}$ для $\forall n \geqslant n_0$. Откуда следует $b_n \geqslant b_{n_0}$ для $\forall n \geqslant \max\{n_0, e_N\}$. Следовательно ряд расходится, поскольку не выполнен необходимый признак сходимости.

Случай $\lambda_{N+1} > 0$. Положим

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \ln n \cdot \ln\ln n \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{N-1-\text{раз}} n}$$

Как легко заметить, ряд $\sum_{n=e_N}^{+\infty} \varphi(n)$ — расходится, что вытекает из интегрального признака. Положим $\mu = \lambda_{N+1}/2$. Тогда с некоторого натурального n_0 (предполагаем, что $n_0 \geqslant e_N$) будет выполнено

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \lambda_{N+1}\varphi(n)\,(1 + o(1)) > 1 + \mu\varphi(n).$$

Откуда $b_{n+1} < \frac{1}{1+\mu\varphi(n)} b_n$ для $n \geqslant n_0$, причём $\mu > 0$ и $\varphi(n) > 0$ для любого $n \geqslant n_0$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Следовательно последовательность b_n убывает начиная с некоторого номера $n \geqslant n_0$. Справедливо

$$b_{n_0+k} < \frac{b_{n_0+k-1}}{1 + \mu\varphi(n_0 + k - 1)} < \ldots < \frac{b_{n_0}}{\prod_{s=0}^{k-1} (1 + \mu\varphi(n_0 + s))} < \frac{b_{n_0}}{1 + \mu \sum_{s=0}^{k-1} \varphi(n_0 + s)}.$$

Из последней оценки в виду положительности последовательности b_n и расходимости ряда с положительными членами $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \varphi(n)$ получаем $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Следовательно из признака Лейбница вытекает сходимость исходного ряда.

□

В заключение автор выражают благодарность А. С. Печенцову и В. Г. Чирскому за полезные советы и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. В 2-х томах. // М.: Изд-во МГУ. Ч.1: 2-е изд., перераб., 1985. - 662с.; Ч.2 - 1987. - 358с.

2. Никольский С. М. Курс математического анализа // М.: Физматлит, 2001. — 592 с.

3. Шведов И. А. Компактный курс математического анализа, ч. 1. Функции одной переменной // Учеб. пособие/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. - 112 с. Available at: http://eqworld.ipmnet.ru/ ru/library/books/Shvedo$v$_analiz1_2003ru.pdf (дата обращения: 18.03.2017)

4. Зорич В. А. Математический анализ (изд. 4-е, в 2-х частях) // МЦНМО. 2002.

5. Козко А. И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 5, С. 611–622.

6. Козко А.И. Свойства собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$ // Сборник материалов XVIII Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (27 января–03 февраля 2016 г.), место издания Издательство СГУ Саратов, тезисы, с. 150-152.

7. Печенцов А. С. Регуляризованные следы дифференциальных операторов: метод Лидского-Садовничего // Дифференц. уравнения. 1999. том 35, номер 4, С. 490–497.

8. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

9. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков // Матем. заметки. 2008. Т 83, № 1, С. 39–49.

10. Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 4. С. 461-465.

11. Козко А.И., Печенцов А.С. Спектральная функция и регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков // Доклады Академии наук. 2005. Т. 401. № 2. С. 160-162.

12. Kozko A. I. On the spectral functions for the higher-order differential operators with trivial boundary conditions and regularized trace of perturbation operators of the first order // Laboratoire de Mathematiques, Universite Blaise Pascal - Clermont-Ferrand, France. 2004. c. 1-22.

13. Kozko A. I., Pechentsov A. S. On the spectral function and regularized traces of singular differential operators // International conference "m-Function and Related Topics Conference"dedicated to professor W. N. Everitt, Cardiff, Wales, Uk, July 19–21, 2004, c. 14-16.

14. Kozko A.I., Pechentsov A. S. Regularized traces of singular differential operators of higher orders // IWOTA 2004, Newcastle upon Tyne, Uk, July 12 - 16, c. 31-31

15. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т -74, № 6, С. 107–126.

16. Печенцов А. С. Регуляризованные следы краевых задач в случае кратных корней характеристического полинома // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т -4, № 2, С. 567-583.

17. Кадченко С. И. Метод регуляризованных следов// Вестник Юж-Урал. гос. унта. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2009. № 37(170), Вып. 4, 4–23. Available at: http://cyberleninka.ru/article/n/metod-regulyarizovannyh-sledov#ixzz4bi2qQDJB (дата обращения: 18.03.2017)

18. Распопов В. В., Дубровский В. В. Формула регуляризованного следа одного обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка.// Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, №7. С.979-981

19. Бобров А. Н., Подольский В. Е. Сходимость регуляризованных следов степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n// Матем. сб. 1999. Том 190, номер 10, С. 3–16.

20. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Регуляризованные следы дискретных операторов // Труды Института математики и механики УрО РАН, издательство Ин-т математики и механики (Екатеринбург). 2006. Т -12. № 2, С. 162-177.

21. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов// УМН. 2006. Т 61, №5 (371), С. 89–156.

REFERENCES

1. *Ilyin V. A. Sadovnichii V. A. Sendov Bl. H.* 1985, “Mathematical Analysis“, *M. Izdatelstvo MSU*, vol. 1, 662 pp. vol. 2, 358 pp.

2. *Nikolskii S. M.* 2001, “Course of mathematical analysis“, *M. Fizmatlit*, 592 p.

3. *Shvedov I. A.* 2003, “Kompaktnyi kurs matematicheskogo analiza“, *Novosib. Gos. Univ.*, 112 pp.

4. *Zorich Vladimir A.* 2015, “Mathematical Analysis I“, 2016, “Mathematical Analysis II“, *Springer*.

5. *Kozko A. I.* 2005, “Asymptotics of the spectrum of the differential operator $-y'' + q(x)y$ with a Boundary Condition at zero and with rapidly growing potential“, *Differential Equations*, 41:5, pp. 636–648.

6. *Kozko A. I.* 2016, “The properties of the eigenvalues of Sturm-Liouville in $L^2(\mathbb{R}_+)$ with boundary condition $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$“, Sbornik 18 Mezdunarodnoi Saratovskoi zimnei shkolu «Sovremennye problemy teorii funkchii i ih prilozeniya» (27 january–03 february 2016), *Izdatelstvo SGU Saratov*, pp. 150–152.

7. *Pechentsov A. S.* 1999, “Regularized traces of differential operators: the Lidskii–Sadovnichii method“, *Differential Equations*, 35:4, pp. 490–497.

8. *Kozko A. I., Pechentsov A. S.* 2011, “Regularized traces of singular differential operators with canonical boundary conditions“, *Moscow Univ. Math. Bulletin*, vol. 66, no. 4.

9. *Kozko A. I., Pechentsov A. S.* 2008, “Regularized traces of higher-order singular differential operators“, *Mathematical Notes*, 83:1, pp. 37 DOI: https://doi.org/10.4213/mzm3764

10. *Sadovnichii V. A., Pechentsov A. S., Kozko A. I.* 2009, “Regularized traces of singular differential operators“, *Doklady Mathematics* august, vol. 80, no. 1, pp. 550–554.

    DOI: 10.1134/S1064562409040255

11. *Kozko A. I., Pechentsov A. S.* 2005, “Spectral functions and regularized traces of singular differential operators of higher orders“, *Doklady Mathematics*, vol. 71, no. 2, pp. 195-197.

12. *Kozko A. I.* 2004, “On the spectral functions for the higher-order differential operators with trivial boundary conditions and regularized trace of perturbation operators of the first order“, Laboratoire de Mathematiques, Universite Blaise Pascal - Clermont-Ferrand, France. pp. 1-22.

13. *Kozko A. I., Pechentsov A.S.* 2004, “On the spectral function and regularized traces of singular differential operators“, International conference "m-Function and Related Topics Conference"dedicated to professor W. N. Everitt, Cardiff, Wales, Uk, July 19 - 21, pp. 14-16.

14. *Kozko A. I., Pechentsov A. S.* 2004, “Regularized traces of singular differential operators of higher orders“, IWOTA, Newcastle upon Tyne, Uk, July 12 - 16, pp. 31-31

15. *Kozko A. I., Pechentsov A. S.* 2010, “The spectral function of a singular differential operator of order $2m$“, *Izvestiya: Mathematics*, 74:6, pp. 1205–1224. DOI: https://doi.org/10.4213/im2780

16. *Pechentsov A. S.* 1998, “Regularized traces of boundary problems in case of multiple roots of characteristic polynomial“, *Fundamtntalnaya i priklodnaya matematika*, vol -4, no. 2, pp. 567–583.

17. *Kadchenko S. I.* 2009, “Method of regularized traces“, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming and computer software*, no. 37(170), issue 4, pp. 4–23.

18. *Raspopov V. V., Dubrovskii V. V.* 2002, “An approximate regularized trace formula for an ordinary fourth-order differential operator“, *Differential Equations*, 38:7, pp. 1042–1045.

19. *Bobrov A. N., Podol'skii V. E.* 1999, “Convergence of regularized traces of powers of the Laplace-Beltrami operator with potential on the sphere S^n“, *Sbornik: Mathematics*, 190:10, pp. 1401–1415. DOI: https://doi.org/10.4213/sm430

20. *Sadovnichii V. A., Podolskii V. E.* 2006, “Regularized traces of discrete operators“ // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 255, suppl. 2, pp. 161–177.

21. *Sadovnichii V. A., Podolskii V. E.* 2006, “Traces of operators “, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 61, no. 5(371), pp. 89–156. DOI: https://doi.org/10.4213/rm4833

Получено 17.06.2016 Принято 13.03.2017