ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 512.543 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-109-122

ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИИ НА СВОБОДНЫХ ГРУППАХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ HNN-РАСШИРЕНИЯХ

Д. З. Каган (Москва)

Аннотация

В данной работе рассматриваются вопросы о возможности построения инвариантных нетривиальных псевдохарактеров на свободных группах. Доказано существовании нетривиальных псевдохарактеров на определенном типе HNN-расширений, относящихся к сложным случаям.

Для таких HNN-расширений, обладающих определенными копредставлениями, получены утверждения о ширине коммутантных вербальных подгрупп и нетривиальности второй группы ограниченных когомологий. Таким образом, дается частичный ответ на вопросы, сформулированные Р. И. Григорчуком.

Для произвольной группе G псевдохарактером φ на G называется вещественная функция, для которой $|\varphi(ab) - \varphi(a) - \varphi(b)| \leq \varepsilon$ для любых $a, b \in G$ и некоторого $\varepsilon > 0$ и $\varphi(x^n) = n\varphi(x)$ для любых $x \in G, n \in \mathcal{Z}$. Псевдохарактер называется нетривиальным, если существуют $a, b \in G$, такие, что $\varphi(ab) \neq \varphi(a) + \varphi(b)$. Существование на группе нетривиальных псевдохарактеров связано со многими важными характеристиками групп.

Понятия псевдохарактеров было введено А. И. Штерном. Условия, достаточные для существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях, в которых базовая группа отлична от связанных подгрупп, были получены Р. И. Григорчуком и В. Г. Бардаковым. Нетривиальные псевдохарактеры существуют на группах с одним определяющим соотношением и по крайней мере тремя образующими.

Открытыми остаются вопросы об условиях существования нетривиальных псевдохарактеров для групп с одним определяющим соотношением и двумя образующими, для HNN-расширений, в которых одна из связанных подгрупп совпадает с базовой группой. Эти вопросы во многих случаях сводятся к построению нетривиальных псевдохарактеров на свободных группах, инвариантных относительно специальных типов эндоморфизмов.

В статье доказывается существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных группах ранга $n > 1$, инвариантных относительно одного из таких типов эндоморфизмов. Доказано существование нетривиальных псевдохарактеров на некоторых нисходящих HNN-расширениях.

Ключевые слова: нетривиальные псевдохарактеры, свободные группы, ограниченные когомологии, ширина вербальных подгрупп, HNN — расширения.

Библиография: 17 названий.

INVARIANT FUNCTIONS ON FREE GROUPS AND SPECIAL HNN-EXTENSIONS

D. Z. Kagan (Moscow)

Abstract

In this paper we are considering questions about the possibility of existence of invariant nontrivial pseudocharacters on free groups. It is proved that nontrivial pseudocharacters exist on a certain type of HNN-expansions in complex cases.

We got some results about the width of verbal subgroups generated by words from commutator subgroup and non-triviality of the second group of bounded cohomologies for considered HNN-expansions. Thus, partial answer to the question, formulated R. I. Grigorchuk, is received.

Pseudocharacter is the real functions f from group G to $\mathcal{R}$ such that $|f(xy)-f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$ and for any $x, y \in G$ and $f(x^n) = nf(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in G$. A pseudocharacter is called non-trivial if $\varphi(ab) - \varphi(a) - \varphi(b) \neq 0$ for some $a, b \in G$. Existence of nontrivial pseudocharacters on a group is connected with many important characteristics and properties of groups.

The notion of pseudocharacter was introduced by A. I. Shtern. Sufficient conditions of the existence of nontrivial pseudocharacters for free products with amalgamation and HNN-extensions for which associated subgroups are different from the base group were found by R. I. Grigorchuk and V.G. Bardakov. Nontrivial pseudocharacters exist on groups with one defining relation, and at least three generators.

Questions about conditions of existence of nontrivial pseudocharacters for groups with one defining relation and two generators and for descending HNN-extensions remain open. These questions in many cases are reduced to constructing nontrivial pseudocharacters on free groups, invariant with respect to special type of endomorphisms.

In this paper we prove existence of nontrivial pseudocharacters for free groups $F_n, n > 1$, which are invariant with respect to certain types of endomorphisms. It is proved that nontrivial pseudocharacters exist on some descending HNN-extensions.

Keywords: nontrivial pseudocharacters, free groups,bounded cohomologies, width of verbal subgroups, $HNN-$extensions.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Прежде всего напомним основные определения.

Квазихарактером на произвольной группе G называется функция f из группы G в пространство действительных чисел R, такая что выполняется неравенство

$$|f(ab) - f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$$

для некоторого положительного числа ε и для любых $a, b \in G$. Псевдохарактером называется квазихарактер φ, для которого $\varphi(a^n) = n\varphi(a)$ для любых $a \in G, n \in \mathcal{Z}$. Если существуют элементы $a, b \in G$, такие что $\varphi(ab) - \varphi(a) - \varphi(b) \neq 0$, то псевдохарактер φ называется нетривиальным.

Впервые понятия псевдохарактера и квазихарактера были рассмотрены А. И. Штерном в 1983 году [1]. В. А. Файзиев [2] доказал существование нетривиальных псевдохарактеров для свободных произведениях произвольных неединичных групп, за исключением $Z_2 * Z_2$.

Р. И. Григорчук [3], [4] доказал, что на свободных произведениях с объединением $(A*B,\ V)$ существуют нетривиальные псевдохарактеры если $|A :: U| \geq 3$ и $|B : U| \geq 2$. Также Р. И. Григорчуком доказано существование нетривиальных псевдохарактеров для HNN-расширений $G =< H, t | tAt^{-1} = B >$, при условии, что обе связные подгруппы A и B отличны от базовой группы H. Из этих утверждений можно вывести существование нетривиальных псевдохарактеров на группах одним определяющим соотношением и не менее чем тремя образующими.

Аналогичные по смыслу утверждения для свободных произведениях с объединением и HNN-расширений были сформулированы В. Г. Бардаковым [5] в терминах ширины вербальных подгрупп. В работах автора [6], [7] найдены условия, при которых нетривиальные псевдохарактеры существуют на аномальных произведениях различных классов групп.

Существование нетривиальных псевдохарактеров на группах используется для изучения многих характеристик групп, в частности, это понятие связано с группами ограниченных когомологий, шириной вербальных подгрупп, устойчивостью уравнений на группах.

Шириной вербальной подгруппы [8] $V(G)$ относительно множества слов V называется наименьшее число $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $V^{\pm 1}$.

В работах В. Г. Бардаковым [5], И. В. Добрыниной [9], [10], В.Н. Безверхнего [11] доказана бесконечность ширины собственных вербальных подгрупп для различных свободных групповых конструкций.

Существование на группе нетривиальных псевдохарактеров связано с коммутантными вербальными подгруппами [5]. Слово v из свободной группы F_n называется коммутаторным, если оно лежит в коммутанте F_n'. Множество слов V называется коммутаторным, определяемая множеством V вербальная подгруппа $V(G)$ — коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова.

С помощью построения нетривиальных псевдохарактеров на группе G можно доказать бесконечность ширины $wid(G, V)$ любой коммутантной вербальной подгруппы $V(G)$, определенной конечным собственным множеством слов V. Заметим, что для доказательства бесконечности ширины некоммутантных вербальных подгруппы техника нетривиальных псевдохарактеров неприменима, т.к. ненулевые псевдохарактеры не могут быть ограничены на степенях x^s. Обзор результатов о ширине вербальных подгрупп и применяемых при их изучении методов приводится в [12].

В работе Р. И. Григорчука [3] устанавливается, что факторпространство всех псевдохарактеров по аддитивным характерам изоморфно пространству $H^{(2)}_{b,2}(G)$, где $H^{(2)}_{b,2}(G)$ - это так называемая сингулярная часть второй группы когомологий $H^{(2)}_{b}(G)$.

$$H^{(2)}_{b,2}(G) \cong PX(G)/X(G).$$

Таким образом, если на группе G существует нетривиальный псевдохарактер, то ее вторая группа ограниченных когомологий будет нетривиальной.

Р. И. Григорчук [4] поставил вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и двумя образующими $G = < a, t | r(a, t) = 1 >$, и связанный с ним вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров на свободной группе F_n, инвариантных относительно эндоморфизма $\alpha : F_n \to F_0$, где F_0 — подгруппа F_n.

Рассмотрим группу с одним определяющим соотношением и двумя образующими

$$G = < t, a | r(t, a) = 1 > .$$

Найти полные условия существования нетривиальных псевдохарактеров удалось для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром [13], [14].

В общем случае такую группу $G = < t, a | r(t, a) = 1 >$ с помощью преобразований можно привести к виду HNN-расширения [15], [16]

$$G \ = < t, a_0, \ldots, a_n | s(a_0, \ldots, a_n) = 1, t a_i t^{-1} = a_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1 > .$$

Базой этого HNN-расширения также является группа с одним определяющим соотношением $H =< a_0,\ldots,a_n|r(a_0,\ldots,a_n) = 1 >$, изоморфные подгруппы порождаются элементами $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ и $a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ соответственно.

Для того, чтобы на группе G можно было определить нетривиальный псевдохарактер достаточны выполнения условия: обе изоморфные подгруппы $< a_0,a_1,\ldots,a_{n-1} >$ и $< a_1,\ldots,a_{n-1},a_n >$ являются собственными подгруппами в базе H. Сложные нерешенные случаи имеют место, если одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой. Согласно утверждению Д.И. Молдаванского [17, лемма 1], это может быть только, если определяющее соотношение $s(a_0,\ldots,a_n) = 1$ можно представить в виде $a_n = U_0(a_0,a_{k+1},\ldots,a_{n-1})$ (или $a_0 = V_0(a_1,\ldots,a_{n-1})$).

Тогда базовой группой в HNN-расширении будет свободная группа $F_n = <a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}>$, а само HNN-расширение будет иметь вид $G = HNN(F_n\,,t|tF_nt^{-1} = B)$. Сопряжение элементом t задает эндоморфизм свободной группе F_n - базы HNN-расширения. При этом эндоморфизме порождающие $a_i, i = 0,1,\ldots,n-2$ переходят в a_{i+1}, а порождающий с максимальным индексом a_{n-1} переходит в элемент $U_0(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$. В данной работе устанавливаются условия существования таких нетривиальных псевдохарактеров на F_n, которые будут инвариантны при определенном виде слова U_0.

2. Вспомогательные понятия и функции

Введем специальные функции на множестве целых чисел $\mathcal{Z}$ и на свободной группе F_n. Мы будем использовать обозначение функции tr_t по аналогии с [5] и [11], но определение этих функций будет немного другим.

Для произвольного положительного целого числа $t > 1$ введем связанную с ним функцию $tr_t(z)$, определенную на множестве целых чисел.

$$tr_t(z) = \begin{cases} t-1 & \text{при } z > 0 \text{ и } z \equiv t-1\ (mod\,t) \\ \vdots & \\ 1 & \text{при } z > 0 \text{ и } z \equiv 1\ (mod\,t) \\ 0 & \text{при } z \equiv 0\ (mod\,t) \\ -1 & \text{при } z < 0 \text{ и } z \equiv -1\ (mod\,t) \\ \vdots & \\ -t+1 & \text{при } z < 0 \text{ и } z \equiv \frac{-t+1}{2}\ (mod\,t) \end{cases}$$

Таким образом, функция $tr_t(z)$ будет меняться от $-t+1$ до $t-1$. Например, при $t = 7$ значения функции будет меняться от -6 до 6. Для отрицательных z функция $tr_t(z)$ будет или отрицательна или равна 0, для положительных z — положительна или равна 0.

Теперь для каждого положительного числа $t > 1$ введем связанные с ним функции на свободной группе $f = f_t$ и $\varphi = \varphi_t$.

Группа F_n является свободным произведением бесконечных циклических групп

$$F_n =< a_0 > * < a_1 > * \ldots * < a_{n-1} > .$$

Каждый элемент $v \in F_n$ можно представить в виде несократимого произведения $v = v_1v_2\ldots v_p$, где каждый слог v_i имеет вид $a_{k^i}^{r_i}$, и соседние слоги $a_{k^i}^{r_i}$ и $a_{k^{i+1}}^{r_{i+1}}$ принадлежат разным циклическим подгруппам $< a_j >$.

Для произвольного элемента свободной группы $v \in F_n$ рассмотрим такое представление в виде произведения слогов из циклических групп $< a_j >_\infty$

$$v = v_1v_2\ldots v_p = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_p}^{r_p}.$$

В дальнейшим такое представление элементов свободной группы будем называть слоговым.

Определим функцию $f = f_t$, как сумму значений $tr_t(z)$ для всех r_i.

$$f(v) = \sum_{k=1}^{p} tr_t(r_k)$$

Заметим, что для одного слога $f(a_i^r) = tr_t(r)$. Для разбиения элемента свободной группы F_n по слогам $v = v_1 v_2 \dots v_p$ выполняется равенство

$$f(v) = \sum_{k=1}^{p} f(v_i).$$

Также с каждым положительным числом $t > 1$ свяжем функцию $\varphi = \varphi_t$:

$$\varphi(v) = \lim_{r \to \infty} f(v^r)/r, \ v \in F_n.$$

3. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть $F_n =< a_0, \dots, a_{n-1} >$ — свободная группа ранга $n > 1$ и отображение α определено преобразованиями порождающих: $a_0 \to a_1, \dots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to W a_i^R W^{-1}$, где W — нееединичный элемент F_n, R — любое положительное число. Если несократимая запись W начинается порождающим $a_0^{\pm 1}$, то на свободной группе F_n существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно отображения α.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $R \geq 3$. Тогда, в качестве положительного числа t, на основе которого строятся вспомогательные функции, выберем $R - 1 : t = R - 1$. Таким образом, $tr_t(z) = tr_{R-1}(z)$. Для каждого элемента свободной группы $v \in F_n$ по ее несократимому представлению будем рассматривать соответствующие определенные выше функции $f(v) = f_{R-1}(v)$ и $\varphi = \varphi_{R-1}$. Далее будем использовать обозначения $f(v)$ и φ без упоминания нижнего индекса.

Если $v = a_{i_1}^{c_1} a_{i_2}^{c_2} \dots a_{i_p}^{c_p}$, где соседние слоги $a_{i_j}^{c_j}$ и $a_{i_{j+1}}^{c_{j+1}}$ принадлежат разным циклическим подгруппам $< a_i >$, то $f(v) = tr_{R-1}(c_1) + tr_{R-1}(c_2) + \dots + tr_{R-1}(c_p)$.

Докажем сначала, что для любого элемента $v \in F_n$ будет выполняться равенство $f(v^{-1}) = -f(v)$.

Рассмотрим слоговое представление $v : v = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_p}^{r_p}$. Тогда $v^{-1} = a_{i_p}^{-r_p} \dots a_{i_2}^{-r_2} a_{i_1}^{-r_1}$. Для каждого слога выполняется $f(a_i^{-r}) = tr_t(-r) = -tr_t(r) = -f(a_i^r)$. Таким образом, значение функции $f(v^{-1})$ складывается из слагаемых, противоположных по значению слагаемым из $f(v)$. Тем самым равенство $f(v^{-1}) = -f(v)$ доказано.

Лемма 1. *Функция f является квазихарактером на F_n.*

Рассмотрим произведение двух элементов свободной группы $F_n : v_1 = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_p}^{r_p}$ и $v_2 = a_{j_1}^{q_1} a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_m}^{q_m}$. Тогда $v_1 v_2 = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_p}^{r_p} a_{j_1}^{q_1} a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_m}^{q_m}$.

Возможны несколько вариантов изменений представления на стыке слов.

Сначала рассмотрим случай, когда $i_p \neq j_1$.

Тогда на стыке слогов $a_{i_p}^{r_p}$ и $a_{j_1}^{q_1}$ не происходит никаких сокращений и произведение $v_1 v_2$ имеет слоговое представление $a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_p}^{r_p} a_{j_1}^{q_1} a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_m}^{q_m}$.

В запись произведения $v_1 v_2$ входят те же слоги $a_i^{r_i}$, что в слова v_1 и v_2 по отдельности. Поэтому, $f(v_1 v_2) = \sum_{k=1}^{p} tr_t(r_i) + \sum_{k=1}^{m} tr_t(q_i) = f(v_1) + f(v_2)$.

Второй случай состоит в том, что слоги на стыке множителей соответствуют одной и той же порождающей a_i, но полного сокращения не происходит. Это происходит если $i_p = j_1$ и $r_p \neq -q_1$.

Тогда сокращения в произведении v_1v_2 останавливаются, на стыке появляется новый слог $a_{i_p}^{r_p+q_1}$. Тогда $v_1v_2 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_{p-1}}^{r_{p-1}}a_{i_p}^{r_p+q_1}a_{j_2}^{q_2}\dots a_{j_m}^{q_m}$. Выполняется равенство

$$f(v_1v_2) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_{p-1}}^{r_{p-1}}) + tr_t(r_p+q_1) + f(a_{j_2}^{q_2}\dots a_{j_m}^{q_m}).$$

Из арифметических соображения ясно, что $|tr_t(a+b) - tr_t(a) - tr_t(b)| \leq t$ для любых целых чисел a, b. Отсюда следует, что $|tr_t(r_p+q_1) - tr_t(r_p) - tr_t(q_1)| \leq t$. Учитывая что $f(v_1) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_{p-1}}^{r_{p-1}}) + tr_t(r_p)$ и $f(v_2) = tr_t(q_1) + f(a_{j_2}^{q_2}\dots a_{j_m}^{q_m})$, получаем $|f(v_1v_2) - f(v_1) - f(v_2)| = |tr_t(r_p+q_1) - tr_t(r_p) - tr_t(q_1)| \leq t$.

Теперь рассмотрим случай, когда $i_p = j_1$ и $r_p = -q_1$. Это означает, что слоги, стоящие на стыке множителей — $a_{i_p}^{r_p}$ и $a_{j_1}^{q_1}$ полностью сокращаются. Так как $r_p = -q_1$, то $tr_t(r_p) = -tr_t(q_1)$. Поэтому, если слоги на стыке слов полностью сокращаются, значение функции f не изменяется. Тогда $f(v_1v_2) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_{p-1}}^{r_{p-1}}a_{j_2}^{q_2}\dots a_{j_m}^{q_m})$ и на стыке слов v_1 и v_2 оказываются уже следующие слоги.

Если полностью сокращаются $p-l$ слогов $(p \geq l,)$ то запись элементов v_1, v_2 имеет вид: $v_1 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_l}^{r_l}a_{i_{l+1}}^{r_{l+1}}\dots a_{i_p}^{r_p}$ и $v_2 = a_{i_p}^{-r_p}\dots a_{i_{p-l}}^{-r_{l+1}}$, а произведение:

$$v_1v_2 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_l}^{r_l}a_{j_{p-l+1}}^{q_{p-l+1}}\dots a_{j_m}^{q_m}.$$

Если $i_l \neq j_{p-l+1}$, то эти слоги останутся разными в произведении. Тогда

$$f(v_1v_2) = tr_t(r_1) + tr_t(r_2) + \dots + tr_t(r_l) + tr_t(q_{p-l+1}) + \dots + tr_t(q_m) = f(v_1) + f(v_2).$$

Если $i_l = j_{p-l+1}$, то два соответствующих слога сливаются в один, но полного сокращения не происходит. Тогда

$$\begin{aligned} f(v_1v_2) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_l}^{r_l+q_{p-l+1}}\dots a_{j_m}^{q_m}) = \\ = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_{l-1}}^{r_{l-1}}) + tr_t(r_l + q_{p-l+1}) + f(a_{j_{p-l+2}}^{q_{p-l+2}}\dots a_{j_m}^{q_m}). \end{aligned}$$

Выполняется равенство $f(v_1v_2) - f(v_1) - f(v_2) = tr_t(r_l + q_{p-l+1}) - tr_t(r_l) - tr_t(q_{p-l+1})$. Поскольку $|tr_t(r_l + q_{p-l+1}) - tr_t(r_l) - tr_t(q_{p-l+1})| \leq t$, то и $|f(v_1v_2) - f(v_1) - f(v_2)| \leq t$.

Во всех возможных случаях выполняется равенство $|f(v_1v_2) - f(v_1) - f(v_2)| \leq t$. Таким образом, функция f действительно является квазихарактером на рассматриваемой свободной группе F_n.

Лемма 2. *Функция φ является нетривиальным псевдохарактером на группе F_n.*

Согласно результату А. И. Штерна (предложение 3б из [11]) для любого квазихарактера f на произвольной группе G функция, определенная равенством $\varphi(g) = \lim_{c\to\infty} f(g^c)/c, g \in G$ является псевдохарактером. Следовательно, определенная нами функция φ является псевдохарактером.

Остается показать, что φ является нетривиальным псевдохарактером. По условию теоремы ранг свободной группы $n > 1$, поэтому в группе F_n есть хотя бы две различные порождающие a_0 и a_1. Значение функции $tr_t(z)$ ограничено по модулю числом $t-1$. Для любого слога a_i^r значение $|f(a_i^r)| = |tr_t(r)| < t$ также ограничено при любом числе r. Поэтому предел $\varphi(a_i) = lim_{c\to\infty} f(a_i^c)/r$ будет равен 0 для любого порождающего a_i. В частности, $\varphi(a_0) = 0$ и $\varphi(a_1) = 0$.

Рассмотрим элемент a_1a_0. Для степени $(a_1a_0)^c$ разбиение по слогам будет иметь вид $a_1a_0a_1a_0\dots a_1a_0$, т.е. каждое вхождени порождающих будет представлять отдельный слог.

Рассматриваем случай, когда $R \geq 3$, соответственно $t \geq 2$, и $f(a_1) = f(a_0) = 1$. Для функции $f(a_1a_0)$ получим $f[(a_1a_0)^c)] = f(a_1) + f(a_0) + \ldots + f(a_1) + f(a_0) = c \cdot (1+1) = 2c$. Следовательно, $\varphi(a_1a_0) = lim_{c\to\infty}\frac{2c}{c} = 2$. Таким образом, $\varphi(a_1a_0) \neq \varphi(a_0) + \varphi(a_1)$, а, значит, φ — нетривиальный псевдохарактер.

Лемма 3. *Функция f является инвариантной относительно отображения α.*

Функция f на каждом элементе свободной группы $v \in F_n$ равна сумме своих значений на слогах вида $a_i^{r_i}$, составляющих несократимую запись v. Если $v = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_p}^{r_p}$, то $f(v) = \sum_{k=1}^{p} f(a_{i_k}^{r_k}) = \sum_{k=1}^{p} tr_t(r_k)$.

При эндоморфизме α слоги вида a_i^r при $i = 0, 1, \ldots, n-2$ переходят в слоги a_{i+1}^r. При этом степень r не меняется. Поэтому, $f(a_i^r) = f[\alpha(a_i^r)] = tr_t(r)$ для всех значений i кроме $i = n-1$.

Слоги a_{n-1}^s при рассматриваемом отображении перейдут в элементы

$$(Wa_i^RW^{-1})^s = Wa_i^{Rs}W^{-1}, \alpha(a_{n-1}^s) = Wa_i^{Rs}W^{-1}.$$

Заметим, что в несократимой записи этих элементов на стыках между W, a_i^{Rs} и W^{-1} не может быть дополнительных букв a_i с индексом, совпадающим с i. Поэтому центральная степень a_i^{Rs} будет отдельным слогом в записи элемента $Wa_i^{Rs}W^{-1}$, слева и справа будут стоять другие буквы a_j.

Покажем, что $f(a_{n-1}^s) = f(\alpha[a_{n-1}^s)]$. $f(a_{n-1}^s) = tr_t(s)$. Для образа слога a_{n-1}^s имеем

$$f(Wa_i^{Rs}W^{-1}) = f(W) + f(a_i^{Rs}) + f(W^{-1}).$$

В начале доказательства теоремы мы убедились, что $f(W^{-1}) = -f(W)$, следовательно $f(Wa_i^{Rs}W^{-1}) = f(a_i^{Rs}) = tr_t(Rs)$. Мы выбрали t таким образом, что $R = t+1$, поэтому $tr_t(Rs) = Tr_t(ts+s) = tr_t(s)$. Итак, значение функции f на слогах вида a_{n-1}^s не изменяется при отображении α.

По условию теоремы крайними слогами элементов $Wa_i^{Rs}W^{-1}$ являются степени порождающего $a_0^{\pm r}$ с минимальным индексом. Порождающие a_0 в образе произвольного элемента $\alpha(v)$ могут появляться только в составе элементов $Wa_i^{Rs}W^{-1}$. Поэтому никаких сокращений или слияний слогов на стыке подслов вида $a_{n-1}^s \longrightarrow Wa_i^{Rs}W^{-1}$ и $a_i^r \longrightarrow a_{i+1}^r, i = 0, 1, \ldots, n-2$ при преобразовании α происходить не может. Два соседних слога $a_i^{r_i}$ и $a_j^{r_j}$, где $i \neq j$ и $i, j = 0, 1\ldots, n-2$ переходят в два разных слога с разными порождющими a_{i+1}, a_{j+1}, на их стыке также никакие сокращения или слияния слогов невозможны.

Поэтому слоги $a_{j+1}^p, j = 0, 1, \ldots, n-2$, получающихся прямым переходом из слогов a_j^p записи v и слоги, входящие в записи $Wa_i^{Rs}W^{-1}$ будут отдельными слогами и в записи образа $\alpha(v)$.

Таким образом, значение функции f на образе произвольного элемента $\alpha(v)$ будет равно сумме значений функции f на слогах $a_{i+1}^p, i = 0, 1, \ldots, n-2$ и значений f на элементах $Wa_i^{Rs}W^{-1}$. Для значений функции f на элементе v и его образе получим равенства:

$$f[\alpha(v)] = \sum_{a_j^p\in v, j=0,1,\ldots,n-2} f(a_{j+1}^p) + \sum_{a_{n-1}^s\in v} f(Wa_i^{Rs}W^{-1}) =$$

$$= \sum_{a_j^p\in v, j=0,1,\ldots,n-2} tr_t(p) + \sum_{a_{n-1}^s\in v} tr_t(s).$$

$$f(v) = \sum_{a_j^p\in v, j=0,1,\ldots,n-2} f(a_j^p) + \sum_{a_{n-1}^s\in v} f(a_{n-1}^s) = \sum_{a_j^p\in v, j=0,1,\ldots,n-2} tr_t(p) + \sum_{a_{n-1}^s\in v} tr_t(s).$$

Таким образом, $f[\alpha(v)] = f(v)$ для любого элемента $v \in F_n$, и значение функции f действительно не меняется при отображении α.

Псевдохарактер φ определяется, как предел функции f, и поэтому также инвариантен относительно α.

В соответствии с леммами функция φ является нетривиальным псевдохарактером на свободной группе F_n, инвариантным относительно отображения α. Следовательно, в случае $R \geq 3$ утверждение теоремы выполняется.

Рассмотрим теперь случай $R = 1$. Тогда при отображения α элементы $a_j, i = 0, 1, \ldots, n-2$ переходят в a_{j+1}, а a_{n-1} — в Wa_iW^{-1}. Тогда достаточно выбрать $t = 3$ и $tr_t(z) = tr_3(z)$. Доказательство будет таким же, как и в случае $R \geq 3$.

Остается рассмотреть случай $R = 2$. Тогда порождающий a_{n-1} переходит в элемент $Wa_i^2W^{-1}$. Введем следующую функцию на слогах a_i^p элементов свободной группы:

$$sign(a_i^p) = \begin{cases} +1 & \text{если } p > 0 \\ -1 & \text{если } p < 0 \end{cases}$$

Функцию $f(v)$ также определим, как сумму значений $sign$ на всех слогах в несократимой записи элемента v. Если $v = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_m}^{r_m}$, то $f(v) = sign(r_1) + sign(r_2) + \ldots + sign(r_m)$. Функция φ определяется также, как в предыдущих случаях, $\varphi(v) = \lim_{r\to\infty} f(v^r)/r,\ v \in F_n$.

Очевидно, что $f(v^{-1}) = -f(v)$ для любого элемента $v \in F_n$.

Докажем, что функция f при новом определении будет квазихарактером на F_n, т.е. что $|f(v_1v_2) - f(v_1) - f(v_2)| \leq \varepsilon$ для любых $v_1, v_2 \in F_n$ и некоторого $\varepsilon > 0$.

Пусть $v_1 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_p}^{r_p}$ и $v_2 = a_{j_1}^{q_1}a_{j_2}^{q_2}\ldots a_{j_m}^{q_m}$. Тогда $v_1v_2 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_p}^{r_p}a_{j_1}^{q_1}a_{j_2}^{q_2}\ldots a_{j_m}^{q_m}$.

Если $i_p \neq j_1$, то крайние слоги $a_{i_p}^{r_p}$ и $a_{j_1}^{q_1}$ остаются отдельными слогами в произведении v_1v_2 и никаких изменений на стыке множителей не происходит. Тогда

$$f(v_1v_2) = (sign(r_1) + \ldots + sign(r_p)) + (sign(q_1) + \ldots + sign(q_m)) = f(v_1) + f(v_2).$$

Если $i_p = j_1$, но $r_p \neq -q_1$, и полного сокращения крайних слогов не происходит. Тогда никаких дальнейших сокращений слогов не происходит, слоговое разбиение v_1v_2 имеет вид $v_1v_2 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_p}^{r_p+q_1}a_{j_2}^{q_2}\ldots a_{j_m}^{q_m}$. Тогда

$$\begin{aligned} f(v_1v_2) &= sign(r_1) + \ldots + sign(r_{p-1}) + sign(r_p + q_1) + sign(q_2) + \ldots + sign(q_m) = \\ &= f(v_1) + f(v_2) + sign(r_p + q_1) - sign(r_p) - sign(q_1). \end{aligned}$$

Разумеется, $|sign(r_p + q_1) - sign(r_p) - sign(q_1)| \leq 1$. Поэтому и $f(v_1v_2) - f(v_1) - f(v_2)| \leq 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда крайние слоги полностью сокращаются. Пусть

$$v_1 = a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_l}^{r_l}a_{i_{l+1}}^{r_{l+1}}\ldots a_{i_p}^{r_p}$$

и

$$v_2 = a_{i_p}^{-r_p}\ldots a_{i_{p-l}}^{-r_{l+1}}a_{j_{p-l+1}}^{q_{p-l+1}}\ldots a_{j_m}^{q_m}.$$

То есть в произведении v_1v_2 происходит полное сокращение $p-l$ слогов, а полного сокращения следующих слогов $a_{i_l}^{r_{i_l}}$ и $a_{i_{p-l+1}}^{-r_{p-l+1}}$ не происходит.

При этом опять же возможны два варианта: первый — $i_l \neq j_{p-l+1}$. Тогда

$$f(v_1v_2) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_l}^{r_l}a_{j_{p-l+1}}^{q_{p-l+1}}\ldots a_{j_m}^{q_m}) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_l}^{r_{i_l}}) + f(a_{j_{p-l+1}}^{q_{p-l+1}}\ldots a_{j_m}^{q_m}) = f(v_1) + f(v_2).$$

Другой вариант — $i_l = j_{p-l+1}$, но полного сокращения по предположению не происходит. Тогда

$$f(v_1v_2) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_l}^{r_l+q_{p-l+1}}\ldots a_{j_m}^{q_m}) = f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\ldots a_{i_{l-1}}^{r_{l-1}}) + f(a_{i_l}^{r_l+q_{p-l+1}}) + f(a_{j_{p-l+2}}^{q_{p-l+2}}\ldots a_{j_m}^{q_m}).$$

Так как

$$f(v_1)+f(v_2)=f(a_{i_1}^{r_1}a_{i_2}^{r_2}\dots a_{i_l}^{r_{i_l}})+f(a_{j_{p-l+1}}^{q_{p-l+1}}\dots a_{j_m}^{q_m})=$$
$$=sign(r_1)+\dots+sign(r_{l-1})+sign(r_l)+sign(q_{p-l})+sign(q_{p-l+1})+\dots+sign(q_m),$$

то

$$f(v_1v_2)-f(v_1)-f(v_2)=sign(r_l+q_{p-l+1})-sign(r_l)-sign(q_{p-l+1}),$$

и

$$|f(v_1v_2)-f(v_1)-f(v_2)|=|sign(r_l+q_{p-l+1})-sign(r_l)-sign(q_{p-l+1})|\leq 1.$$

Таким образом, во всех случаях $|f(v_1v_2)-f(v_1)-f(v_2)|\leq 1$, значит функция f является квазихарактером.

Покажем, что функция $\varphi(g)=\lim_{c\to\infty}f(g^c)/c, g\in G$ также остается нетривиальным псевдохарактером на свободной группе F_n. То, что φ является псевдохарактером следует из леммы Штерна.

Для того, чтобы показать нетривиальность, так же как при доказательстве леммы 2, рассмотрим элементы a_1, a_0 и a_1a_0.

$$f(a_1^c)=sign(c)=1, f(a_0^c)=sign(c)=1, f((a_1a_0)^c))=2c,$$

где c — положительное число. Поэтому, $\varphi(a_1)=\varphi(a_0)=\lim_{c\to\infty}1/c=0$, а $\varphi(a_1a_0)=2$. Значит, φ — нетривиальный псевдохарактер.

Теперь нужно показать что функции f, и, соответственно φ будут инвариантны относительно отображения α.

Представление образа $\alpha(v)$ любого элемента $v\in F_n$ будет состоять из образов слогов $a_j^p, j=0,1,\dots,n-2$, которые перейдут в слоги a_{j+1}^p и слогов, входящих в запись элементов $Wa_i^{Rs}W^{-1}$, образующихся из слогов a_{n-1}^s записи v.

Также, как при доказательстве леммы 3, нужно заметить, что никаких сокращений или слияний между первыми и вторыми слогами происходит не может. Это невозможно в силу того, что запись $Wa_i^{Rs}W^{-1}$ начинается и заканчивается порождающей $a_0^{\pm1}$.

Для слогов a_i^p элемента v, переходящих в a_{i+1}^p слагаемое, входящее в функцию f будет равно $sign(p)$ и не изменится при переходе. Для слогов a_{n-1}^s исходного слова, переходящих в $Wa_i^{Rs}W^{-1}$ получим: $f(a_{n-1}^s)=sign(s)$,
$f(Wa_i^{Rs}W^{-1})=f(W)+sign(Rs)+f(W^{-1})=sign(Rs)$. В силу того, что r — положительное число $sign(Rs)=sign(s)$.

Поэтому $f(v)=f(\alpha(v))$. Таким образом, функция f инвариантна относительно α, функция φ, как предел f, тажке будет инвариантной. Для случая $R=2$ мы также построили нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно эндоморфизма α.

Таким образом, при всех значениях $R>0$ на свободной группе F_n существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно рассматриваемого отображения α. Теорема доказана.

4. Теорема 2

Построить на свободной группе псевдохарактер можно и тогда, когда элемент a_{n-1} переходит в $Wa_i^RW^{-1}$, где R — отрицательное число.

Теорема 2. *Пусть $F_n=<a_0,\dots,a_{n-1}>$ — свободная группа ранга $n>1$ и отображение α определено преобразованиями порождающих: $a_0\to a_1,\dots,a_{n-2}\to a_{n-1}, a_{n-1}\to Wa_i^RW^{-1}$, где W — неединичный элемент F_n, R — отрицательное число, не равное $-1,-2^z+1, z\in\mathcal{N}$. Если несократимая запись W начинается порождающим $a_0^{\pm1}$, то на свободной группе F_n существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно отображения α.*

Доказательство. Итак, степень центрального слога R — отрицательное число. Разложим число $-(R-1)$ на простые множители. Поскольку $R-1 \neq -2^z, -1$, то в этом разложении найдется простое число, не равное 2. Пусть p — наименьшее из таких простых чисел. Теперь определим на множестве целых чисел функцию $t = t_p(z), z \in \mathcal{Z}:$

$$t(z) = t_p(z) \begin{cases} \frac{t-1}{2} & \text{при } z \equiv \frac{p-1}{2}\ (modp) \\ \vdots & \\ 1 & \text{при } z \equiv 1\ (modp) \\ 0 & \text{при } z \equiv 0\ (modp) \\ -1 & \text{при } z \equiv -1\ (modp) \\ \vdots & \\ \frac{-t+1}{2} & \text{при } z \equiv \frac{-p+1}{2}\ (modp) \end{cases}$$

Таким образом, значение функции $t(z)$ будет меняться от $\frac{-t+1}{2}$ до $\frac{t-1}{2}$.

Теперь определим функции f и φ на свободной группе с помощью функции $t(z)$. Пусть $v = a_{i_1}^{c_1} a_{i_2}^{c_2} \dots a_{i_q}^{c_q}$, соседние слоги $a_{i_j}^{c_j}$ и $a_{i_{j+1}}^{c_{j+1}}$ принадлежат разным циклическим подгруппам $< a_i >$. Тогда $f(v) = t(c_1) + t(c_2) + \ldots + t(c_q) = \sum_{k=1}^{q} t(c_k)$, $\varphi(v) = \lim_{r\to\infty} f(v^r)/r,\ v \in F_n$.

Очевидно, что будет выполняться равенство $t(-c_i) = -t(c_i)$. Соответственно, для любого элемента свободной группы будет выполняться $f(v^{-1}) = -f(v)$.

Аналогично доказательству леммы 1 показывается, что f будет квазихарактером на F_n. Действительно для любых двух целых чисел будет выполняться $|t(ab) - t(a) - t(b)| \leq p$, где p — выбранное нами простое число. Соответственно, для любых двух слогов

$$|f(a_i^{s_i} a_j^{s_j}) - f(a_i^{s_i}) - f(a_j^{s_j}|) = |t(s_i + s_j) - t(s_i) - t(s_j)| \leq t.$$

На взаимно обратных слогах значение функции f будут противоположными, поэтому при произведении двух элементов свободной группы $v_1, v_2 \in F_n$ будет также выполняться неравенство $|f(v_1 v_2) - f(v_1) - f(v_2)| \leq t$.

Для того, чтобы показать нетривиальность φ рассмотрим элементы a_1, a_0 и их произведение $a_1 a_0$. Значения $f(a_1^c)$ и $f(a_0^c)$ будут колебаться от $\frac{-t+1}{2}$ до $\frac{t-1}{2}$. Соответственно, значения пределов при делении на r будут равны 0: $\varphi(a_1) = \lim_{r\to\infty} f(a_1^r)/r = 0, \varphi(a_0) = 0$. При этом, $t(1) = 1, f[(a_1 a_0)^c] = (1+1)\cdot c = 2c$, $\varphi(a_1 a_0) = \lim_{r\to\infty} 2r/r = 2$. Следовательно, φ — нетривиальный псевдохарактер.

Остается показать, что функция f (и, соответственно, φ) будет инвариантной относительно отображения α.

Функция f также как при доказательстве теоремы 1 на произвольном элементе свободной группы $v \in F_n$ равна сумме своих значений на слогах $a_i^{r_i}$, составляющих несократимую заись v. При эндоморфизме α образ произвольного элемента $\alpha(v)$ состоит из слогов $a_i^r, i = 1, 2, \ldots, n-1$, получающихся прямым переходом из слогов a_{i-1}^r слова v и слогов, входящих в состав $W a_i^{Rs} W^{-1}$, получающихся переходом из a_{n-1}^s. Никаких пересечений и сокращений между слогами, получающимися этими двумя разными вариантами происходить не может, т.к. запись $W a_i^{Rs} W^{-1}$ начинается с $a_0^{\pm 1}$.

Рассмотрим переходы слогов $a_i^r \longrightarrow a_{i+1}^r, i = 0, 1, \ldots, n-2$. Тогда $f(a_i^r) = f(a_{i+1}^r) = t(r)$. Таким образом, на таких слогах изменений значения функции не происходит.

Рассмотрим слоги a_{n-1}^s, лежащие в записи v. Они переходят в фрагменты $W a_i^{Rs} W^{-1}$. $f(a_{n-1}^s) = t(s), f(W a_i^{Rs} W^{-1}) = f(W) + f(W^{-1}) + f(a_i^{Rs}) = f(a_i^{Rs}) = t(Rs)$. По выбору числа p числа $R-1$ и $(R-1)s$ делятся на p, поэтому $t(Rs) = t(s)$, следовательно $f(a_{n-1}^s) = W a_i^{Rs} W^{-1}$.

Итак, все слоги элемента v при отображении α переходят в такие фрагменты $\alpha(v)$, для которых значения функции f не изменяются. Никаких сокращения или соединений слогов при переходе происходить не может. Поэтому и сумма будет одинаковой. Значит, $f[\alpha(v)] = f(v)$ для любого $v \in F_n$. Функция φ, как предел функции f тоже будет инвариантной относительно α. Теорема доказана.

5. Следствия из теоремы

Из доказанной теоремы получаем результаты для соответствующих HNN-расширений.

Теорема 3. *Пусть $G =< t, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} | ta_0t^{-1} = a_1, \dots, ta_{n-2}t^{-1} = a_{n-1}$, $ta_{n-1}t^{-1} = Wa_i^RW^{-1} >$, где $W(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ — непустое слово в порождающих a_j, начинающиеся с $a_0^{\pm 1}$ и R — или произвольное положительное или отрицательное число, не равное $-2^z + 1, z \in \mathcal{N}$. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

Доказательство. Группа G является HNN-расширением с базой, равной свободной группе $F_n \ =< a_0, a_1, \dots, a_{n-1} >$ и проходной буквой t. Одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой, а другая порождается образами элементов a_i при сопряжении с t. При этом, сопряжение элементом t задает на F_n отображение, совпадающее с отображением α, рассматриваемым в теореме.

Таким образом группу G можно представить в виде $G = HNN(F_n, t | tF_nt^{-1} = \alpha(F_n))$, где $F_n =< a_0, a_1, \dots, a_{n-1} >, n > 1$ и отображение α определяется преобразованиями порождающих: $a_0 \to a_1, \dots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to Wa_i^RW^{-1}$.

Покажем, что в HNN-расширении, где база совпадает с одной из изоморфных подгрупп, для существования нетривиального псевдохарактера достаточно, чтобы на базе HNN-расширения существовал нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно изоморфизма $tHt^{-1} = B$.

Пусть $G = HNN(H, t | tHt^{-1} = B)$, и на базе H существует нетривиальный псевдохарактер χ, инвариантный относительно эндоморфизма, определяемого сопряжением

$$t : \chi(tht^{-1}) = \chi(h) \text{для любого} \, h \in H.$$

Любой элемент HNN-расширения $g \in G$ может быть представлен в виде $g = t^{-p}ht^k$, где $p, k > 0$, и h принадлежит базовой подгруппе H. Определим функцию ϕ на всем HNN-расширении G следующим образом: для элемента $g = t^{-p}ht^k$ положим $\phi(g) = \chi(h)$.

Докажем, что ϕ будет квазихарактером. Пусть $g_1 = t^{-p_1}h_1t^{k_1}$ и $g_2 = t^{-p_2}h_2t^{k_2}$ — два произвольных элемента группы G. Тогда их произведение равно $g_1g_2 = t^{-p_1}h_1t^{k_1-p_2}h_2t^{k_2}$. В зависимости от знака $k_1 - p_2$ нужн перенести влево элемент h_2 или вправо элемент h_1. При этом переносимый элемент перейдет в $t^{|p_2-k_1|}h_it^{-|k_1-p_2|}$ — образ при $|p_2 - k_1|$ — кратном применении к h_i эндоморфизма α — сопряжении с помощью $t^{|p_2-k_1|}$. Функция χ является инвариантной относительно сопряжения t. Поэтому $\chi(t^{|p_2-k_1|}h_it^{-|k_1-p_2|}) = \chi(h_i)$.

Пусть, для определенности $k_1 < p_2$. Тогда $g_1g_2 = t^{-p_1-p_2+k_1}h_1^*h_2t^{k_2}$, где h_1^* — результат $p_2 - k_1$ — кратного применения к h_1 эндоморфизма. χ — квазихарактер, поэтому $|\chi(h_1^*h_2) - \chi(h_1^*) - \chi(h_2)| \leq \varepsilon$ для некоторого положительного числа ε. Отсюда получаем

$$|\phi(g_1g_2) - \phi(g_1) - \phi(g_2)| = |\chi(h_1^*h_2) - \chi(h_1) - \chi(h_2)| = |\chi(h_1^*h_2) - \chi(h_1^*) - \chi(h_2)| \leq \varepsilon.$$

Значит функция ϕ будет квазихарактером на всем HNN-расширении G. Функция

$$\varphi(g) = lim_{n\to\infty}\phi(g^n)/n, g \in G$$

согласно уже упомянавшемуся результату А. И. Штерна будет псевдохарактером на G. На базе HNN-расширения H функция ϕ будет совпадать с χ. Поскольку χ является нетривиальным псевдохарактером на H, псевдохарактер ϕ также будет нетривиальным на H и, разумеется, на большей группе G.

Согласно теореме 1 на базовой группе рассматриваемого HNN-расширения — свободной группе $F_n =< a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} >$ существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно сопряжения проходной буквой t. Как было показано, этого достаточно, чтобы на всем HNN-расширении также существовал нетривиальный псевдохарактер.

Следствие 1. *Пусть*

$$G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} | ta_0t^{-1} = a_1, \ldots, ta_{n-2}t^{-1} = a_{n-1}, ta_{n-1}t^{-1} = Wa_i^RW^{-1} >,$$

R — или произвольное положительное или отрицательное число, не равное $-2^z+1, z \in \mathcal{N}$ и слово $W(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ — непустое слово в порождающих a_j, которое начинается с порождающей $a_0^{\pm 1}$. Тогда ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы $V(G)$, определенной конечным множеством слов V, бесконечна.

Следствие 2. *Пусть*

$$G =< t, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} | ta_0t^{-1} = a_1, \ldots, ta_{n-2}t^{-1} = a_{n-1}, ta_{n-1}t^{-1} = Wa_i^RW^{-1} >,$$

R — или произвольное положительное или отрицательное число, не равное $-2^z+1, z \in \mathcal{N}$ и слово $W(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ начинается с порождающей $a_0^{\pm 1}$. Тогда для G вторая группа ограниченных когомологий будет нетривиальной: $H_b^{(2)}(G) \neq 0$.

Для наглядности приведем несколько примеров HNN-расширений, которые подходят под условия теоремы и следствий:

$$G =< t, a, b, | tat^{-1} = b, tbt^{-1} = a^3b^2a^{-3} >,$$

$$G_1 =< t, a_0, a_1, a_2 | ta_0t^{-1} = a_1, ta_1t^{-1} = a_2, ta_2t^{-1} = a_0^{-1}a_2^2a_1a_2^{-2}a_0 >,$$

$$G_2 =< t, a_0, a_1, a_2, a_3 | ta_0t^{-1} = a_1, \ldots, ta_3t^{-1} = a_0a_1^{-4}a_0^3a_1^4a_0^{-1} > .$$

6. Заключение

Вопрос об условиях существования нетривиальных псевдохарактеров на HNN-расширениях в ситуации, когда базовая подгруппа совпадает с одной из связанных групп не имеет полного решения. В данной работе устанавливается существование таких функций для одного из типов таких HNN-расширений с определенными копредставлениями.

В связи с этим также доказано существование нетривиального псевдохарактера на свободной группе F_n, инвариантного относительно некоторого вида эндоморфизма

$$a_0 \to a_1, \ldots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to Wa_i^RW^{-1},$$

где W — элемент F_n.

Для рассматриваемого типа HNN-расширений сделаны выводы о бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп и нетривиальности второй группы ограниченных когомологий.

При доказательстве утверждений и следствий применяются методы построения функций на группах, предложенные В. Г. Бардаковым, И. В. Добрыниной, В. Н. Безверхним, методы построения и исследования псевдохарактеров Р.И. Григорчука, А. И. Штерна, В. А. Файзиева. Используются результаты Р. И. Григорчука о вторых группах когомологий, Д. И. Молдованского о группах с одним определяющим соотношением и HNN-расширениях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредствления // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25, №2. С. 70-73.

2. Файзиев В. А., Об устойчивости одного функционального уравнения на группах // Успехи мат. наук. 1993. Т.48, №1 С. 193-194.

3. Григорчук Р. И. Some results an bounded cohomology. Combinatorial and Geometric Group Theory. // Edinburg 1993 London Math. Soc. Lecture Notes Ser..V.284. Cambridge: Cambridge University Press 1994 С. 111-163

4. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. 1996. Т.59, №4. С. 546-550.

5. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494-517.

6. Каган Д. З. О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп. // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. N.6. С. 24-28.

7. Каган Д. З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т.12, №3. С.55-64.

8. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

9. Добрынина И. В. О ширине в свободных произведениях с объединением // Математические заметки. 2000. Т. 68, №3. С. 353-359.

10. Добрынина И. В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №1. С. 23-30.

11. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН. 2001. Т.7, №2. С. 95-102.

12. Добрынина И. В., Каган Д. З. О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №4 (56). С. 150-163

13. Каган Д. З. Ширина вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением // Материалы XIII Межд. конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Тула, 2015. С. 76-78.

14. Каган Д. З. Нетривиальные псевдохарактеры на группах с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром // Математический сборник. 2017. Т. 208, №1. С. 80-96.

15. Линдон Р., Шупп П. //Комбинаторная теория групп. М. Мир. 1980. 448 с.

16. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.

17. Молдованский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журнал. 1967. Т.8, №6. С. 1370-1384

REFERENCES

1. Shtern, A. I. 1991, "Quasirepresentations and pseudorepresentations *Funct. Anal. Appl.* Vol. 25, no.2, pp. 70-73.
2. Faiziev, V. A., 1993, "The stability of a functional equation on groups *Russian Math. Surveys.* Vol.48, no.1, pp. 193-194.
3. Grigorchuk, R. I. "Some results an bounded cohomology *Combinatorial and Geometric Group Theory* (Edinburg 1993). London Math. Soc. Lecture Notes Ser..V.284. Cambridge: Cambridge University Press 1994 pp. 111-163
4. Grigorchuk, R. I. 1996, "Bounded cohomology of group constructions *Mat. Zametki*, vol. 59, no. 4, pp. 546-550.
5. Bardakov, V. G. 1997, "On the width of verbal subgroups of some free constructions *Algebra and logic*, vol. 36, no. 5, pp. 494-517.
6. Kagan, D. Z. 2004, "Existence of nontrivial pseudo-characters on anomalous group products *Moscow Univ. Math. Bull.*, no. 6, pp. 24–28.
7. Kagan, D. Z. 2008, "Pseudocharacters on anomalous products of locally indicable groups *J. Math. Sci. (N. Y.)*, vol. 149, no. 3, pp. 1224-1229.
8. Merzlyakov, Y. I. 1987, "Rational groups Moscow: Nauka.
9. Dobrynina, I. V. 2000, "On the width in free products with amalgamation *Mat. Zametki*, vol. 68, no. 3, pp. 353-359.
10. Dobrynina, I. V. 2009, "Solution of the width problem in amalgamated free products Fundam. Prikl. Mat., vol. 15, no. 1, pp. 23-30.
11. Dobrynina, I. V. & Bezverkhnii, V. N. 2001, "On width in some class of groups with two generators and one defining relation *Proc. Steklov Inst. Math. Algebra. Topology*, suppl. 2, pp. 53–60.
12. Dobrynina, I. V., Kagan, D. Z., 2015, "On the width of verbal subgroups in some classes of groups *Chebyshevski. Sb.*, vol. 16, no. 4 (56), pp. 150-163.
13. Kagan, D. Z., 2015, "Width of verbal subgroups for groups with one defining relation" , XIII International Conference "Algebra, number theory and discrete geometry: Modern Problems and Application" , Tula, pp. 76-78.
14. Kagan, D. Z., 2017 "Pseudocharacters on groups with one defining relation and non-trivial center" , // *Matematicheskii Sbornik*, 2017. vol.208., no 1., pp. 80–96.
15. Lyndon, R. C., Schupp, P. E., 1977, "Combinatorial group theory Ergeb. Math. Grenzgeb., 89, Springer-Verlag, Berlin–New York.
16. Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D., 1966, "Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations Pure Appl. Math., 13, Intersci. Publ., John Wiley and Sons, Inc., New York.
17. Moldavanskii, D. I., 1968, “Certain subgroups of groups with a single defining relation”, *Siberian Math. J.*, vol.8 no 6, pp. 1039–1048.

Получено 25.06.2016 Принято 14.03.2017