

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 519.68:159.955

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-92-108

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ГИПОТЕЗ
В GEOGEBRA¹**

А. Р. Есаян, А. В. Якушин (г. Тула)

Аннотация

В данной статье предлагается несколько гипотез, связанных с чевианами треугольника и коническими сечениями, проходящими через основания этих чевиан или через иные точки. Для формулирования этих гипотез и их экспериментальной проверки были использованы возможности динамической математической среды *GeoGebra*. Проверка каждой из выдвинутых гипотез №1 – №9 осуществлялась на специально построенной для нее динамической модели. Во всех случаях удалось экспериментально обосновать справедливость предлагаемых гипотез. Поиском математических доказательств этих гипотез мы не занимались, и здесь есть над чем подумать читателю. Приведем формулировки трех из девяти выдвинутых гипотез. *Гипотеза №3.* В произвольном невырожденном остроугольном треугольнике основания трех высот и трех медиан, проведенных из разных вершин, лежат на одной окружности. *Гипотеза №6.* Пусть в невырожденном треугольнике из каждой вершины проведены медианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их центроиды лежат на одном эллипсе. *Гипотеза №9.* Пусть первая точка Ферма находится внутри произвольного невырожденного треугольника и через нее из каждой вершины проведены чевианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их вторые точки Наполеона лежат на одной гиперболе.

Ключевые слова: GeoGebra, динамическая модель, коническое сечение, треугольные центры, инверсия

Библиография: 17 названий.

**EXPERIMENTAL VALIDATION OF HYPOTHESES
IN GEOGEBRA**

A. R. Esayan, A. B. Yakushin (Tula)

Abstract

In this paper we propose several hypotheses related to cevias of triangle and the conic sections passing through the grounds of these cevians or via other points. To formulate these hypotheses and implement their experimental test have been used dynamical mathematics environment *GeoGebra*. Check each of hypotheses №1-№9 was carried out on a specially built for her dynamic model. In all cases, it was experimentally managed confirm the validity of the proposed hypothesis. Search of mathematical proofs of these hypotheses we did not make, and here is something to think about for the reader. Here is the wording of three of the nine hypotheses. *Hypothesis №3.* In an arbitrary non-degenerate acute-angled triangle, the grounds of the three altitudes and the grounds of three medians drawn from different vertices lie on the

¹Работа выполнена в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» на 2017-2019 годы (№27.6122.2017/БЧ) при поддержке гранта РФФИ №16-41-710194 р_а.

same circle. *Hypothesis №6.* Let from each vertex a non-degenerate triangle hold the median. Then this triangle is split into six triangles without common interior points so that their centroids lie on the same ellipse. *Hypothesis №9.* Let the first point of the Fermat is inside an arbitrary non-degenerate triangle, and through this point from each vertex hold cevian. Then the original triangle is split into six triangles without common interior points so that their second points of Napoleon lie on the same hyperbola.

Keywords: GeoGebra, dynamic model, conic, triangle centers, inversion

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Напомним некоторые определения и факты о чевианах, треугольных центрах и конических сечениях, которые нам необходимы для дальнейшего изложения. Чевианой треугольника называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с любой точкой на его противоположной стороне или ее продолжении [17]. Коническое сечение, или коника – это кривая, полученная пересечением плоскости с круговым конусом. Возможные типы конических сечений: эллипс, гипербола, парабола, точка, прямая и пара прямых. Первые три типа пересечений называют главными или невырожденными, о остальные вырожденными. В дальнейшем нам будут важны следующие известные факты [14]:

1. через любые пять точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно провести единственное невырожденное коническое сечение;
2. в декартовых прямоугольных координатах конические сечения описываются уравнением $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$, где коэффициенты a, b, c, d, e и f – действительные числа. Таким образом конические сечения являются кривыми второго порядка;
3. тип конического сечения K может быть определен по знаку дискриминанта $b^2 - 4ac$ [1,13,14]. Если $b^2 - 4ac < 0$, то K – эллипс, мнимый эллипс (пустое множество) или пара мнимых пересекающихся прямых (точка). Если, дополнительно, $a = c$ и $b = 0$, то K – окружность. Если $b^2 - 4ac > 0$, то K – гипербола ли пара пересекающихся прямых. Если $b^2 - 4ac = 0$, то K – парабола, пара параллельных прямых или пара мнимых параллельных прямых.

Кроме того, в рассмотрении будут участвовать некоторые треугольные центры – замечательные точки треугольника, которые в соответствии с энциклопедией Кимберлинга имеют имена X_s или $X(s)$ ($s = 1, 2, \dots, 11704$) [5-7]. В *GeoGebra* встроенными функциями можно оперировать лишь с первыми 3053 центрами. Мы будем иметь дело со следующими центрами:

- X_1 – **инцентр** (центр вписанной окружности; точка пересечения биссектрис треугольника; точка, равноудаленная от сторон треугольника);
- X_2 – **центроид** (точка пересечения медиан треугольника, центр тяжести, центр масс);
- X_3 – **центр описанной окружности** (точка пересечения медиатрис – перпендикуляров к серединам сторон треугольника («срединных» перпендикуляров));
- X_4 – **ортоцентр** (центр пересечения высот треугольника или их продолжений);
- X_6 – **точка Лемуана** (точка пересечения семиidian треугольника, то есть отрезков прямых, симметричных его медианам относительно соответствующих биссектрис);

- X_{13} – **первая точка Ферма** (точка Ферма-Торричелли). Строится она так. Если на сторонах треугольника вовне построены три правильных треугольника, то первая точка Ферма – это точка пересечения шести кривых – трех окружностей, описанных около этих треугольников, и трех прямых, соединяющих вершины исходного треугольника с противоположными вершинами построенных треугольников;
- X_{17} – **первая точка Наполеона** – это точки пересечения трех отрезков, соединяющих центроиды внешних правильных треугольников, построенных на сторонах исходного треугольника, с противоположными вершинами этого треугольника.
- X_{18} – **вторая точка Наполеона** определяется аналогично первой точке Наполеона, но правильные треугольники на сторонах исходного треугольника строятся не вовне, а внутрь его.
- X_{23} – **инверсия центроида** X_2 относительно описанной окружности, центр которой X_3 является полюсом инверсии [2,16] (см. рис. 9);
- X_{36} – **инверсия инцентра** X_1 относительно описанной окружности, центр которой X_3 является полюсом инверсии [2,16] (см. рис. 9).

2. Формулирование гипотез $\mathfrak{R}1 - \mathfrak{R}9$

В статье [11, с. 53-61] приведены несколько гипотез, связанных с коническими сечениями. Приведем интересующие нас утверждения, сохранив их авторскую нумерацию.

Гипотеза 4. В произвольном треугольнике проведены все медианы и все биссектрисы. Тогда основания этих медиан и биссектрис лежат на некотором эллипсе. *Гипотеза 5.* В произвольном остроугольном треугольнике проведены все высоты и все биссектрисы. Тогда основания этих высот и биссектрис лежат на некотором эллипсе.

Ниже приводятся несколько подобных, а также более общих утверждений, каждое из которых получило экспериментальное подтверждение (обоснование) на соответствующих динамических моделях, созданных в среде GeoGebra. Построение моделей описывается достаточно подробно, так что они легко воспроизводимы и могут быть использованы для повторения или дальнейшего продолжения экспериментов.

Гипотеза $\mathfrak{R}1$. Об основаниях шести чевиан. Пусть внутри произвольного невырожденного $\triangle ABC$ выбраны две несовпадающие точки D и E и через каждую из них из каждой вершины треугольника проведены чевианы. Тогда основания всех шести чевиан лежат на одной **конике**.

Гипотеза $\mathfrak{R}2$. Об основаниях трех чевиан и трех медиан. Пусть в произвольном невырожденном $\triangle ABC$ проведены три медианы, пересекающиеся в точке D и внутри треугольника выбрана точка E , отличная от D , через которую из каждой вершины проведены чевианы. Тогда основания трех чевиан и трех медиан лежат на одном **эллипсе**.

Гипотеза $\mathfrak{R}3$. Об основаниях трех высот и трех медиан остроугольного треугольника. В произвольном невырожденном остроугольном $\triangle ABC$ основания трех высот и трех медиан, проведенных из разных вершин, лежат на одной **окружности**.

Гипотеза $\mathfrak{R}4$. Об основаниях трех семидиан и трех биссектрис. В произвольном невырожденном $\triangle ABC$ основания трех семидиан и трех биссектрис, проведенных из разных вершин, лежат на одном **эллипсе**.

Несколько слов о гипотезах $\mathfrak{R}1-\mathfrak{R}4$. Гипотеза $\mathfrak{R}1$ достаточно общая. В гипотезе $\mathfrak{R}2$ по сравнению с $\mathfrak{R}1$ более жесткие ограничения на одну из троек чевиан, и это позволило утверждать, что тип результирующей коники – эллипс. В гипотезе $\mathfrak{R}3$ по сравнению с $\mathfrak{R}1$ более жесткие ограничения и на треугольник, и на обе тройки чевиан, и это позволило утверждать, что тип

результатирующими кониками – окружность. Что касается гипотезы $\mathfrak{H}4$, то можно сформулировать ряд ее аналогов, когда тройки чевиан проходят через некоторые другие треугольные центры, а построенная для $\mathfrak{H}4$ динамическая модель пригодна для проведения экспериментов с любыми центрами. Кстати, приведенные выше гипотезы 4 и 5 относятся именно к такой серии.

В уже упоминавшейся нами статье [11, с. 53-61] кроме гипотез 4 и 5 сформулированы также приведенные ниже гипотезы 1-3. В отличие от гипотез 4 и 5 в них речь идет не об основаниях соответствующих конкретных чевиан, а о центрах некоторых вписанных окружностей.

Гипотеза 1. Медианы. Три медианы произвольного треугольника разбивают его на шесть треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе.

Гипотеза 2. Высоты. Три высоты произвольного остроугольного треугольника разбивают его на шесть треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе.

Гипотеза 3. Биссектрисы. Три биссектрисы произвольного треугольника разбивают его на шесть треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе.

Последняя из этих гипотез получила подтверждение в статье [10, с. 205-217], где профессор Осипов Н. Н. привел компьютерное доказательство гипотезы 3 с использованием символьных вычислений в системе *Maple* и назвал полученное утверждение теоремой об инцентрах. Что касается первых двух гипотез, то Осипов Н. Н. справедливо замечает, что они ошибочны. И это легко проверяется построением контпримеров в соответствующих динамических моделях созданных, например, в *GeoGebra*. Ниже формулируется ряд дополнительных гипотез, которые можно отнести к обобщению утверждений типа гипотезы 3 или к их аналогам. Динамические модели для экспериментального обоснования этих гипотез приведены в последующих пунктах.

Гипотеза $\mathfrak{H}5$. О трех чевианах и центрах шести описанных окружностей. Пусть три чевианы пересекаются внутри невырожденного треугольника в одной точке. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что центры их описанных окружностей лежат на одной **конице**.

Гипотеза $\mathfrak{H}6(X_2 \& X_2)$. О трех медианах и шести центроидах. Пусть в невырожденном треугольнике из каждой вершины проведены медианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их центроиды лежат на одном **эллипсе**.

Гипотеза $\mathfrak{H}7(X_{13} \& X_{23})$. О трех чевианах через первую точку Ферма и шести инверсий центроидов. Пусть первая точка Ферма находится внутри произвольного невырожденного треугольника и через нее из каждой вершины проведены чевианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что инверсии их центроидов относительно описанных окружностей лежат на одном **эллипсе**.

Гипотеза $\mathfrak{H}8(X_{13} \& X_{36})$. О трех чевианах через первую точку Ферма и шести инверсий инцентров. Пусть первая точка Ферма находится внутри произвольного невырожденного треугольника и через нее из каждой вершины проведены чевианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что инверсии их инцентров относительно описанных окружностей лежат на одном **эллипсе**.

Гипотеза $\mathfrak{H}9(X_{13} \& X_{18})$. О трех чевианах через первую точку Ферма и шести вторых точках Наполеона. Пусть первая точка Ферма находится внутри произвольного невырожденного треугольника и через нее из каждой вершины проведены чевианы. Тогда исходный треугольник разбивается на шесть треугольников без общих внутренних точек так, что их вторые точки Наполеона лежат на одной гиперболе.

Заметим, что можно было бы продолжать формулирование гипотез типа $\mathfrak{H}6-\mathfrak{H}9$. Предложенная ниже для $\mathfrak{H}6$ модель позволяет это делать. Более того, некоторые из таких утвержде-

ний ($X_m \& X_k, m, k = 1, 2, \dots$) из разряда гипотез уже перешли в доказанные факты. Речь идет о гипотезах $X_2 \& X_3$ и $X_1 \& X_1$.

Утверждение $X_2 \& X_3$. Центроид и центры шести описанных окружностей. *Три медианы невырожденного треугольника разбивают его на шесть треугольников без общих внутренних точек. При этом центры описанных около этих треугольников окружностей лежат на одной окружности.*

Данное утверждение было сформулировано математиком Ф. Ламуном (*Floor van Lamoen*) в 2000 г., а в 200 г. его доказательство было представлено Кин Я. Ли (*Kin Y. Li*) [3,7,8,12]. Окружность, на которой лежат центры упомянутых выше описанных треугольников, называется окружностью Ламуна, а ее центр в энциклопедии Кимберлинга получил имя $X(1153)$ (или X_{1153}) [7].

Утверждение $X_1 \& X_1$. Инцентр и центры шести вписанных окружностей. *Три биссектрисы невырожденного треугольника разбивают его на шесть треугольников без общих внутренних точек. Центры вписанных в эти треугольники окружностей лежат на некотором эллипсе.*

В этом утверждении мы узнаем гипотезу 3, которая, как это было отмечено выше, в статье [10, с. 205-217] получила подтверждение и название теоремы об инцентрах.

3. Построение модели для гипотезы $\Re 1$

Для экспериментальной проверки гипотезы $\Re 1$ об основаниях шести чевиан построим соответствующую динамическую модель. Сделать это можно следующей последовательностью действий:

- инструментом “ Многоугольник” выведем на полотно $\triangle ABC$;
- инструментом “ Точка на объекте” поместим внутрь $\triangle ABC$ две точки D и E и изменим стиль их вывода (размер, цвет);
- инструментом “ Луч” проведем в треугольнике из каждой вершины по два луча, проходящие соответственно через точки D и E ;
- инструментом “ Пересечение” отметим шесть точек пересечения проведенных лучей со сторонами $\triangle ABC$;
- удалим с чертежа “лишние” детали и изменим стиль вывода его отдельных элементов:
 - выделим на панели объектов все лучи и через контекстное меню сделаем невидимыми их метки;
 - выделим на панели объектов все отрезки и через контекстное меню сделаем невидимыми их метки;
 - выделим на панели объектов любых 5 из 6 точек пересечения лучей со сторонами треугольника и через контекстное меню сделаем невидимыми их метки. Через панель установок изменим стиль вывода шестой точки пересечения (размер, цвет). Пусть, например, Н имя этой точки;
 - через панель установок сделаем заливку треугольника более светлой или вообще уберем ее;

- инструментом “ Коника по 5 точкам” проведем коническое сечение через те пять точек пересечения лучей со сторонами треугольника, у которых спрятаны обозначения. Визуально кажется, что и шестая точка H лежит на сформированной конике (см. рис. 2). Через панель установок изменим размер и цвет выведенной коники;
- создадим некоторый дополнительный проверочный инструмент, позволяющий делать заключение о нахождении точки H на конике не только из визуальных соображений, но и с помощью вычислений. Для этого продолжим формирование модели следующим образом. Инструментом “ Кнопка” поместим на полотно управляющий элемент – кнопку общего назначения, задав для нее в открывшемся одноименном окне заголовок “ H лежит на $d?$ ” и *GeoGebra*-скрипт в виде команды *Relation*[H, d], действующий по событию *On Click*. В дальнейшем, в любой момент времени при работе с моделью щелчок левой кнопкой мыши по данной кнопке будет приводить к выполнению указанной команды, то есть к выводу информационной панели “*Отношение*”, показанной на рис. 1 слева, на которой размещено сообщение об отношении объектов d и H в форме “ H лежит на d ” или “ H не лежит на d ”. Устанавливается это с помощью числовых вычислений с 15 значащими цифрами. При этом, дополнительный щелчок левой кнопкой мыши по кнопке “*More*” (больше, еще) приводит к выводу следующей панели, показанной на рис. 1 справа. На ней демонстрируется те же самые сообщения, но при их формировании по возможности используются символьные вычисления.

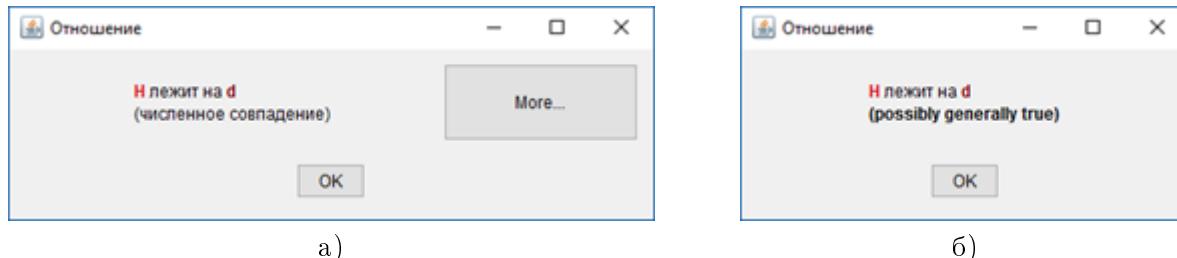


Рис. 1: Панели сообщений при выполнении команды *Relation*[d, H]

Фактически модель для проведения экспериментов создана (см. рис. 2). На ней свободными являются вершины A, B и $C \triangle ABC$, а также точки D и E внутри треугольника. Протаскивая мышью по полотну любую вершину треугольника, мы будем менять его форму. Протаскивая мышью точки D и E внутри $\triangle ABC$ мы будем менять чевианы, точки их пересечения со сторонами треугольника, а значит и конику d . Причем пять точек, по которым коника строилась, естественно на ней и останутся. Но при любых указанных действиях и шестая точка H будет оставаться на конике. Это демонстрируется визуально и при необходимости может быть подтверждено вычислениями щелчком по кнопке “ H лежит на $d?$ ”.

Проведение экспериментов с построенной динамической моделью сильно упроститься и ускориться, если на ней вывести ряд дополнительных управляющих элементов для проверки выполнения всех условий, при которых желательно обосновать гипотезу $\mathfrak{H}1$ (см. рис. 3). Кроме того, чтобы не было необходимости постоянно щелкать мышью по кнопке “ H лежит на $d?$ ” для получения оперативной информации, соответствующей названию кнопки, можно поступить так. При перемещении по полотну любых свободных точек автоматически проводить вычисления и в режиме реального времени выводить, например, такое сообщение “ H лежит на $d \rightarrow \text{true}$ ” (или “ H лежит на $d \rightarrow \text{false}$ ”). Организовать это можно так. Уравнение текущей коники d можно видеть на панели объектов в форме “ $d : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ ”, где a, b, c, d, e и f – действительные числа. Командой *Coefficients*[d] можно создать список

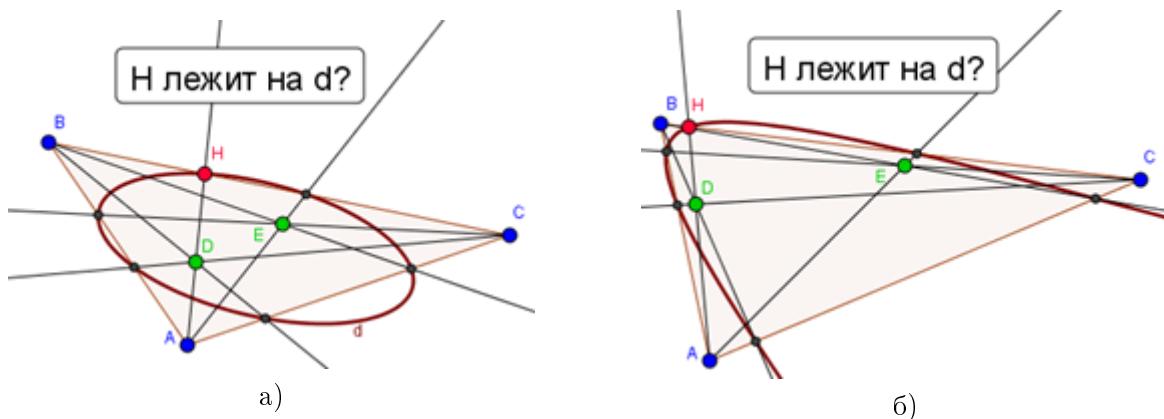


Рис. 2: Состояния модели для экспериментальной проверке гипотезы №1 (а – эллипс, б - гипербола)

коэффициентов коники в виде $\{a, c, f, b, d, e\}$. Поэтому, если через строку ввода сформировать два списка $li = Coefficients[d]$ и

```
lis={x[H]^2, y[H]^2, 1, x[H]*y[H], x[H], y[H]}
```

, а инструментом “**ABC Текст**” создать проверочную текстовую надпись с постоянной и переменной частями вида

Н лежит на $d \rightarrow \boxed{\text{Sum}[li * lis] == 0}$

,

то переменная часть надписи, расположенная в специальном окаймляющем вычислительном боксе, всегда будет сигнализировать нам о том, лежит ли точка Н на конике d (*true*) или нет (*false*). Соответствующая надпись на рис. 3 выведена и расположена на предпоследней строке.

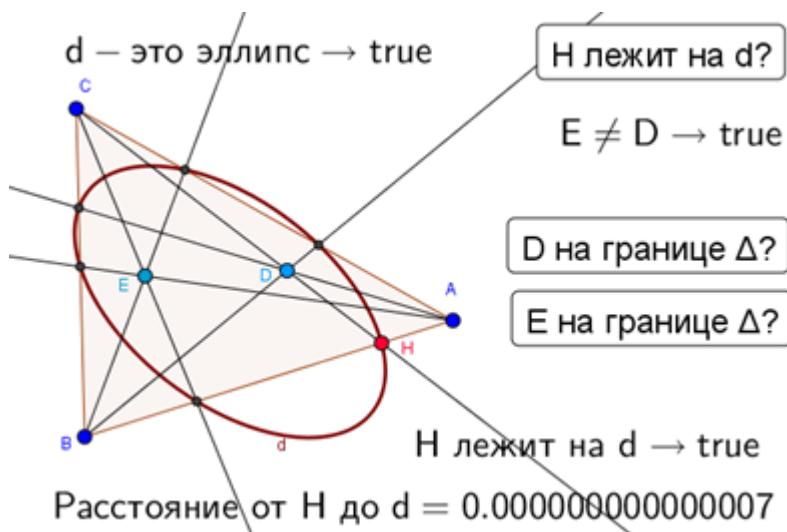


Рис. 3: Модель рис.2, дополненная проверками данных

Вместе с подсказкой “ H лежит на $d \rightarrow \dots$ ” можно также выводить дополнительную оперативную подсказку о текущем расстоянии между точкой H и коникой d . Для этого инструментом “**ABC Текст**” следует создать проверочную текстовую надпись с постоянной и переменной частями вида

$$\text{Расстояние от } H \text{ до } d \rightarrow \boxed{\text{Distance}[H, d]}$$

,

и для расстояния установить вывод с округлением до 15 разрядов. Соответствующая надпись на рис. 3 выведена и расположена на последней строке.

Следует иметь ввиду, что две последние надписи на модели рис. 3 хотя и выводятся оперативно, но более точные вычисления реализуются верхней кнопкой “ H лежит на $d?$ ”. Так что при экспериментах в тех или иных сомнительных ситуациях щелчок по этой кнопке становится необходимым.

Поясним, как сформированы на модели рис. 3 другие управляющие элементы, связанные с проверкой выполнения условий, при которых обосновывается гипотеза $\mathfrak{R}1$:

1. проверочная надпись “ $E \neq D \rightarrow \text{true}$ ” (или “ $E \neq D \rightarrow \text{false}$ ”) формируется инструментом “**ABC Текст**” и в реальном времени выводится текстовым объектом с постоянной и переменной частями вида “ $E \neq D \rightarrow \boxed{E \neq D}$ ”;
2. кнопка общего назначения с именем “ D на границе $\Delta?$ ” создается инструментом “**Кнопка**” при скрипте “*Relation[D, poly1]*”. Щелчок по кнопке приводит к выводу панели с соответствующим сообщением, показанной слева на рис. 4;
3. кнопка общего назначения с именем “ E на границе $\Delta?$ ” создается и работает аналогично кнопке “ D на границе $\Delta?$ ”;
4. надпись “ $d - \text{эллипс} \rightarrow \text{true}$ ” (или “ $d - \text{эллипс} \rightarrow \text{false}$ ”) формируется инструментом “**ABC Текст**” и в реальном времени выводится текстовым объектом вида “ $d - \text{эллипс} \rightarrow \boxed{\text{li}(4)^2 - 4 * \text{li}(1) * \text{li}(2) < 0}$ ”.

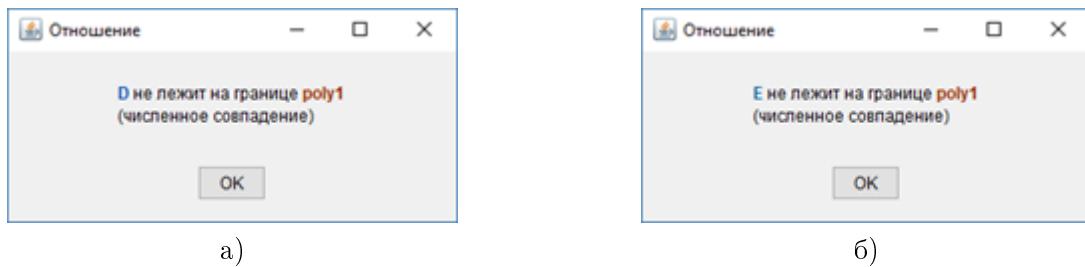


Рис. 4: Панели сообщений при выполнении команд *Relation[D, poly1]* и *Relation[E, poly1]*

4. Построение модели для гипотезы $\mathfrak{R}2$

Модель для экспериментального обоснования гипотезы $\mathfrak{R}2$ об основаниях трех чевиан и трех медиан строится по аналогии с моделью для $\mathfrak{R}1$ (см. рис. 5). Незначительные отличия здесь обусловлены тем, что в данном случае точка D как центроид ΔABC не является свободной точкой. Отсюда и некоторые изменения в проверочных и информационных сообщениях.

При этом D выводится по команде $\text{TriangleCenter}[A, B, C, k]$ при $k = 2$, где k – значение ползунка. Сделано это для того, чтобы модель была приспособлена для экспериментов не только, когда D – центроид, но и при точке D, являющейся любым другим треугольным центром.

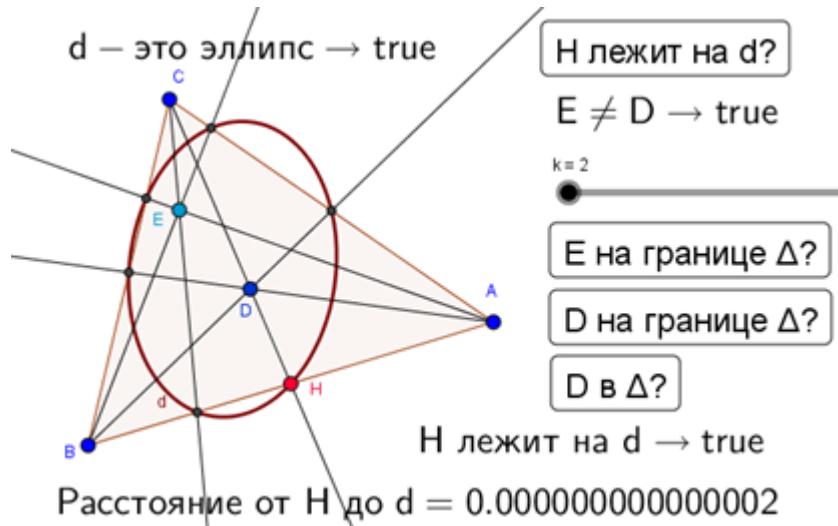


Рис. 5: Модель для экспериментальной проверки гипотезы №2

Итак, последовательность действий для построения модели, представленной на рис. 5, может быть такой:

- инструментом “ Многоугольник” выведем на полотно $\triangle ABC$;
- инструментом “ Ползунок” разместим на полотне управляющий элемент ползунок с именем k , минимальным значением 1, максимальным значением 50, шагом 1 и текущим значением $k = 2$;
- через строку ввода командой $\text{TriangleCenter}[A, B, C, k]$ выведем точку пересечения медиан $\triangle ABC$, то есть центроид D ;
- инструментом “ Точка на объекте” поместим внутрь $\triangle ABC$ точку E ;
- инструментом “ Луч” проведем в треугольнике из каждой вершины по два луча, проходящие соответственно через точки D и E ;
- инструментом “ Пересечение” отметим шесть точек пересечения проведенных лучей со сторонами $\triangle ABC$ и у пяти из них спрячем обозначения;
- удалим с чертежа “лишние” детали и изменим стиль вывода его отдельных элементов;
- инструментом “ Коника по 5 точкам” проведем коническое сечение через те пять точек пересечения лучей со сторонами треугольника, у которых спрятаны обозначения. В результате будет выведен эллипс и визуально кажется, что и шестая точка H лежит на сформированной конике. Через панель установок изменим размер и цвет эллипса;
- инструментом “ Кнопка” создадим кнопку общего назначения “ H лежит на d ?”. Сделать это можно точно так же, как и при построении модели для №1;

- дополнительными кнопками общего назначения “ D на границе $\Delta?$ ” и “ D в $\Delta?$ ” организуется соответственно проверка нахождения точки D на границе ΔABC (скрипт “*Relation[D, poly1]*”) и в пределах ΔABC (скрипт “*IsInRegion[D, poly1]*”). При $k = 2$ такие проверки не нужны, но если с моделью будут проводиться эксперименты при других значениях k , то они не окажутся лишними. Отметим, что щелчок по кнопке “ D в $\Delta?$ ” формирует и выводит на панель “*Объекты*” переменную со значением *true* – точка внутри или на границе ΔABC , или *false* – точка вне пределов ΔABC .

В экспериментах с построенной моделью свободными являются точки A , B и C , а также точка E , перемещающаяся в пределах ΔABC . Оправждения гипотезы $\Re 2$ получить не удалось.

5. Построение моделей для гипотез $\Re 3$ и $\Re 4$

Модель для экспериментальной проверки гипотезы $\Re 3$ – об основаниях трех высот и трех медиан остроугольного треугольника показана на рис. 6. В ней обе точки D и E свободными не являются, а их позиция жестко фиксируется двумя управляющими элементами: D – ползунком k и E – ползунком m . Минимальные значения ползунков – 1, максимальные значения – 50 и шаги – 1.

Для проверки $\Re 3$ следует использовать установки $k = 4$ и $m = 2$, а ползунки выводить соответственно командами *TriangleCenter[A, B, C, k]* при $k = 4$ и *TriangleCenter[A, B, C, m]* при $m = 2$.

Несколько слов о проверочных и информационных сообщениях. Здесь они незначительно отличаются от сообщений для модели, показанной на рис. 5:

- надпись “ d – это эллипс $\rightarrow \dots$ ” заменяется надписью “ d – это окружность $\rightarrow \dots$ ”, которая формируется текстовым объектом с постоянной и переменной частями следующего вида:

$$\text{“}d\text{ – это окружность } \rightarrow \boxed{\text{li}(4)^2 - 4 * \text{li}(1) * \text{li}(2) < 0 \wedge \text{li}(4) == 0 \wedge \text{li}(1) == \text{li}(2)}\text{ ”};$$

- надпись “ ΔABC – остроугольный $\rightarrow \dots$ ” формируется текстовым объектом с постоянной и переменной частями следующего вида:

$$\text{“}\Delta ABC\text{ – остроугольный } \rightarrow \boxed{\text{Angle}[C, A, B] < 90^\circ \wedge (\text{Angle}[A, B, C] < 90^\circ) \wedge (\text{Angle}[B, C, A] < 90^\circ)}$$

Экспериментальную проверку гипотезы $\Re 4$ – об основаниях трех семидиан и трех биссектрис произвольного треугольника можно осуществить практически на той же самой модели, которая использовалась для обоснования гипотезы $\Re 3$ (см. рис. 6). В данном случае ползунки следует установить в значения $k = 6$ и $m = 1$, первую надпись удалить, а второй – вернуть ее прежний вид “ d – это эллипс $\rightarrow \dots$ ”.

Кроме того, модель рис. 6 можно использовать и для выявления и обоснования других гипотез, связанных с парами троек чевиан, проходящих через те или иные треугольные центры. При этом диапазоны для ползунков возможно придется изменить. Например, можно осуществить экспериментальную проверку приведенных выше гипотез Л. Штейнгарц – гипотеза 4 ($k = 2$, $m = 1$) и гипотеза 5 ($k = 4$, $m = 1$).

В экспериментах с построенными моделями свободными являются только точки A , B и C . Оправждения гипотез $\Re 3$ и $\Re 4$ получить не удалось.

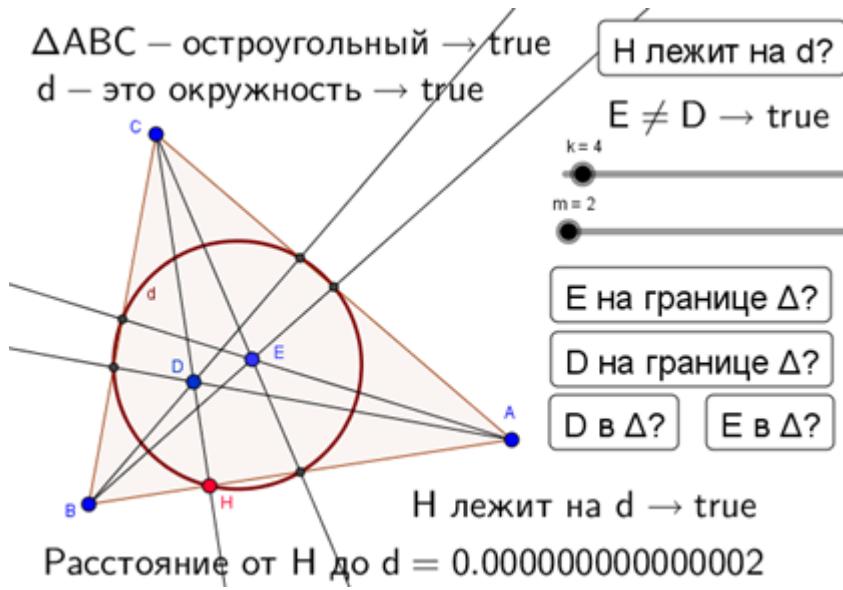


Рис. 6: Модель для экспериментальной проверки гипотез $\Re3$ ($m = 4, k = 2$) и $\Re4$ ($m = 6, k = 1$)

6. Построение модели для гипотезы $\Re5$

Модель для экспериментальной проверки гипотезы $\Re5$ – о трех чевианах и центрах шести описанных окружностей показана на рис. 7. В ней свободными являются вершины A, B и C $\triangle ABC$, а также, находящаяся внутри треугольника точка пересечения чевиан – D . Построить динамическую модель для экспериментальной проверки гипотезы $\Re5$ можно следующей последовательностью действий:

- инструментом “ Многоугольник” выведем на полотно $\triangle ABC$ и инструментом “ Точка на объекте” поместим внутрь треугольника точку D ;
- инструментом “ Луч” проведем в треугольнике луч из каждой вершины через точку D и инструментом “Пересечение” отметим 3 точки E, F и G пересечения этих лучей со сторонами $\triangle ABC$. Тем самым исходный $\triangle ABC$ окажется разбитым на 6 треугольников: $\triangle DAE, \triangle DBE, \triangle DBF, \triangle DCF, \triangle DCG$ и $\triangle DAG$;
- удалим с чертежа “лишние” детали и изменим стиль вывода его отдельных элементов, например, изменим размер и цвет точки D ;
- инструментом “ Ползунок” установим одноименный управляющий элемент k с минимальным значением 1, максимальным значением 50, шагом 1 и текущим значением 3. Этот ползунок даст нам возможность экспериментировать с построенной моделью, задавая в каждом из 6 треугольников не только центры описанных окружностей ($k = 3$), но и иные треугольные центры ($k = 1, 2, 4, 5 \dots$);
- в треугольниках DAE, DBE, DBF, DCF, DCG и DAG выведем центры описанных окружностей. Для этого при значении ползунка $k = 3$ выполним через строку ввода 6 команд $TriangleCenter[X, Y, Z, k]$, где X, Y и Z – вершины соответствующего треугольника. Получим точки I, J, H, M, K и L . Изменим размер и цвет точки L , а обозначения первых пяти точек спрячем;

- инструментом “ Коника по 5 точкам” проведем коническое сечение через пять точек со спрятанными обозначениями (центр L не используем). Визуально кажется, что и шестая точка L лежит на этой же конике (см. рис. 3). Через панель установок изменим толщину линии и цвет коники;
- теми же способами, что и при построении моделей для проверки гипотез $\mathfrak{H}1$ и $\mathfrak{H}2$, выведем ряд дополнительных проверочных надписей. Сформируем кнопку общего назначения с именем “ L лежит на $d?$ ” и скриптом “ $Relation[L, d]$ ”. Щелчки по кнопке будут приводить к выводу панели с сообщением “ L лежит на $d? \rightarrow true$ ” или “ L лежит на $d? \rightarrow false$ ”. Через строку ввода сформируем два списка $li = Coefficients[d]$ и

$lis=\{x[L]^2, y[L]^2, 1, x[L]*y[L], x[L], y[L]\}$

и инструментом “ Текст” создадим текстовый объект с постоянной и переменной частями вида “ L лежит на $d \rightarrow Sum[li * lis]==0$ ”. По нему будет выводится надпись, аналогичная предыдущей, но с вычислениями в реальном времени. Инструментом “ Текст” создадим текстовый объект с постоянной и переменной частями вида “От L до $d = Distance[L, d]$ ”. По нему будет выводится текущее расстояние от L до d . Установим для него вывод с 15 знаками после десятичной точки. И, наконец, инструментом “ Текст” сформируем текстовый объект с постоянной и переменной частями вида: “ $d - это эллипс \rightarrow li(4)^2 - 4 * li(1) * li(2) < 0$ ”. По нему будет выводиться тип текущей коники (эллипс – $true$, не эллипс – $false$).

Тем самым построение модели оказывается завершенным и можно приступить к проведению экспериментов. На модели (см. рис. 7) свободными являются вершины A , B и C $\triangle ABC$, а также точка D пересечения чевиан внутри треугольника. Протаскивая мышью по полотну любую вершину треугольника, мы будем менять его форму. Протаскивая мышью точку D мы будем менять чевианы, а также точки их пересечения со сторонами $\triangle ABC$, а значит и саму конику d . Причем пять точек, по которым коника строилась, естественно на ней и останутся. Но оказывается, что при любых указанных действиях, оставляющих D внутри $\triangle ABC$, и шестая точка L будет оставаться на конике, являющейся эллипсом. Отметим, что щелчком мыши по кнопке общего назначения “ L лежит на $d?$ ” реализуются более точные системные вычисления, по сравнению с оперативными вычислениями по текстовым объектам.

В экспериментах с построенной моделью опровержения гипотезы $\mathfrak{H}5$ получить не удалось. Любопытно, что в тех случаях, когда коникой оказывалась гипербола, все шесть точек размещались на ее одной ветви.

В связи с гипотезой $\mathfrak{H}5$ возникает вопрос о наличии ее аналогов, для которых центры описанных окружностей в 6 треугольниках заменены какими-либо иными треугольными центрами, например, точками пересечения медиан, точками Лемуана, точками Нагеля и т. п. Ответить на этот вопрос можно с помощью той же самой динамической модели, меняя в ней значение ползунка k от 1 до n ($n \leq 3053$). При этом треугольные центры будут перебираться в соответствии с их расположением в энциклопедии центров Кимберлинга [4-6]. Оказалось, что в диапазоне k от 1 до 500 гипотеза верна только для $k = 3$, то есть для центров описанных окружностей. При этом модель получилась настолько удобной, что построение всех контрпримеров для k от 1 до 500 ($k \neq 3$) заняло не более 20 минут времени.

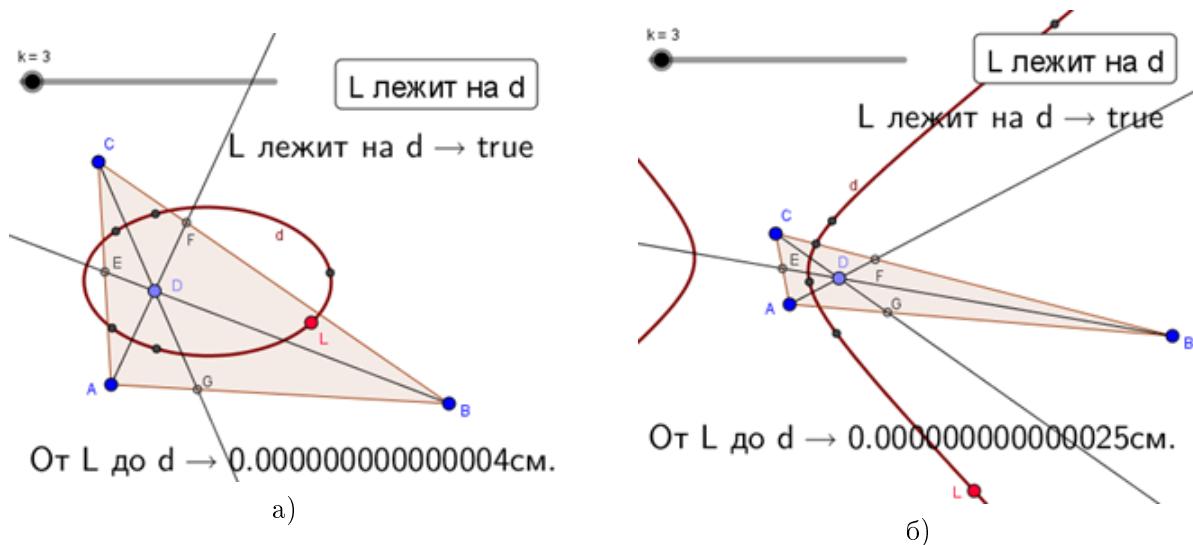


Рис. 7: Состояния модели при экспериментальной проверке гипотезы №5
(а – эллипс, б – гипербола)

7. Построение моделей для гипотез №6-№9

Для экспериментальной проверки гипотезы №6 создана динамическая модель, представленная на рис. 8. В ней номер первого треугольного центра, с помощью которого реализуется разбиение исходного треугольника на шесть треугольников без общих внутренних точек, задается ползунком k , а номер второго треугольного центра, который определяется в каждом из шести построенных треугольников, задается ползунком m . Что касается надписей на рис. 8, то они формируются теми же самыми способами, что и соответствующие надписи для модели гипотезы №5 и на этом мы останавливаться не будем.

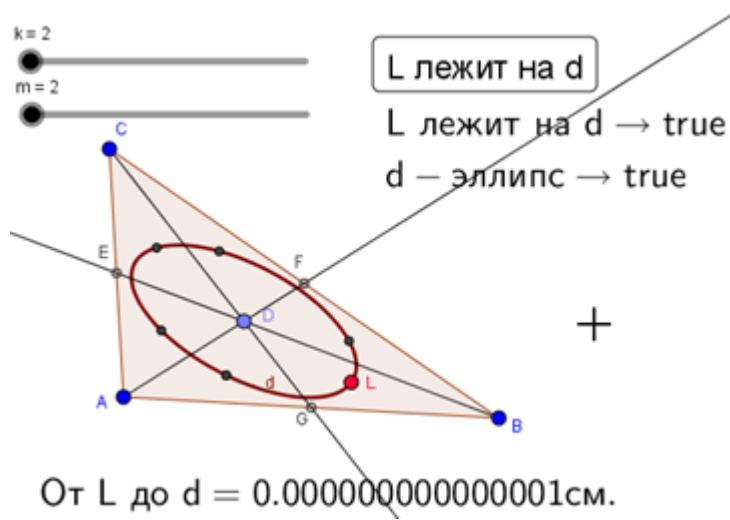


Рис. 8: Динамическая модель для экспериментальной проверки гипотезы №6

В гипотезах №7 и №8 используются треугольные центры X23 и X36. На рис. 9 поясняется их суть соответственно, как инверсий центроида X_2 и инцентра X_1 относительно описанной окружности. Надписи на рисунке сформированы следующими текстовыми объектами с посто-

янной и переменной частью:

$$X_3X_2 \cdot X_3X_{23} = X_3B^2$$

$$\rightarrow \boxed{Distance[X_3, X_2] * Distance[X_3, X_{23}] == Distance[X_3, B]^2}$$

$$X_3X_1 \cdot X_3X_{36} = X_3B^2$$

$$\rightarrow \boxed{Distance[X_3, X_1] * Distance[X_3, X_{36}] == Distance[X_3, B]^2}$$

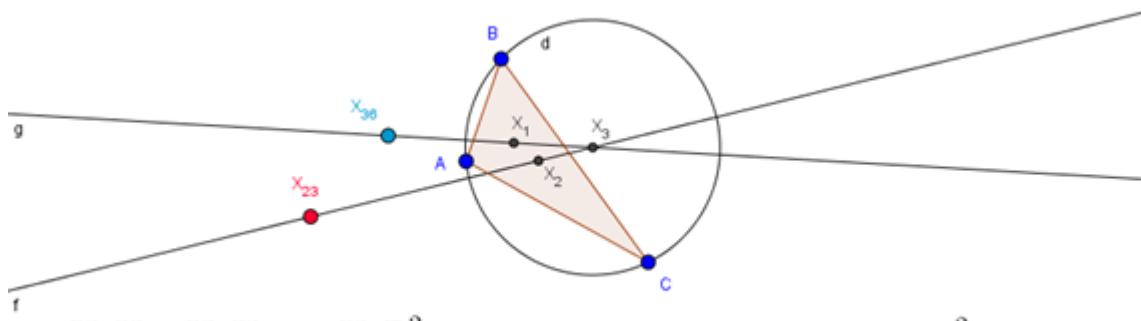


Рис. 9: Треугольные центры X_{23} и X_{36} – инверсии центроида X_2 и инцентра X_1 относительно описанной окружности

Для экспериментальной проверки гипотез $\Re7$ - $\Re9$ создана динамическая модель, представленная на рис. 10. В гипотезах предполагается, что первая точка Ферма X_{13} для $\triangle ABC$ является его внутренней точкой. А это бывает тогда и только тогда, когда каждый внутренний угол $\triangle ABC$ не превосходит 120° . Поэтому поясним создание лишь последней новой надписи на рис. 10, которая оперативно информирует нас о том, что “Все углы $\triangle ABC < 120^\circ \rightarrow true$ ” или “Все углы $\triangle ABC < 120^\circ \rightarrow false$ ”. Делается это с помощью текстового объекта с переменной и постоянной частями, сформированного инструментом “**Текст**” в виде:

Все углы $\triangle ABC < 120^\circ \rightarrow true$

$$\boxed{(\text{Angle}[B, A, C] < 120^\circ) \wedge (\text{Angle}[A, C, B] < 120^\circ) \wedge (\text{Angle}[C, B, A] < 120^\circ)}$$

На моделях рис. 8 и 10 свободными являются только вершины $\triangle ABC$. В экспериментах с построеннымами моделями опровержения гипотез $\Re6$ - $\Re9$ получить не удалось.

Замечание. С помощью моделей рис. 8 и 10 можно было бы обнаружить и экспериментально проверить иные гипотезы, связанные с треугольными центрами и кониками. Мы этого делать не будем, но предлагаем самостоятельно сформулировать и обосновать гипотезы: $\Re10 = X_4 \& X_{102}$, $\Re11 = X_4 \& X_{109}$, $\Re12 = X_{13} \& X_1$, $\Re13 = X_{13} \& X_{11}$, $\Re14 = X_{13} \& X_{17}$, $\Re15 = X_{13} \& X_{119}$ и $\Re16 = X_{13} \& X_{125}$, считая, что центры X_4 и X_{13} находятся внутри исходного треугольника.

8. Заключение

Система Geogebra, предоставляя простые и удобные инструменты для построения динамических моделей геометрических объектов, позволяет высказывать относительно этих объектов

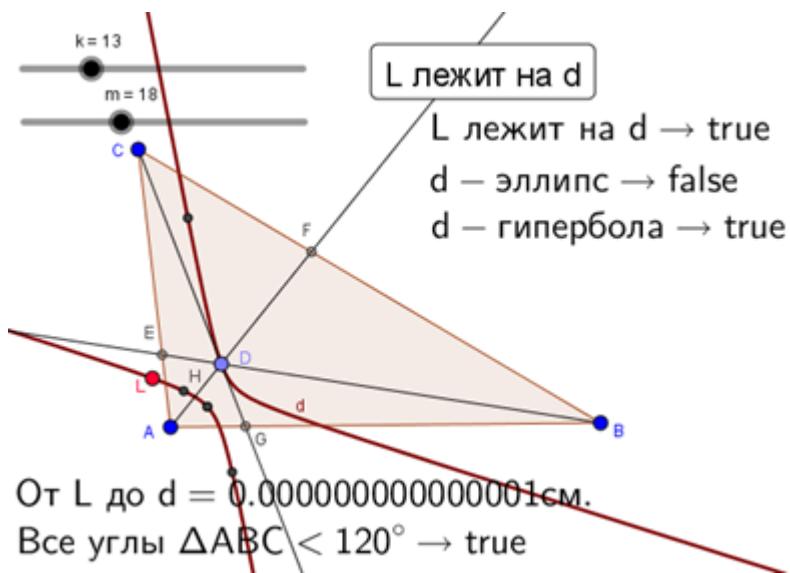


Рис. 10: Динамическая модель для экспериментальной проверки гипотез R7-R9

гипотезы, то есть те или иные правдоподобные утверждения. Естественно, что в дальнейшем всякая гипотеза нуждается или в доказательстве, превращаясь в научный факт, или в опровержении. Доказательство может быть только строго математическим без использования или с использованием средств систем символьных (аналитических) вычислений. Опровержение гипотезы может задаваться контпримером, построенным с помощью той же самой динамической модели, которая и позволила ее сформулировать. Если эксперименты с моделью по поиску контрпримеров к успеху не приводят, то мы получаем косвенное обоснование (подтверждение) выдвинутой гипотезы. В данной статье предложено несколько гипотез, связанных с коническими сечениями, проходящими через те или иные точки треугольника. Все выдвинутые гипотезы были подвергнуты экспериментальной проверке и контрпримеров найдено не было. В наши планы входило построение динамических моделей, формирование с их помощью гипотез и экспериментальное их подтверждение, но не доказательство этих гипотез, хотя с использованием систем символьных вычислений *Maple*, *Mathematica* и т. п., в некоторых случаях сделать это, наверное, было бы несложно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка, –М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.
2. Бакельман И. Я. Инверсия. Популярные лекции по математике, Вып. 44, М., Наука, 1966.
3. Ha N. M., 2005, Another Proof of van Lamoen's Theorem and Its Converse. Forum Geometricorum, volume 5, pages 127-132.
4. Kimberling, C. Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle, Mathematics Magazine 67 (3), 1994, 163–187.
5. Kimberling, C. Encyclopedia of Triangle Centers, available at <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
6. Kimberling, C. Triangle Centers and Central Triangles, Congr. Numer. 129, 1998. p. 1-295.

7. Kimberling, C. X(1153) = Center of the van Lemoen circle, in the Encyclopedia of Triangle Centers Accessed on 2014-10-10
8. Kin Y. Li (2001), Concyclic problems. Mathematical Excalibur, volume 6, issue 1, pages 1-2.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968
10. Осипов Н. Н. Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах. Математическое просвещение. Третья серия, выпуск 18, М.: Изд. МЦНМО, 2014, с. 205-216
11. Штейнгарц Л. А. Орбиты Жукова и теорема Морлея. Математика в школе, № 6, 2012 г. с. 53-61
12. Weisstein Eric W., van Lamoen circle at Mathworld Accessed ot 2014-10-10.
13. <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=klassifikatsiya-linii-po-invariantam>
14. http://wp.wiki-wiki.ru/wp/index.php/Коническое_сечение
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Van_Lamoen_circle
16. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Инверсия_\(геометрия\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/Инверсия_(геометрия))
17. http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Чевы

REFERENCES

1. Akopyan A.V., Zaslavsky A. A., Geometric properties of curves of the second order, -Moscow: Mtsnmo, 2007. — 136 p.
2. Bakelman I. Inversion. Popular lectures on mathematics, Vol. 44, Moscow, Nauka, 1966.
3. Ha N. M. (2005), Another Proof of van Lamoen's Theorem and Its Converse. Forum Geometricorum, volume 5, pages 127-132.
4. Kimberling, C. Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle, Mathematics Magazine 67 (3), 1994, 163–187.
5. Kimberling, C. Encyclopedia of Triangle Centers, available at <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
6. Kimberling, C. Triangle Centers and Central Triangles, Congr. Numer. 129, 1998. p. 1-295.
7. Kimberling, C. X(1153) = Center of the van Lemoen circle, in the Encyclopedia of Triangle Centers Accessed on 2014-10-10
8. Kin Y. Li (2001), Concyclic problems. Mathematical Excalibur, volume 6, issue 1, pages 1-2.
9. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers/ M.: Nauka, 1968
10. Osipov N. N., A computer proof of the theorem about incentro. Mathematical education. Third series, volume 18, M.: Ed. Mtsnmo, 2014, pp. 205-216
11. Steingarts L. A., Orbits of Zhukov and theorem of Morley. Mathematics in school, №. 6, 2012, pp. 53-61
12. Eric W. Weisstein, van Lamoen circle at Mathworld Accessed ot 2014-10-10.

13. <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=klassifikatsiya-linii-po-invariantam>
14. [http://wp.wiki-wiki.ru/wp/index.php/Коническое сечение](http://wp.wiki-wiki.ru/wp/index.php/Коническое_сечение)
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Van_Lamoen_circle
16. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Инверсия_\(геометрия\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/Инверсия_(геометрия))
17. http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Чевы

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Институт стратегии развития образования Российской академии образования.
Получено 12.11.2016 Принято 13.03.2017