ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 517.587 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-65-72

ОБОБЩЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО РЯДА ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЁВА

Л. К. Додунова, Д. Д. Охатрина (г. Нижний Новгород)

Аннотация

Многочлены Чебышёва находят широкое применение в теоритических и практических исследованиях. В последнее время они приобретают особое значение, например, в квантовой химии. В работе [1] указаны их важные свойства, "обеспечивающие более быструю сходимость разложений функций в ряд по многочленам Чебышёва, по сравнению с их разложением в степенной ряд или в ряд по другим специальным многочленам или функциям"([1], с. 6).

В данной работе получен результат, связанный с теорией приближений. В некотором смысле аналоги этого результата получены в других работах, например в [2] — [4], соответственно для степенных рядов, рядов по многочленам Эрмита и Фабера.

В связи с представленным выше определением значимости рядов по многочленам Чебышёва результат данной работы приобретает особое значение в отличие от указанных аналогов. А именно, естественно предположить, что решение практических задач с применением рассматриваемых в данной работе специальных сумм, связанных с рядами по многочленам Чебышёва, обеспечит более быструю сходимость, чем, например, с применением подобных сумм, связанных со степенным рядом [2], рядом по многочленам Эрмита [3]. Кроме того, здесь впервые рассматривается обобщение универсального ряда для многочленов с плотностью единица.

Понятие универсального функционального ряда связано с понятием приближения функций частичными суммами соответствующего ряда. В работах [2] — [19] исследовано свойство универсальности некоторых функциональных рядов. В работах [2] — [4], [18] рассмотрено обобщение этого свойства.

В данной работе получено обобщение свойства универсальности ряда по многочленам Чебышёва.

Ключевые слова: многочлены Чебышёва, универсальный ряд, равномерная сходимость.

Библиография: 21 название.

THE GENERALIZATION OF THE UNIVERSAL SERIES IN CHEBYSHEV POLYNOMIALS

L. K. Dodunova, D. D. Okhatrina (Nizhny Novgorod)

Abstract

Chebyshev polynomials are widely used in theoretical and practical studies. Recently, they have become more significant, particularly in quantum chemistry. In research [1] their important properties are described to "provide faster convergence of expansions of functions in series of Chebyshev polynomials, compared with their expansion into a power series or in a series of other special polynomials or functions"([1], p. 6).

In this paper, a result associated with an approximation theory is presented. To some extent, the analogues of this result were obtained from other studies, such as in [2] — [4], respectively for the power series, as well as the series in Hermite and Faber polynomials.

With regard to the definition of the significance of the series in Chebyshev polynomials listed above, the result of this research is of particular significance in contrast to these analogues. More precisely, we can assume that the practical solution to the particular problems, can be solved much faster with the use of Chebyshev polynomials rather than the usage of such amounts related to power series [2] and the series in Hermite polynomials [3]. In addition, it is considered the first synthesis of the universal series for polynomials with a density of one.

The concept of a universal series of functions is associated with the notion of approximation of functions by partial sums of the corresponding rows. In [2] — [19] the universal property of certain functional series are reviewed. In [2] — [4], [18] a generalization of this property is considered.

This paper generalizes the universality series properties in Chebyshev polynomials.

Keywords: Chebyshev polynomials, universal series, uniform convergence.

Bibliography: 21 titles.

1. Введение

Впервые универсальные ряды рассмотрел венгерский математик М. Фекете ([20], с. 176) в 1915 году, он построил универсальный степенной ряд в действительной области. Фундаментальные результаты об универсальных тригонометрических рядах получил Д. Е. Меньшов [5] в 1945 году. Существование универсального степенного ряда нулевого радиуса сходимости доказал А. И. Селезнёв [7] в 1951 году, единичного радиуса сходимости — С. К. Чуй и М. Н. Парнз [9] в 1971 году. В дальнейшем разными авторами изучались универсальные ряды по специальным функциям, например, в работе [6] рассмотрен универсальный ряд Дирихле, в [12] — универсальный ряд Фурье, в [3] — универсальный ряд по многочленам Эрмита, в [4], [11], [17], [19] — универсальный ряд по многочленам Фабера.

Немецкий математик В. Лю [2] в 1976 году обобщил свойство универсальности степенного ряда на случай матричных преобразований. В настоящей работе получен в некотором смысле аналог этого результата для многочленов Чебышёва. В отличие от результата В. Лю здесь многочлены Чебышёва берутся с пропусками единичной плотности.

2. Универсальный ряд по многочленам Чебышёва

Известно, что многочлены Чебышёва ([21], с. 482) определяются по формуле

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть F — компактное множество комплексной плоскости C, содержащееся вне отрезка действительной оси $[-1; 1]$, со связным дополнением.

Обозначим через $C_A(F)$ класс функций, непрерывных на F и аналитических в окрестности каждой внутренней точки множества F.

Ряд по многочленам Чебышёва

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z) \tag{1}$$

называется универсальным, если для каждого компактного множества F комплексной плоскости C, данного выше, и любой функции $f(z) \in C_A(F)$ найдется подпоследовательность $S_{n_k}(z) = \sum\limits_{n=0}^{n_k} a_n T_n(z)$ частичных сумм ряда (1), равномерно сходящаяся на F к $f(z)$.

Существование универсального ряда определённого вида по многочленам Чебышёва следует из результата работы [19]. А именно, там выведено существование универсального ряда по подсистеме многочленов Фабера единичной плотности. Как известно, многочлены Чебышёва являются частным случаем многочленов Фабера. Поэтому справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_0 = 0$, *— подпоследовательность целых неотрицательных чисел плотности единица,* F *— компактное множество, данное выше.*

Тогда существует универсальный ряд по многочленам Чебышёва вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T_{\lambda_n}(z)$.

Обобщение этого ряда представляет следующая

Теорема 1. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_0 = 0$, *— подпоследовательность целых неотрицательных чисел плотности единица.*

Пусть $A = \{\beta_{n\nu}\}$ *— нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{n\nu} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_{n\nu} = 0 \quad \forall \nu. \tag{2}$$

Тогда существует ряд по многочленам Чебышёва $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n T_{\lambda_n}(z)$, *обладающий следующим свойством: для каждого компактного множества* F, *данного выше, и любой функции* $f(z) \in C_A(F)$ *найдётся подпоследовательность натуральных чисел* $\{\lambda_{m_k}\}_{k=0,1,\ldots}$, *зависящая от* F *и* f, *такая, что*

$$S_{\lambda_{m_k}}(z) = \sum_{i=0}^{k} \beta_{\lambda_{m_k}\lambda_{m_i}} Q_{\lambda_{m_i}}(z), \quad k = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{3}$$

где $Q_{\lambda_{m_i}}(z) = \sum\limits_{n=0}^{m_i} b_n T_{\lambda_n}(z)$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на* F.

3. Вспомогательное утверждение

Для доказательства теоремы необходима следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $B = \{\alpha_{k\nu}\}$ *— нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям (2);*

2) $\{\lambda_k\}_{k=0,1,\ldots}$, $\lambda_0 = 0$, *— последовательность целых неотрицательных чисел плотности единица;*

3) дан универсальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{\lambda_k}(z). \tag{4}$$

Тогда функция $f \in C_A(F)$ *может быть равномерно аппроксимирована на указанном в теореме множестве* F *многочленами вида*

$$\sum_{i=m}^{m+l} \alpha_{\lambda_{k_{m+l}}\lambda_{k_i}} S_{\lambda_{k_i}}(z), \tag{5}$$

где $S_{\lambda_{k_i}}(z) = \sum\limits_{k=0}^{k_i} a_k T_{\lambda_k}(z)$, $\lambda_{k_{m+l}} \to \infty$.

Доказательство. Согласно определению универсального ряда вида (4), для каждого указанного выше множества F и любой функции $f(z) \in C_A(F)$ будем иметь

$$\left|S_{\lambda_{k_i}}(z) - f(z)/(\alpha_{\lambda_{k_{m+l}}\lambda_{k_i}}(l+1))\right| < \varepsilon/(\left|\alpha_{\lambda_{k_{m+l}}\lambda_{k_i}}\right|(l+1)) \tag{6}$$

при $i = m,\ m+1,\ ...,\ m+l;\ m > N$.

Используя (6), получим

$$\left|\sum_{i=m}^{m+l} \alpha_{\lambda_{k_{m+l}}\lambda_{k_i}} S_{\lambda_{k_i}}(z) - f(z)\right| \le \sum_{i=m}^{m+l} \left|\alpha_{\lambda_{k_{m+l}}\lambda_{k_i}}\right| \left|S_{\lambda_{k_i}}(z) - f(z)/(\alpha_{\lambda_{k_{m+l}}\lambda_{k_i}}(l+1))\right| < \varepsilon.$$

□

4. Доказательство теоремы

Доказательство осуществим методом работы [4].

Совокупность многочленов вида (5) расположим в последовательность

$$P_0(z),\ P_1(z),\ ...,\ P_k(z),\ ... \,. \tag{7}$$

В силу доказанной выше леммы любую функцию $f(z) \in C_A(F)$ можно равномерно аппроксимировать многочленами (7).

Пусть

$$F_0,\ F_1,\ ...,\ F_n,\ ... \tag{8}$$

— возрастающая последовательность компактных множеств, каждое из которых содержится вне отрезка действительной оси [— 1; 1] и имеет связное дополнение.

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=0,1,...}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Для построения суммы вида (3), равномерно сходящейся к функции $f(z) \in C_A(F)$ на F, где F из множества (8), достаточно построить суммы вида

$$S_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z) = \beta_{\lambda_{m_k^{(l)}}\lambda_{m_0^{(0)}}} K_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z) + ... + \beta_{\lambda_{m_k^{(l)}}\lambda_{m_k^{(l)}}} K_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z), \tag{9}$$

где $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ l = 0,\ 1,\ \ldots, k$ и $\lambda_{m_k^{(l)}} < \lambda_{m_{k'}^{(l')}}$ при $k < k'$ или $k = k'$ и $l < l'$, удовлетворяющие условиям

$$\left|P_l(z) - S_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z)\right| < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad z \in F_k. \tag{10}$$

Действительно, предположим, что построены суммы (9), удовлетворяющие условию (10). Согласно лемме, для любого $\varepsilon > 0$, компактного множества F из множества (8) и функции $f(z) \in C_A(F)$ в последовательности (7) можно выбрать многочлен $P_l(z)$ такой, что

$$|f(z) - P_l(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z \in F.$$

После этого, возьмём k настолько большим, чтобы $F \subset F_k$ и $\varepsilon_k < \varepsilon/2$, тогда при любом $z \in F$ получим

$$\left|f(z) - S_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z)\right| < |f(z) - P_l(z)| + \left|P_l(z) - S_{\lambda_{m_k^{(l)}}}(z)\right| < \varepsilon.$$

Построим суммы (9), удовлетворяющих условию (10), следующим образом.

Выберем из последовательности (7) многочлен $S_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z) = \beta_{\lambda_{m_0^{(0)}}\lambda_{m_0^{(0)}}} K_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z)$ такой, что $\left|P_0(z) - S_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z)\right| < \varepsilon_0$ при $z \in F_0$.

В силу установленной выше леммы, с учётом условий (2), в последовательности (7) найдутся многочлены

$$\beta_{\lambda_{m_1^{(0)}}\lambda_{m_1^{(0)}}} K_{\lambda_{m_1^{(0)}}}(z), \quad \beta_{\lambda_{m_1^{(1)}}\lambda_{m_1^{(1)}}} K_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z),$$

такие, что при $z \in F_1$

$$\left|P_0(z) - S_{\lambda_{m_1^{(0)}}}(z)\right| < \varepsilon_1, \ \left|P_1(z) - S_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z)\right| < \varepsilon_1,$$

где

$$S_{\lambda_{m_1^{(0)}}}(z) = \beta_{\lambda_{m_1^{(0)}}\lambda_{m_0^{(0)}}} K_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z) + \beta_{\lambda_{m_1^{(0)}}\lambda_{m_1^{(0)}}} K_{\lambda_{m_1^{(0)}}}(z),$$

$$S_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z) = \beta_{\lambda_{m_1^{(1)}}\lambda_{m_0^{(0)}}} K_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z) + \beta_{\lambda_{m_1^{(1)}}\lambda_{m_1^{(0)}}} K_{\lambda_{m_1^{(0)}}}(z) + \beta_{\lambda_{m_1^{(1)}}\lambda_{m_1^{(1)}}} K_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z).$$

Применяя принцип математической индукции, для любого $k = 0,\ 1,\ \ldots$ построим суммы

$$S_{\lambda_{m_0^{(0)}}}(z),\ S_{\lambda_{m_1^{(0)}}}(z),\ S_{\lambda_{m_1^{(1)}}}(z),\ \ldots,\ S_{\lambda_{m_k^{(0)}}}(z),\ \ldots,\ S_{\lambda_{m_k^{(k)}}}(z),$$

удовлетворяющие условию (10). Выберем из последовательности (7) многочлены

$$\beta_{\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}}\lambda_{m_{k+1}^{(0)}}} K_{\lambda_{m_{k+1}^{(0)}}}(z),\ \ldots,\ \beta_{\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}}\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}}} K_{\lambda_{m_{k+1}^{(k+1)}}}(z)$$

такие, что, пологая в (9) $k+1$ вместо k, получим

$$\left|P_l(z) - S_{\lambda_{m_{k+1}^{(l)}}}(z)\right| < \varepsilon_{k+1} \ (l = 0,\ 1,\ \ldots,\ k+1) \quad \text{при} \quad z \in F_{k+1}.$$

Отсюда в силу математической индукции следует существование сумм (9), удовлетворяющих (10), а следовательно, и существование сумм (3). □

5. Заключение

1. Приведены исторические сведения исследования универсальных функциональных рядов.

2. Построены специальные суммы, связанные с многочленами Чебышёва, обладающие свойством универсальности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Пер. с польск. Киро С.Н., под редакцией Лебедева В.И. М.: Наука, 1983. 384 с.

2. Luh W. Über den Sats von Mergelyan // J. Approxim. Theory. 1976. Vol. 16, No. 2. P. 194–198.

3. Додунова Л. К., Тютюлина О. В. Приближение функций универсальными суммами рядов по подсистемам многочленов Эрмита // Изв. вузов. Матем. 2013. № 9. С. 16–20.

4. Додунова Л. К. Об одном обобщении свойства универсальности рядов по многочленам Фабера // Изв. вузов. Матем. 1990. № 12. С. 31–34.

5. Меньшов Д. Е. Об универсальных тригонометрических рядах // Доклад АН СССР. 1945. Т. 49, № 2. С. 79–82.

6. Чащина Н. С. К теории универсального ряда Дирихле // Изв. вузов. Матем. 1963. № 4. С. 165–167.

7. Селезнев А. И. Об универсальных степенных рядах // Матем. сб. 1951. Т. 28, № 2. С. 453–460.

8. Edge J. J. Universal trigonometric series // J. Math. Anal. Appl. 1970. No. 29. P. 507–511.

9. Chui C. K., Parnes M. N. Approximation by overconvergence of a power series // J. Math. Anal. Appl. 1971. Vol. 36, No. 3. P. 693–696.

10. Селезнев А. И., Мотова И. В., Волохин В. А. О полноте систем функций и универсальных рядах // Изв. вузов. Матем. 1977. № 11. С. 84–90.

11. Селезнев А. И., Додунова Л. К. О некоторых классах универсальных рядов // Изв. вузов. Матем. 1977. № 12. С. 92–98.

12. Погосян Н. Б. Об универсальных рядах Фурье // УМН. 1983. Т. 38, № 1. С. 185–186.

13. Buczolich Z. On universal functions and series // Acta Math. Hungar. 1987. No. 49. P. 403–414.

14. Додунова Л. К. О сверхсходимости универсальных рядов // Изв. вузов. Матем. 1988. № 2. С. 19–22.

15. Nestoridis V. Universal Taylor series // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1996. No. 46. P. 1293–1306.

16. Melas A. and Nestoridis V. On various types of universal Taylor series // Complex Variables Theory Appl. 2001. No. 44. P. 245–258.

17. Katsoprinakis E., Nestoridis V. and Papadoperakis I. Universal Faber series // Analysis (Munich). 2001. No. 21. P. 339–363.

18. Гостева Н. В., Додунова Л. К. Об одном обобщении свойства универсальности степенных рядов с пропусками // Изв. вузов. Матем. 2012. № 3. С. 3–8.

19. Додунова Л. К., Савихин С. А. Полнота подсистемы многочленов Фабера // Изв. вузов. Матем. 2012. № 9. С. 3–7.

20. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. Пер. с англ. А. В. Ефимова, под ред. П. Л. Ульянова. М.: Изд–во иностр. лит–ры, 1963. 359 с.

21. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. АН СССР, 1947. Т. 2. 520 с.

REFERENCES

1. Paskovskij, C. 1983, “Vychislitel’nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva.“, [Computational applications of polynomials and Chebyshev series], trans. from Pol. Kiro, S. N.; editeur scientifique Lebedev, V. I., *Nauka, Moscow*, 384 pp. (Russian)

2. Luh, W. 1976, “Über den Sats von Mergelyan“, *J. Approxim. Theory*, vol. 16, no. 2, pp. 194–198.

3. Dodunova, L. K. & Tyutyulina, O. V. 2013, “Approximation of functions of universal sums of series in the sub-systems of polynomials Hermite“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 9, pp. 16–20. (Russian)

4. Dodunova, L. K. 1990, “On a generalization of the universal property series of Faber polynomials“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 12, pp. 31–34. (Russian)

5. Men’shov, D. E. 1945, “On universal trigonometric series“, *Dokl. Akad. Nauk*, vol. 49, no. 2, pp. 79–82. (Russian)

6. Chashina, N. C. 1963, “By the universal theory of Dirichlet series“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 4, pp. 165–167. (Russian)

7. Seleznev, A. I. 1951, “On universal power series“, *Mathematics collection*, vol. 28, no. 2, pp. 453–460. (Russian)

8. Edge, J. J. 1970, “Universal trigonometric series“, *J. Math. Anal. Appl.*, no. 29, pp. 507–511.

9. Chui, C. K. & Parnes, M. N. 1971, “Approximation by overconvergence of a power series“, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 36, no. 3, pp. 693–696.

10. Seleznev, A. I., Motova, I. V. & Volokhin, V. A. 1977, “On the completeness of systems of functions and universal series“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 11, pp. 84–90. (Russian)

11. Seleznev, A. I. & Dodunova, L. K. 1977, “Certain classes of universal series“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 12, pp. 92–98. (Russian)

12. Poghosyan, N. B. 1983, “Universal Fourier series“, *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 1, pp. 185–186. (Russian)

13. Buczolich, Z. 1987, “On universal functions and series“, *Acta Math. Hungar.*, no. 49, pp. 403–414.

14. Dodunova, L. K. 1988, “About convergence over universal series“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 2, pp. 19–22. (Russian)

15. Nestoridis, V. 1996, “Universal Taylor series“, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, no. 46, pp. 1293–1306.

16. Melas, A. & Nestoridis, V. 2001, “On various types of universal Taylor series“, *Complex Variables Theory Appl*, no. 44, pp. 245–258.

17. Katsoprinakis, E., Nestoridis, V. & Papadoperakis, I. 2001, “Universal Faber series“, *Analysis, Munich*, no. 21, pp. 339–363.

18. Gosteva, N. V. & Dodunova, L. K. 2012, “A generalization of the universal property of power series with gaps“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 3, pp. 3–8. (Russian)

19. Dodunova, L. K. & Savikhin, S. A. 2012, “The completeness of subsystems of Faber polynomials“, *Izvestiya VUZ. Matematika*, no. 9, pp. 3–7. (Russian)

20. Aleksich, G. 1963, “Problemy sxodimosti ortogonal’nyx ryadov.“, [Convergence problems of orthogonal series], Trans. from English. Efimova, A. V., ed. Ulyanova, P. L., *Publishing House of Foreign literature, Moscow*, 359 pp. (Russian)

21. Chebyshev, P. L. 1947, “Polnoe sobranie sochinenij.“, [The complete collection of the works of Chebyshev], *Akad. Nauk SSSR*, vol. 2, 520 pp. (Russian)

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
Получено 06.11.2016 Принято 14.03.2017