ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 512.643.8 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-44-64

ВСЕГДА НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ДВУХ ПРОЕКТОРОВ

А. М. Ветошкин (г. Королёв)

Аннотация

В данной работе рассматриваются многочлены от двух проекторов, которые при любом выборе этих проекторов имеют значением невырожденную матрицу. Результаты работы [1] о блочно-треугольной форме пары проекторов, применяются для вывода уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты всегда невырожденных многочленов. Из уравнений получен основной результат — всегда невырожденный многочлен раскладывается в произведение специальных многочленов. Специальный многочлен от проекторов P, Q это или линейный бином — $I+\alpha P$, $I+\beta Q$, или многочлен вроде такого — $I + x_1(PQP - PQ) + x_2(PQPQP - PQPQ) + \dots$. Доказывается, что специальные многочлены неприводимы.

Оказывается линейные биномы можно переставлять с некоторыми другими специальными многочленами. Если в произведении специальных многочленов переставить линейные биномы максимально влево,то будет получен вид произведения специальных многочленов, называемый стандартным. Доказано, что стандартная форма произведения специальных многочленов единственна.

Полученные результаты позволили получить описание строения всех многочленов от двух проекторов, которые при любом выборе этих проекторов являются нильпотентными матрицами (нильпотентный многочлен). Аналогичные результаты получены для инволютивных многочленов, и многочленов-проекторов.

Ключевые слова: проектор, многочлен, всегда невырожденный многочлен, подобие, блочно-треугольная форма пары проекторов.

Библиография: 16 названий.

ALWAYS NONSINGULAR POLIYNOMIALS OF TWO PROJECTORS

A. M. Vetoshkin (Korolev)

Abstract

This paper discusses the polynomials of two projectors that with any selection of these projectors have the value of the nonsingular matrix. Results of work [1] about block-triangular form pair of projectors apply to deduce equations, that the coefficients of always nonsingular polynomials satisfy to. From the equations is obtained the main result, namely always nonsigular polynomial can be decomposed into a product of special polynomials. Special polynomial of two projectors P, Q is a linear binomial — $I+\alpha P$, $I+\beta Q$, or a polynomial like this $I + x_1(PQP - PQ) + x_2(PQPQP - PQPQ) + \dots$. It is proved that special polynomials are irreducible.

It turns out that linear binomials can be rearranged with some other special polynomials. If in a product of special polynomials the linear binomials are rearranged as much as possible to the left, you will get a product of special polynomials, called standard. It is proved that the standard form of product by special polynomials is unigue.

The obtained results have provided a description of the structure of all polynomials of two projectors that with any selection of these projectors are nilpotent matrices (nilpotent polynomials). Similar results were obtained for the involute polynomials and polynomials-projectors.

Keywords: projector, polynomial, always nonsingular polynomial, similarity, block-triangular form pair of projectors.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Матрица P порядка m называется проектором, если $P = P^2$. В данной работе рассматриваются комплексные проекторы.

Для пары проекторов P и Q одного порядка введем обозначения:

$$P_j = \underbrace{PQPQ...}_{j} \qquad Q_j = \underbrace{QPQP...}_{j} \tag{1}$$

— здесь матричные сомножители P и Q чередуются; количество сомножителей –j. Например: $P_1 = P$, $P_2 = PQ$, $Q_3 = QPQ$ и так далее..

Многочлен $f(P,Q)$ степени n запишем так:

$$f(P,Q) = a_0 I_m + \sum_{j=1}^{n} (a_j P_j + b_j Q_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Для ненулевого многочлена хотя бы один из коэффициентов a_n, b_n не равен нулю. Степень многочлена $f(P,Q)$ обозначим как: $\deg f$. I_m — единичная матрица порядка m.

Далее, за исключением раздела 3, будем под многочленом понимать многочлен от двух переменных-проекторов вида (2).

Рассмотрим следующие выражения с проектором P:

$$aP + I_m, \quad a \neq -1, \tag{3}$$

они образуют группу матриц по умножению. Обратная матрица к (3):

$$(aP + I)^{-1} = -a/(a+1)P + I.$$

Выражения вида (3), будем называть их линейными биномами, обладают тем свойством, что при $a \neq -1$ для любого проектора P они являются невырожденными матрицами.

Определение 1. *Многочлен от проекторов назовем* ***всегда невырожденным****, если он является невырожденным для любых проекторов входящих в него.*

Определим два множества линейных биномов:

$$R = \{xP + I : \quad x \in \mathbb{C}, \quad x \neq -1\}, \tag{4}$$

$$R^{\tau} = \{xQ + I : \quad x \in \mathbb{C}, \quad x \neq -1\}. \tag{5}$$

Определим нелинейные биномы от двух проекторов и множества линейных комбинаций таких биномов с единичной матрицей:

$$s_k = P_{2k+1} - P_{2k}, \quad S = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + I : \quad \alpha_i \in \mathbb{C}\}, \tag{6}$$

$$t_k = P_{2k+1} - Q_{2k}, \quad T = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i + I : \quad \alpha_i \in \mathbb{C}\}, \tag{7}$$

$$s_k^\tau = Q_{2k+1} - Q_{2k}, \quad S^\tau = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i^\tau + I : \quad \alpha_i \in \mathbb{C}\}, \tag{8}$$

$$t_k^\tau = Q_{2k+1} - P_{2k}, \quad T^\tau = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^\tau + I : \quad \alpha_i \in \mathbb{C}\}. \tag{9}$$

Будем говорить о многочленах **вида** R, вида S, вида T, вида R^τ, вида S^τ и вида T^τ.

Все многочлены (4)-(9) являются всегда невырожденными. Будем называть эти многочлены — **специальными многочленами**.

Будем говорить о специальных многочленах, отличных от линейных биномов, как о нелинейных специальных многочленах или как о нелинейных специальных множителях.

В разделе 2 рассматриваются различные свойства многочленов от двух проекторов.

В разделе 3 выводятся уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты всегда невырожденных многочленов. Для вывода этих уравнений используем максимально простой вид, к которому может быть приведена пара произвольных комплексных проекторов, — блочно-треугольный вид каждого проектора (см. [1], с уточнениями в [2]). Теорема об этом блочно-треугольном виде пары проекторов, полученная в работах [1] и [2], сформулирована в начале раздела 3. Следует сказать, что применение этой теоремы и дало возможность получить все основные результаты данной работы в разделах 4 и 5.

В разделе 4 получен основной результат данной работы — теорема 1.

Теорема 1. *Любой всегда невырожденный многочлен f от двух проекторов вида* (2) *можно представить как произведение специальных многочленов на коэффициент a_0.*

Вообще говоря, указанное в теореме 1 представление не единственно. Но некоторая форма произведения, которую мы называем стандартной, будет единственной. Это доказывается в теореме 4.

Определение 2. *Будем называть всегда невырожденный многочлен от двух проекторов* ***неприводимым****, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени.*

Понятие "неприводимость"применимо только к многочленам степени больше 1.

В теореме 3 в разделе 4 доказывается, что неприводимы специальные многочлены (6)-(9).

В разделе 5 с помощью теоремы 1 решен вопрос о том, какие многочлены от двух проекторов при любом выборе этих проекторов будут нильпотентными матрицами — теорема 6. Аналогичный вопрос решен для инволютивных многочленов и многочленов-проекторов — теорема 5.

При доказательстве теорем 5 и 6 используется следующий факт, полученный в работе [3]: если многочлен от двух проекторов вида (2) для любой пары проекторов равен нулю, то все коэффициенты этого многочлена нулевые. (К сожалению, в работе [3] не оговаривается, что это утверждение верно для порядка проекторов m больше одного). Этот результат в [3] получен применением канонической формы пары ортопроекторов (см. [4]). В свою очередь, эта каноническая форма пары ортопроекторов получена из уже упомянутого блочно-треугольного вида пары проекторов из работ [1] и [2]. К этой тематике относятся также работы [5]-[9]. Обзор результатов об алгебрах порождаемых двумя проекторами дан в [10], смотри также [11]-[15].

Так как, многочлен (2) с $a_0 = 0$ не является всегда невырожденным, то обычно будем рассматривать нормированные многочлены (2), у которых $a_0 = 1$.

2. Свойства многочленов от двух проекторов

Определим следующие преобразования многочленов от двух проекторов:

$$\begin{aligned} f(P,Q)^\tau &= f(Q,P), \\ f(P,Q)^\rho &= f(I-P,I-Q). \end{aligned} \tag{10}$$

Преобразования τ и ρ являются инволюциями на множестве многочленов от двух проекторов.

Введенные инволюции не изменяют степень многочлена. Для τ это очевидно. Для ρ: $a_n P_n^\rho = a_n(I-P)(I-Q)... = (-1)^n a_n P_n + H_{n-1}(P,Q)$, где степень многочлена $H_{n-1}(P,Q)$ не больше $n-1$.

Очевидно, что $(s_k)^\tau = s_k^\tau$ и $(s_k^\tau)^\tau = s_k$. Таким образом, символ τ в составных символах $S^\tau, R^\tau, s_k^\tau, t_k^\tau...$ можно воспринимать не как верхний индекс, а как символ задающий выполнение преобразования над многочленом или над всеми элементами множества многочленов. (Например, $(S)^\tau = S^\tau$). Аналогичные соотношения выполняются и для множеств R, T:

$$\begin{array}{cccc} R & S & \overset{\rho}{\longleftrightarrow} & T \\ \updownarrow\tau & \updownarrow\tau & & \updownarrow\tau \\ R^\tau & S^\tau & \overset{\rho}{\longleftrightarrow} & T^\tau \end{array} \tag{11}$$

Отметим, что $R^\rho = R$ с "точностью до множителя":

$$(xP+I)^\rho = (-xP+(x+1)I) = (x+1)(-x/(x+1)P+I).$$

Действие инволюции ρ на схеме (11) обосновывается ниже в утверждении 2.

Схема (11) показывает, что любой нелинейный специальный многочлен мы можем привести с помощью преобразований τ и ρ к любому виду, например, S. Это позволит уменьшить количество рассматриваемых вариантов.

Замечание 1. Кроме преобразований (10) мы можем рассмотреть и такие

$$f(P,Q)^\# = f(I-P,Q), \quad f(P,Q)^\& = f(P,I-Q).$$

Но их применение не выводит из множества специальных многочленов. Приведем несколько примеров:

$$s_1^\# = t_1, \quad s_2^\# = t_1 - t_2, \quad s_3^\# = t_3 - 2t_2 + t_1, \quad (s_2^\tau)^\# = s_2^\tau - s_1^\tau, ...$$

Утверждение 1. М*ногочлен от двух проекторов*

$$f(P,Q) = a_n P_n + a_{n-1}P_{n-1} + b_{n-1}Q_{n-1} + ... + a_0 I, \qquad a_n \neq 0,\ \ b_n = 0, \tag{12}$$

нельзя представить в виде произведения невырожденного линейного бинома вида (3) *и многочлена степени* $n-1$ *тогда и только тогда, когда* $f(P,Q)$ *относится к одному из следующих типов*:

$$\begin{array}{llll} A) & a_n + a_{n-1} = 0, \quad b_{n-1} = 0, & B) & a_n + b_{n-1} = 0, \quad a_{n-1} = 0, \\ C) & a_{n-1} = b_{n-1} = 0, & D) & a_{n-1} = b_{n-1} = -a_n. \end{array} \tag{13}$$

Доказательство утверждения 1 предваряет

Лемма 1. *Многочлен* $f(P,Q)$ *вида* (12) *можно представить в виде*

$$f(P,Q) = (zP+I)H_{n-1}(P,Q), \quad z \neq -1, \tag{14}$$

где $H_{n-1}(P,Q)$ — многочлен степени $n-1$, тогда и только тогда, когда

$$(a_n + b_{n-1} \neq 0) \wedge (b_{n-1} \neq 0). \tag{15}$$

($\wedge$, $\vee$ — логические связки "и "или"соответственно).

Замечание 2. Многочлен (12) не может быть представлен в виде (14) с левым множителем $zQ + I$ вместо $zP + I$.

При подстановке в (14) $H_{n-1}(P,Q)$ в виде $H_{n-1}(P,Q) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i Q_i + a_0 I$ получаем соотношения для определения неизвестных z и α_i, β_i:

$$\begin{aligned} &z\beta_{n-1} = a_n; \qquad \beta_i = b_i, \;\; i = 1, ...n-1; \\ &a_i = z\beta_{i-1} + (z+1)\alpha_i, \;\; i = 2, ...n-1; \qquad a_1 = za_0 + (z+1)\alpha_1. \end{aligned}$$

Так как $zb_{n-1} = a_n$ и $a_n \neq 0$, то $b_{n-1} \neq 0$. Так как, $z = a_n/b_{n-1}$, то $z \neq -1$ при $a_n + b_{n-1} \neq 0$. Лемма 1 доказана.

Замечание 3. Аналогично лемме 1, многочлен $f(P,Q)$, у которого $a_n = 0, \;\; b_n \neq 0$, имеет представление $f = (zQ+I)H_{n-1}(P,Q)$, где H_{n-1} многочлен степени $n-1$ тогда и только тогда, когда

$$(b_n + a_{n-1} \neq 0) \wedge (a_{n-1} \neq 0). \tag{16}$$

Перейдем к утверждению 1. Рассмотрим многочлен $f(P,Q)$ вида (12), который можно представить в виде произведения с невырожденным правым линейным множителем — $f(P,Q) = H_{n-1}(P,Q)l(P,Q)$. Где $l(P,Q) = zP + I$ или $zQ + I$. Транспонируем матрицу $f(P,Q)$: $f^T = l^T H^T$. Применим к последнему выражению лемму 1, учитывая, что P^T, Q^T являются проекторами. Выражение типа P^T_{n-1} начинается с P^T или Q^T в зависимости от четности n. При нечетном n коэффициенты a_{n-1} и b_{n-1} меняются ролями. Поэтому условие (15) примет для данного случая вид

$$(a_n + a_{n-1} \neq 0) \wedge (a_{n-1} \neq 0). \tag{17}$$

При четном n, мы должны в (16) коэффициент b_n заменить на a_n, что снова дает (17).

Совмещая (15) и (17), получим условие:

$$[(a_n + b_{n-1} \neq 0) \wedge (b_{n-1} \neq 0)] \vee [(a_n + a_{n-1} \neq 0) \wedge (a_{n-1} \neq 0)], \tag{18}$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда многочлен $f(P,Q)$ имеет одно из следующих представлений $f = l_1 H_1, \quad f = H_2 l_2$ или $f = l_1 H_3 l_2$, где $l_1, \; l_2$ — невырожденные линейные биномы; многочлены $H_1, \; H_2$ имеют степень $n-1$, многочлен H_3 имеет степень $n-2$. Отрицание (18) и дает типы A-D, которые единственно возможны, если многочлен $f(P,Q)$ не имеет представления в виде $l_1 H_1, \;\; H_2 l_2$ или $l_1 H_3 l_2$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Выполняется равенство*

$$(P_k - P_{k-1})^\rho = (-1)^k (P_k - Q_{k-1}), \quad k \geqslant 2.$$

База индукции для $k = 2, \; 3$:

$$(PQ - P)^\rho = (I - P)(I - Q) - (I - P) = PQ - Q,$$
$$s_1^\rho = (I - P)(I - Q)(I - P) - (I - P)(I - Q) = -PQP + QP = -t_1.$$

Далее по индукции:

$$\begin{aligned} &(P_{k+2} - P_{k+1})^\rho = [PQ(P_k - P_{k-1})]^\rho = \\ &= (-1)^k (I - P - Q + PQ)(P_k - Q_{k-1}) = (-1)^{k+2}(P_{k+2} - Q_{k+1}). \end{aligned}$$

В частности

$$s_k^\rho = -t_k, \quad t_k^\rho = -s_k.$$

Утверждение 3.
а) Если многочлен $f(P,Q)$ относится к типу A (см. утверждение 1), то многочлен $f(P,Q)^\rho$ относится к типу B. Верно и обратное. Если многочлен $f(P,Q)$ относится к типу B, то многочлен $f(P,Q)^\rho$ относится к типу A.
б) Если многочлен $f(P,Q)$ относится к типу C (см. утверждение 1), то многочлен $f(P,Q)^\rho$ относится к типу D. Верно и обратное. Если многочлен $f(P,Q)$ относится к типу D, то многочлен $f(P,Q)^\rho$ относится к типу C.

а) Если многочлен относится к типу A, то его старшие мономы степеней n и $n-1$ в сумме равны $a_nP_n + a_{n-1}P_{n-1} = a_n(P_n - P_{n-1})$. Поэтому а) следует из утверждения 2.
б) Применим преобразование ρ к многочлену типа C

$$\begin{aligned}&(a_nP_n + H_1(P,Q))^\rho = a_n(I-P)(I-Q)... + H_1(P,Q)^\rho = \\ &= (-1)^n a_n[P_n - P_{n-1} - Q_{n-1}] + H_2(P,Q).\end{aligned}$$

Последний многочлен относится к типу D. Многочлены H_1, H_2 имеет степень не больше $n-2$.

Утверждение 4.

$$a) \quad s_ks_l = 0, \quad t_kt_l = 0, \quad s_k^\tau s_l^\tau = 0, \quad t_k^\tau t_l^\tau = 0, \qquad k,\ l = 1,\ 2, ... \tag{19}$$

b) Множества $R,\ S,\ T,\ R^\tau,\ S^\tau,\ T^\tau$ являются коммутативными группами всегда невырожденных матриц.

а) Тождества (19) проверяются непосредственно. Здесь могут пригодиться такие факты:

$$s_kP = 0, \quad Ps_k = s_k. \tag{20}$$

Например

$$s_ks_l = s_k(Ps_l) = (s_kP)s_l = 0. \tag{21}$$

b) О том, что $R,\ R^\tau$ группы, говорилось раньше. Для множества S, в силу (21) выполняется:

$$\begin{gathered}(\alpha s_k + I)(\beta s_l + I) = (\beta s_l + I)(\alpha s_k + I) = \alpha s_k + \beta s_l + I, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i + I = \prod_{i=1}^n (\alpha_i s_i + I).\end{gathered} \tag{22}$$

И каждый элемент этого множества — невырожденная матрица:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i + I\right)^{-1} = -\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i + I. \tag{23}$$

Аналогично для множеств $T,\ S^\tau,\ T^\tau$. Утверждение 4 доказано.

Специальные многочлены разных видов некоммутативны. Но выполняется следующая "почти коммутативность":

Утверждение 5.

$$\begin{gathered}(xP + I)(\alpha s_k + I) = (\alpha(x+1)s_k + I)(xP + I), \\ (xP + I)(\alpha(x+1)t_k + I) = (\alpha t_k + I)(xP + I).\end{gathered} \tag{24}$$

Доказательство сводится к непосредственному вычислению левых и правых частей в (24).

Будем говорить, что множества $R,\ S,\ T$ относятся к одному **роду**, а множества $R^\tau,\ S^\tau,\ T^\tau$ к другому **роду**.

Таким образом, из утверждения 5 следует: в произведении нескольких многочленов, относящихся к одному роду, линейные биномы, если такие есть среди данных многочленов, могут быть "передвинуты"в любое место внутри этого произведения.

По отношению к произведению специальных многочленов выполним следующие действия: Разобьем это произведение на отрезки стоящих рядом многочленов одного рода так, что слева и справа от сомножителей такого отрезка находятся сомножители другого рода или отрезок находится с краю всего произведения. Передвинем линейные биномы внутри каждого отрезка в одно место, например, влево. Если после этого имеются рядом стоящие многочлены одного вида, то заменяем их одним элементом этого вида — их произведением.

Далее снова повторяем такие же действия до тех пор, пока число сомножителей не перестанет сокращаться.

Будем называть произведение специальных многочленов **стандартным**: если в нем а) нет двух соседних сомножителей одного вида, б) в этом произведении никакой линейный бином не имеет левого соседнего сомножителя одного с ним рода.

Утверждение 6. *Пусть имеется стандартное произведение специальных многочленов f_i*

$$f = \prod\nolimits_{i=1}^{N} f_i. \tag{25}$$

Тогда

$$\deg f = \sum_{i=1}^{N} \deg f_i - \sum_{i=1}^{N-1} v_i, \tag{26}$$

где $v_i = 1$, если многочлены f_i и f_{i+1} одного рода,
$v_i = 0$ если многочлены f_i и f_{i+1} разного рода.

Равенство (26) можно эквивалентным образом записать так:

$$\deg f = \deg \prod_{i=1}^{k} f_i + \deg \prod_{i=k+1}^{N} f_i - v_k. \tag{27}$$

Обоснуем, что формула (26) выполняется для произведения чередующихся биномов s и t одного рода:

$$s_k t_l s_m t_w ... \tag{28}$$

Вычислим сначала $s_k t_l$

$$s_k t_l = -P_{2a+1} + P_{2a-1}, \quad a = k + l. \tag{29}$$

Затем

$$\begin{aligned} &s_k t_l s_m = -(P_{2b+1} - P_{2b}) + (P_{2b-1} - P_{2b-2}) = -s_b + s_{b-1}, \\ &b = a + m = k + l + m. \end{aligned} \tag{30}$$

Для этих двух произведений формула (26) соблюдается. Если мы умножим (30) справа на t_w, то результат умножения будет получен, как применение формулы (29) сначала к произведению $-s_b t_w$, а затем к $s_{b-1} t_w$. К результату применяем (30) и так далее, пока есть новые правые сомножители в (28). Выражение (28) в зависимости от четности числа сомножителей имеет вид:

$$\begin{aligned} s_k t_l s_m t_w ... t_z &= \alpha_i P_{2i+1} + \alpha_{i-1} P_{2i-1} + \ldots, \quad (i = k + l + m + \ldots + z), \\ s_k t_l s_m t_w ... s_y &= \alpha_j s_j \quad + \alpha_{j-1} s_{j-1} \quad + \ldots, \quad (j = k + l + m + \ldots + y). \end{aligned} \tag{31}$$

Получили, что произведения $s_k t_l$, $s_k t_l s_m$, $s_k t_l s_m t_w ...$ удовлетворяют (26). Отметим факт, что степень такого произведения всегда будет нечетной. Очевидно

$$\deg(s_{k_1} t_{k_2} s_{k_3} t_{k_4} ...) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} (2k_i + 1) - \sum\nolimits_{i=1}^{N-1} 1 = 2 \sum\nolimits_{i=1}^{N} k_i + 1.$$

Замечание 4. Из (31) следует, что произведение (28) с четным числом сомножителей относится по классификации из утверждения 1 к типу C, а с нечетным к типу A.

Разобьем теперь произведение (25) на отрезки сомножителей одного рода. Применяя, по необходимости, преобразования τ и ρ приведем такой отрезок к виду:

$$(xP+I)(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i s_i + I)(\sum_{i=1}^{l}\beta_i t_i + I)(\sum_{i=1}^{m}\alpha'_i s_i + I)...$$

Умножение линейного бинома на многочлен из S не меняет степени этого многочлена:

$$(xP+I)(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i s_i + I) = (x+1)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i s_i + xP + I.$$

Теперь этот отрезок сомножителей одного рода выглядит так:

$$(\sum_{i=1}^{k}\alpha''_i s_i + xP + I)(\sum_{i=1}^{l}\beta_i t_i + I)(\sum_{i=1}^{m}\alpha'_i s_i + I)... \tag{32}$$

Раскрываем скобки в (32), получаем сумму слагаемых вида (28) плюс слагаемые, начинающиеся с множителя xP. Очевидно, степень отрезка сомножителей (32) — наибольшая степень среди всех этих слагаемых, будет у следующего слагаемого:

$$\alpha''_k s_k \beta_l t_l \alpha'_m s_m ... = (\alpha''_k \beta_l \alpha'_m)\cdot s_k t_l s_m ... \tag{33}$$

Выше доказано, что такое произведение удовлетворяет (26).

Степень всего произведения (25) определяется степенью произведения старших мономов отрезков произведения, образованных подряд стоящими многочленами одного рода:

$$P_a Q_b P_c \ldots = P_{a+b+c...},$$

где $a, b, c, ...$ — нечетные числа. Утверждение 6 доказано.

3. Уравнения для коэффициентов всегда невырожденных многочленов

Сформулируем результат о блочно-треугольном виде пары произвольных проекторов в таком виде (см. [1], с уточнениями в [2]):

Теорема 2. *Пусть P, Q — комплексные проекторы. Тогда существует подобие, приводящее обе матрицы P, Q к одинаковой блочно-треугольной форме с диагональными блоками порядков 1 и 2.*

У полученных блочно-треугольных матриц каждая пара диагональных скалярных блоков имеет лишь одну из четырех форм

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0),\quad (1,1). \tag{34}$$

Каждая пара диагональных 2×2-блоков составлена из таких матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} z_k & 1-z_k \\ z_k & 1-z_k \end{bmatrix},\quad z_k \neq 0,1. \tag{35}$$

Обозначим двумерные проекторы в (35) как p и q, кроме того будем опускать индекс k у параметра z_k:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} z & 1-z \\ z & 1-z \end{bmatrix}, \quad z \neq 0, 1. \tag{36}$$

В данном разделе применив теорему 2 получим уравнения для коэффициентов всегда невырожденного многочлена $f(P,Q)$ вида (2).

Пусть матрицы P и Q приведены к блочно-треугольной форме с блоками (34), (35) на диагонали. Тогда матрица $f(P,Q)$, определенная формулой (2), будет иметь ту же самую блочно-треугольную форму. Диагональными блоками этой матрицы будут такие блоки, соответствующие (34) и (35):

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 1, \quad f(0,1) = 1 + b_1, \quad f(1,0) = 1 + a_1, \quad f(1,1) = 1 + \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j), \\ &f(p,q) = I_2 + \sum_{j=1}^{n} (a_j p_j + b_j q_j). \end{aligned} \tag{37}$$

Так как матрица $f(P,Q)$ невырожденная, то из (37) получаем

$$a_1, b_1 \neq -1, \quad 1 + \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) \neq 0. \tag{38}$$

В (37) матрицы p_j и q_j определяются аналогично матрицам P_j и Q_j в (1): $p_2 = pq$, $q_3 = qpq$ и так далее.

Вычисления матриц p_j и q_j дают:

$$\begin{aligned} &p_{2j+1} = z^j p, \quad q_{2j+1} = z^j q, \quad j \geqslant 0, \\ &p_{2j} = z^{j-1} \begin{bmatrix} z & 1-z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q_{2j} = z^{j-1} \begin{bmatrix} z & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}, \quad j \geqslant 1. \end{aligned} \tag{39}$$

Подставив (39) в выражение для $f(p,q)$ в (37) получим:

$$f(p,q) = I_2 + \sum_{j=1}^{n} (a_j p_j + b_j q_j) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} f_{11} = 1 + a_1 + z(a_2 + a_3) + z^2(a_4 + a_5) + ...+ \\ +z(b_1 + b_2) + z^2(b_3 + b_4) + ..., \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} f_{12} = (1-z)(a_2 + z a_4 + z^2 a_6 + ...)+ \\ +(1-z)(b_1 + z b_3 + z^2 b_5 + ...), \end{aligned} \tag{42}$$

$$f_{21} = z(b_1 + b_2) + z^2(b_3 + b_4) + ..., \tag{43}$$

$$f_{22} = 1 + (1-z)(b_1 + z b_3 + z^2 b_5 + ...). \tag{44}$$

Определим следующие производящие функции от коэффициентов (2):

$$\begin{aligned} &\alpha_1(z) = a_1 + z a_3 + z^2 a_5 + ..., \qquad \alpha_2(z) = a_2 + z a_4 + z^2 a_6 + ..., \\ &\beta_1(z) = b_1 + z b_3 + z^2 b_5 + ..., \qquad \beta_2(z) = b_2 + z b_4 + z^2 b_6 + ... \end{aligned}$$

В этих рядах

$$a_k, b_k = 0, \quad k > n. \tag{45}$$

Элементы матрицы $f(p,q)$ (41)-(44) примут вид:

$$\begin{aligned} &f_{11} = 1 + \alpha_1 + z(\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2), \quad && f_{12} = (1-z)(\alpha_2 + \beta_1), \\ &f_{21} = z(\beta_1 + \beta_2), && f_{22} = 1 + (1-z)\beta_1. \end{aligned}$$

Вычислим определитель матрицы $f(p,q)$, который будет многочленом от z:

$$\begin{aligned} &\Delta(z) = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = \Delta_0 + \Delta_1 z + \Delta_2 z^2 + \Delta_3 z^3 + ... = \\ &= 1 + \alpha_1 + \beta_1 + (1-z)\alpha_1\beta_1 + z(\alpha_2 + \beta_2 + (z-1)\alpha_2\beta_2). \end{aligned} \tag{46}$$

Отметим, что $\Delta_0 = \Delta(0) = (1+a_1)(1+b_1) \neq 0$. Для любого z многочлен$\Delta(z)$ должен быть не равен нулю. Но по основной теореме алгебры у многочлена степени больше нулевой есть корень. Поэтому, чтобы многочлен (2) был всегда невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ...$ были нулевыми.

Получим выражения коэффициентов $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ...$ через a_i, b_j. Для этого определим многочлены $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

$$\begin{aligned} &\varphi(z) = \alpha_1(z)\beta_1(z) = \varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \varphi_3 z^3 + ..., \\ &\varphi_0 = a_1 b_1, \quad \varphi_1 = a_1 b_3 + a_3 b_1, ..., \quad \varphi_k = \sum_{i=0}^{k} a_{2i+1} b_{2k-2i+1}. \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &\psi(z) = \alpha_2(z)\beta_2(z) = \psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + ..., \\ &\psi_0 = a_2 b_2, \quad \psi_1 = a_2 b_4 + a_4 b_2, ..., \quad \psi_k = \sum_{i=0}^{k} a_{2i+2} b_{2k-2i+2}. \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} &(1-z)\varphi(z) = \varphi_0 + z(\varphi_1 - \varphi_0) + z^2(\varphi_2 - \varphi_1) + z^3(\varphi_3 - \varphi_2) + ..., \\ &z(z-1)\psi(z) = -z\psi_0 + z^2(\psi_0 - \psi_1) + z^3(\psi_1 - \psi_2) + z^4(\psi_2 - \psi_3) + ... \end{aligned} \tag{49}$$

Обозначим

$$\sigma_k = a_{2k} + b_{2k} + a_{2k+1} + b_{2k+1}. \tag{50}$$

Из (46), учитывая (47)-(50), получаем

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = \sigma_1 + \varphi_1 - \varphi_0 - \psi_0 = 0, \\ &\Delta_2 = \sigma_2 + \varphi_2 - \varphi_1 + \psi_0 - \psi_1 = 0, ... \\ &\Delta_k = \sigma_k + \varphi_k - \varphi_{k-1} + \psi_{k-2} - \psi_{k-1} = 0, ... \end{aligned} \tag{51}$$

Так как

$$\varphi_k - \psi_{k-1} = \sum_{i=0}^{k} a_{2i+1} b_{2k-2i+1} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{2i+2} b_{2k-2i} = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} a_i b_{2k+2-i},$$

обозначим

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} a_i b_{2k+2-i}, \quad \lambda_0 = \varphi_0 = a_1 b_1. \tag{52}$$

Получим уравнения для определения коэффициентов всегда невырожденных многочленов от двух проекторов:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 + \lambda_1 - \lambda_0 = 0, \\ &\sigma_2 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0, ... \\ &\sigma_k + \lambda_k - \lambda_{k-1} = 0, ..., \end{aligned} \tag{53}$$

где величины σ_k и λ_k определяются в (50) и (52). С учетом (45) из (50) и (52) следует:

$$\begin{aligned} \lambda_n = 0, \quad \lambda_{n-1} = (-1)^{n+1} a_n b_n, \\ \sigma_k = 0, \quad k > n/2. \end{aligned} \tag{54}$$

Применим (54) к последнему равенству в (53) (при $k = n$), получаем важное следствие: У всегда невырожденного многочлена от двух проекторов оба старших монома не могут быть одновременно ненулевыми:

$$-\lambda_{n-1} = (-1)^{n+2} a_n b_n = 0. \tag{55}$$

Далее, как правило, будем считать, что

$$a_n \neq 0, \quad b_n = 0.$$

(Таким образом, всегда невырожденный многочлен имеет вид (12), к нему применимы утверждение 1 и лемма 1).

Положим

$$l = \lfloor n/2 \rfloor .$$

Заменим каждое уравнение в системе (53) на его сумму со всеми следующими уравнениями. Учитывая (54) получим

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{i=k}^{l} \sigma_i = \lambda_{k-1}, & 1 \leqslant k \leqslant l, \\ \lambda_{k-1} = 0, & l+1 \leqslant k \leqslant n. \end{array} \tag{56}$$

Выпишем, как будут выглядеть уравнения системы (56) для некоторых значений k:

$$\begin{array}{ll} k = 1: & \sum_{i=2}^{n} a_i + \sum_{i=2}^{n} b_i = a_1 b_1; \\ k = 2: & \sum_{i=4}^{n} a_i + \sum_{i=4}^{n} b_i = a_1 b_3 - a_2 b_2 + a_3 b_1. \end{array} \tag{57}$$

$$\begin{array}{l} k = l: \\ \begin{cases} n = 2l: \quad a_n + b_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i b_{n-i}, \\ n = 2l+1: \quad a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+1} a_i b_{n-i-1}. \end{cases} \end{array} \tag{58}$$

$$\begin{array}{l} k = l+1: \\ \begin{cases} n = 2l: \qquad -a_2 b_n \quad + a_3 b_{n-1} + ... - a_n b_2 = 0, \\ n = 2l+1: \quad a_1 b_n \quad - a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + ... - a_{n-1} b_2 + a_n b_1 = 0. \end{cases} \end{array} \tag{59}$$

$$\begin{array}{ll} k = n-2: & a_{n-4} b_n - a_{n-3} b_{n-1} + a_{n-2} b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-3} + a_n b_{n-4} = 0, \\ k = n-1: & a_{n-2} b_n - a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_{n-2} = 0, \\ k = n: & a_n b_n = 0. \end{array} \tag{60}$$

4. Доказательство теоремы 1

В данном разделе из формул (57)-(60) сначала будут получены некоторые простые следствия, а затем в утверждениях 7 и 8 показано, что у всегда невырожденного многочлена или есть множитель — специальный многочлен, или он сам специальный многочлен. Это позволит доказать теоремы 1, 3 и 4.

Для $n = 2$ система уравнений (56) дает

$$a_2 + b_2 = a_1 b_1, \quad a_2 b_2 = 0.$$

Полагая, что $b_2 = 0$ получаем в (2)

$$a_2 PQ + a_1 P + b_1 Q + I = (a_1 P + I)(b_1 Q + I).$$

Таким образом, всегда невырожденный многочлен второй степени можно представить в виде произведения линейных сомножителей — он приводим.

Многочлен третьей степени $\alpha s_1 + I$ неприводим. В противном случае он представим в виде произведения двух сомножителей, степени которых есть 2 и 1 или 2 и 2. Из приводимости многочлена второй степени следует, что у многочлена $\alpha s_1 + I$ должен быть линейный множитель. Но по утверждению 1 многочлен $\alpha s_1 + I$ не может иметь невырожденных линейных множителей.

Возьмем всегда невырожденный многочлен f от двух проекторов, его коэффициенты удовлетворяют уравнениям (56). Считаем, что из его старших мономов ненулевым является моном $a_n P_n$. (В случае ненулевого монома $b_n Q_n$ применяем преобразование τ к f). Если у f нет линейных множителей, то по утверждению 1 многочлен f относится к одному из типов A, B, C, D. Типы A, B по утверждению 3 сводятся друг к другу, (как и C, D). Поэтому нам достаточно рассмотреть типы A и C.

При $n > 2$ уравнение (60) для $k = n - 1$ дает $a_n b_{n-2} = a_{n-1} b_{n-1}$.
Для типов A и C выполняется $b_{n-1} = 0$. Поскольку $a_n \neq 0$, получаем

$$A,\ C: \qquad b_{n-2} = 0. \tag{61}$$

Утверждение 7. *Пусть всегда невырожденный многочлен f для* $\deg f \geqslant 3$ *относится к типу* A, *то есть выполняется:*

$$a_n + a_{n-1} = 0, \quad b_n = 0, \quad b_{n-1} = 0.$$

Тогда или $f = gh, \quad (\deg g,\ \deg h < \deg f)$, *где* $g \in S$, *или* $f \in S$.

Так как выполняются (13) и (61) наш многочлен имеет вид:

$$f = a_n(P_n - P_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-2} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n-3} b_i Q_i + I.$$

Учитывая, что $s_k P = 0$, рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} h = (I + x s_1) f = a_n(P_n - P_{n-1}) + \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n-3} b_i Q_i + I + \\ + x \textstyle\sum_{i=1}^{n-3} b_i P_{i+3} - x \sum_{i=1}^{n-3} b_i P_{i+1} + x s_1. \end{aligned} \tag{62}$$

Если $b_{n-3} \neq 0$, то степень многочлена h в (62) будет меньше n при выборе x так, что $a_n + x b_{n-3} = 0$. Получаем $f = (I - x s_1) h$, $\deg h < n$.

Из (60) для $k = n - 2$ получаем $-a_{n-1} b_{n-3} + a_n b_{n-4} = 0$ или $b_{n-3} + b_{n-4} = 0$. Если теперь $b_{n-3} = b_{n-4} = 0, \quad b_{n-5} \neq 0$, то выписываем (62), но вместо s_1 берем s_2. Аналогично полагаем $a_n + x b_{n-5} = 0$ и получаем $f = (I - x s_2) h$, $\deg h < n$. И так далее. Когда мы выписываем уравнение (56) $\lambda_{k-1} = 0$ для $k = n - 3$, у нас появляются новые слагаемые $-a_{n-1} b_{n-5} + a_n b_{n-6} = 0$ (все остальные нулевые), и поэтому $b_{n-5} + b_{n-6} = 0$.

Исчерпание списка коэффициентов b_i происходит по-разному в зависимости от четности n.

Начнем с четного случая $n = 2l$. Предположим, что все пары коэффициентов b_i нулевые: (b_{n-3}, b_{n-4}), $(b_{n-5}, b_{n-6}), ...(b_3, b_2)$. Тогда (58) будет выглядеть так: $a_n = a_{n-1} b_1$ или $a_n(1 + b_1) = 0$. Чего быть не может, так как оба сомножителя в последнем равенстве ненулевые (по (38) $b_1 \neq -1$). Так что среди перечисленных пар коэффициентов b_i найдется ненулевая.

Случай $n = 2l + 1$. Аналогично, пусть все пары коэффициентов b_i нулевые:

$$(b_{n-3}, b_{n-4}),\ (b_{n-5}, b_{n-6}), ...(b_2, b_1).$$

В этом случае все величины $\lambda_k = 0$. Из (56) при $1 \leqslant k \leqslant l$ следует, что $a_{2k+1} + a_{2k} = 0$. Таким образом, получили, что $f \in S$. Утверждение 7 доказано.

Пусть многочлен относится к типу C.

Утверждение 8. *Пусть всегда невырожденный многочлен* f, $\deg f > 3$ *относится к типу* С, *то есть выполняется*

$$a_{n-1} = b_n = b_{n-1} = 0.$$

Тогда $f = gh$, $(\deg g, \deg h < \deg f)$, *где* $g \in S$.

Учитывая (61) многочлен имеет вид

$$f = a_n P_n + \sum_{i=1}^{n-2} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n-3} b_i Q_i + I.$$

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} h = (I + xs_1)f = a_n P_n + \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n-3} b_i Q_i + I + \\ +x \textstyle\sum_{i=1}^{n-3} b_i P_{i+3} - x \sum_{i=1}^{n-3} b_i P_{i+1} + xs_1. \end{aligned} \tag{63}$$

Если $b_{n-3} \neq 0$, то степень многочлена h в (63) будет меньше n, если выбрать x так, что $a_n + xb_{n-3} = 0$. Получаем $f = (I - xs_1)h$ и $\deg h < n$.

Выпишем (56) для $k = n-2$ и $k = n-3$:

$$\begin{aligned} &a_{n-4}b_n - a_{n-3}b_{n-1} + a_{n-2}b_{n-2} - a_{n-1}b_{n-3} + a_n b_{n-4} = 0, \\ &a_{n-6}b_n - a_{n-5}b_{n-1} + a_{n-4}b_{n-2} - a_{n-3}b_{n-3} + a_{n-2}b_{n-4} + a_{n-1}b_{n-5} + a_n b_{n-6} = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Из первого уравнения (64) следует, что $b_{n-4} = 0$.

Если $b_{n-3} = 0$, то второе уравнение (64) дает $b_{n-6} = 0$.

Если $b_{n-5} \neq 0$ при $a_n + xb_{n-5} = 0$, получаем $f = (I - xs_2)h$ и $\deg h < n$.

Как и при доказательстве утверждения 7 коэффициенты b_i разбиваются на пары: (b_{n-3}, b_{n-4}), $(b_{n-5}, b_{n-6}), \ldots$ Если первый член пары нулевой, то и второй нулевой (это следует из анализа уравнений типа (64)). Если первый член пары ненулевой, то у f есть множитель $g \in S$. Если все пары нулевые, то уравнение (58) будет выглядеть одинаково для четного и нечетного n: $a_n = 0$. Это противоречит тому что $a_n \neq 0$. Откуда следует, что найдется пара с ненулевым первым элементом. И значит у f есть множитель $g \in S$. Утверждение 8 доказано.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1. Возьмем произвольный всегда невырожденный многочлен f. Выделяем у него левые и правые линейные множители $f = l_1 f_1 l_2$ (утверждение 1). Приводим оставшийся нелинейный множитель f_1 к типу A или C (утверждение 3). Согласно утверждениям 7 или 8 выделяем левый нелинейный множитель: $f_1 = g_1 f_2$, $g_1 \in S(S^\tau, T, T^\tau)$. Полученный многочлен f_2 освобождается от левых линейных множителей. И вновь выделяются нелинейные множители с помощью утверждений 7 или 8. И так далее. Процесс понижения степени неразложенных сомножителей закончится за конечное число шагов. Теорема 1 доказана.

Теорема 3. *Многочлены из множеств* S, T, S^τ, T^τ *неприводимы.*

Положим, что

$$\begin{aligned} f = \textstyle\prod_{i=1}^{k} f_i, \quad f \in S \cup T \cup S^\tau \cup T^\tau, \\ f_i \in R \cup S \cup T \cup R^\tau \cup S^\tau \cup T^\tau. \end{aligned} \tag{65}$$

Считаем, что произведение в (65) стандартное. Утверждение 6 дает:

$$\deg f = \sum\nolimits_{i=1}^{k} \deg f_i - \sum\nolimits_{i=1}^{k-1} v_i, \quad v_i = 0, 1. \tag{66}$$

Обозначим $g = \prod_{i=2}^{k} f_i$,

$$f = f_1 g. \tag{67}$$

Покажем, что $\deg f_1$ и $\deg g$ меньше $\deg f = n$, а значит f приводим.

Применим (27) к (67):

$$\deg f = \deg f_1 + \deg g - v_1. \tag{68}$$

Если $\deg f_1 \geqslant n$, то из (68) следует, что

$$\deg g \leqslant v_1 \leqslant 1.$$

Но из утверждения 1 следует, что f не имеет линейных множителей. Поэтому $\deg f_1 < n$. Кроме того $\deg f_1 \geqslant 3$. Из этого и (68) следует:

$$\deg g = n - \deg f_1 + v_1 < n.$$

Таким образом, разложение (65) означает приводимость f.

Рассмотрим такое произведение:

$$f_1^{-1} f = g. \tag{69}$$

Выпишем, используя утверждение 6, степени левой и правой частей (69):

$$\begin{aligned}\deg f_1^{-1} f = \deg f_1 + \deg f - v = \\ = \deg g = \textstyle\sum_{i=2}^{k} \deg f_i - \sum_{i=2}^{k-1} v_i,\end{aligned}$$

где $v = 1$, если f_1 иf одного рода, $v = 0$, если они разных родов. Учитывая (66) получим:

$$2 \deg f_1 = v + v_1.$$

Однако, $\deg f_1 \geqslant 3$ и $v + v_1 \leqslant 2$ — получаем противоречие, доказывающее теорему 3.

Теорема 4. *Представление всегда невырожденного многочлена в виде стандартного произведения специальных многочленов единственно.*

Докажем такое утверждение.

Лемма 2. *Пусть всегда невырожденный многочлен $f(P, Q)$ представлен в виде стандартного произведения специальных многочленов. Рассмотрим самый левый отрезок множителей одного рода. Пусть среди множителей этого отрезка нет линейных биномов. Тогда многочлен $f(P, Q)$ не имеет представления вида* (14) *с левым линейным множителем.*

Пусть многочлен $h(P, Q)$ является произведением всех левых сомножителей одного рода, о которых идет речь в условиях леммы 2, а $g(P, Q)$ произведение всех остальных сомножителей $f(P, Q)$. Тогда

$$f(P, Q) = h(P, Q) g(P, Q).$$

Без потери общности можно считать, что $h(P, Q)$ — это произведение такого вида $(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i + I)(\sum_{i=1}^{l} \beta_i t_i + I)(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i' s_i + I)\ldots$.

По замечанию 4 многочлен $h(P, Q)$ относится или к типу А, или С:

$$\begin{aligned} A: \quad & h(P, Q) = a_n (P_n - P_{n-1}) + \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n-2} b_i Q_i + I, \\ C: \quad & h(P, Q) = a_n P_n + \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n-2} b_i Q_i + I. \end{aligned}$$

Кроме того, в утверждении 6 мы получили, что n нечетно.

Так как, многочлен $g(P, Q)$ начинается с множителей другого рода, чем множители $h(P, Q)$, учитывая (55), он будет иметь такой вид:

$$g(P, Q) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j P_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_j Q_j + I, \quad k \geqslant 1.$$

Для обоих типов А и С у многочлена $f = hg$ старший моном будет $a_n \beta_k P_{n+k}$ (учитывая нечетность n), а из мономов вида kQ_m наибольшая степень будет у монома

$$b_{n-2} (\alpha_{k-1} + \beta_k) Q_{n+k-3}.$$

Таким образом, условие $(a_n + b_{n-1} \neq 0) \wedge (b_{n-1} \neq 0)$ из леммы 1 в данном случае не выполняется. Это означает, что многочлен f нельзя представить в виде $f = l \cdot g$, где l — линейный множитель, $\deg g < \deg f$. Лемма 2 доказана.

Вернемся к теореме 4. Пусть утверждение теоремы 4 неверно, то есть существует некий всегда невырожденный многочлен f, который имеет неединственное стандартное представление:

$$f = f_1 f_2 ... f_k = g_1 g_2 ... g_m. \tag{70}$$

Тогда $f_1 \neq g_1$ и $f_k \neq g_m$. (Иначе мы сокращаем на эти многочлены).

Пусть f_1 является линейным биномом. Тогда g_1 тоже линейный бином. Действительно, если самый левый отрезок множителей одного рода произведения $g_1 g_2 ... g_m$ не содержит линейных биномов, то многочлен $f = g_1 g_2 ... g_m$ по лемме 2 не имеет левого линейного множителя, чему противоречит равенство $f = f_1 f_2 ... f_k$. Из замечания 2 следует, что f_1, g_1 одного вида.

Если $f_1 \neq g_1$, то опять имеем ситуацию, что $f_1^{-1} f$ не имеет левых линейных множителей, а $(f_1^{-1} g_1) g_2 \dots g_m$ имеет. Таким образом, $f_1 = g_1$ — надо выполнить сокращение. Поэтому считаем, что f_1 и g_1 не являются линейными множителями. Считаем, что f_k и g_m не являются линейными множителями. Это можно получить, повторив рассуждения этого и предыдущего абзацев для транспонированного многочлена $f^T = f_k^T ... f_1^T = g_m^T ... g_1^T$.

Если f_1 и g_1 одного вида, вместо (70) будем рассматривать такие стандартные представления $f_1^{-1} f = f_2 ... f_k = (f_1^{-1} g_1) g_2 ... g_m$. Здесь многочлены f_2и $g_1^{'} = f_1^{-1} g_1 \neq I$ относятся к разным видам.

Таким образом, в (70) множители f_1 и g_1 относятся к разным видам, и среди них нет линейных. Поэтому следующее выражение станет стандартным произведением специальных многочленов:

$$f_k = f_{k-1}^{-1} f_{k-2}^{-1} ... f_1^{-1} g_1 g_2 ... g_m$$

после перестановки линейных биномов в произведении $f_{k-1}^{-1} f_{k-2}^{-1} ... f_1^{-1}$, выполненной для приведения нелинейного многочлена f_k к стандартному виду. Понятно, что в (70) должно выполняться: $\min(m, k) \geqslant 2$. Поэтому в левой части последнего выражения для f_k больше одного сомножителя. Но это противоречит неприводимости нелинейного множителя f_k. Доказательство теоремы 4 завершено.

5. Нильпотентные многочлены, инволютивные многочлены и многочлены-проекторы

Лемма 3. *Пусть B — квадратная матрица и A — невырожденная матрица. Пусть $r(x) = \sum_{i=0}^{l} r_i x^i$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Равенство $r(B) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $r(ABA^{-1}) = 0$.*

Данный факт и его доказательство хорошо известны. Из леммы 3 получаем:

Следствие. *Если A невырожденная, то $r(AB) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(BA) = 0$.*

Матрица A называется инволюцией, если выполняется $A^2 = I$.

Применение теоремы 1 позволяет решить вопрос о том, как устроены многочлены, перечисленные в заголовке данного пункта.

Теорема 5. А) *Многочлен $g(P, Q)$ является инволюцией для произвольного выбора проекторов P, Q тогда и только тогда, когда*

$$g = u g' u^{-1}, \tag{71}$$

где матрица u, задающая подобие, есть произведение специальных многочленов, а g' есть одно из выражений:

$$g' = I, \quad -I, \quad I - 2P, \quad 2P - I, \quad I - 2Q, \quad 2Q - I. \tag{72}$$

Б) *Многочлен $g = g(P,Q)$ является проектором для произвольного выбора проекторов P, Q тогда и только тогда, когда*

$$g = ug'u^{-1}, \tag{73}$$

где матрица u, задающая подобие, есть произведение специальных многочленов, а g' есть один из проекторов:

$$g' = 0, \quad I, \quad P, \quad I-P, \quad Q, \quad I-Q. \tag{74}$$

А) В одну сторону утверждение очевидно. Возьмем произвольный инволютивный многочлен $g(P,Q)$. Докажем, что он удовлетворяет (71). Выполняется $g^2 = I$, поэтому g является невырожденным для любых P и Q. По теореме 1 он равен произведению специальных многочленов. Считаем это произведение стандартным:

$$g = \prod\nolimits_{i=1}^{k} f_i. \tag{75}$$

Вначале полагаем, что $g' = f_1 ... f_k, \quad g = ug'u^{-1}$, где $u = I$. Затем покажем, что в трансформирующую матрицу u можно переносить сомножители f_i из g' так, что в результате получим (71) и (72).

Если $k = 1$, то g может быть или "плюс-минус"единичной матрицей, или линейным биномом с коэффициентом -2: $g = \pm(I-2P), \quad \pm(I-2Q)$. Далее считаем, что $\deg g > 0$.

При $k > 1$ выражение g^2 содержит соседние сомножители f_k, f_1.

$$g^2 = f_1 f_2 \dots f_{k-1} f_k \cdot f_1 f_2 \dots f_{k-1} f_k = I. \tag{76}$$

Если f_k, f_1 такие, что (76) остается стандартным, то по (26)

$$\deg g^2 \geqslant 2 \deg g - 1.$$

Так как по (76) $\deg g^2 = 0$, получаем $\deg g \leqslant 1/2$. Но $\deg g > 0$. Получили, что равенство $g^2 = I$ не может выполняться, если произведение (76) стандартное.

Перечислим случаи, когда (76) будет стандартным:

а) Сомножители f_k, f_1 разного рода.

б) f_k, f_1 — одного рода, но разных видов, и среди них нет линейных биномов.

Остались два случая, когда стандартность (76) под вопросом:

I. Сомножители f_k, f_1 одного вида.

IIа. f_1 — линейный бином, f_k — того же рода, но не является линейным биномом.

IIб. f_k — линейный бином, f_1 — того же рода и не является линейным биномом.

Покажем, что случай IIа сводится или к случаям а), б), или к случаю I. Без потери общности полагаем, что $f_1, f_k \in S$.

Вначале, для случая IIа считаем, что в g' не все множители одного рода. Пусть $k > 2$. Применим следствие из леммы 3, переставим первый множитель g' в конец выражения:

$$g' = f_2 ... f_k f_1. \tag{77}$$

(При этом мы меняем трансформирующую матрицу $u := uf_1$. В данном случае многочлен из леммы 3 равен $r(x) = x^2 - 1$).

Используя (24) "спрячем"линейный бином "внутрь"произведения (77)

$$g' = f_2 ... f_{k-1} f_k f_1 = f_2 ... f_{k-1} f_1 f_k', \quad f_k' \in S. \tag{78}$$

Будем "двигать"этот линейный бином f_1 влево среди сомножителей того же рода, до тех пор пока не найдем другой линейный бином этого рода, если он существует. В любом случае произойдет "остановка так как не все множители g' одного рода. После возможного сокращения количество сомножителей g' может стать меньше на 1 или на 2.

Полученное в (78) выражение будут стандартным. Вторая степень этого выражения не будет стандартной, только если нелинейные сомножители f_2, f_k' одного вида — это случай I.

Если для случая IIа все множители $g' = f_1 ... f_k$ одного рода и $k > 2$, то применяя (24) получим, что
$$(g')^2 = (f_1)^2 f_2' ... f_k' \cdot f_2 ... f_k, \quad (f_1 f_i' = f_i f_1).$$

Выражение $(g')^2$ будет стандартным произведением или когда сомножители f_2, f_k' разного вида — для нечетного k, или для четного k для случая $f_k' f_2 \neq I$. Для оставшегося случая $f_k' f_2 = I$ для четного k ($f_k' f_2 = I$ эквивалентно $f_k f_1 f_2 = f_1$) применим следствие из леммы 3 к выражению $g' = f_1 ... f_k$:

$$g' = f_3 ... f_{k-1}(f_k f_1 f_2) = f_3 ... f_{k-1} f_1 = f_1 f_3' ... f_{k-1}',$$

причем $u := u f_1 f_2$. Таким образом, для этого случая число множителей g' уменьшено на 2.

Случай IIб сводится к случаю а). Линейный бином f_k переставляется в начало произведения:
$$g' = f_k f_1 f_2 ... f_{k-1}, \quad (u := u f_k^{-1})...$$

Произведение g' осталось стандартным. Так как f_k и f_{k-1} разных родов, то и $(g')^2$ будет стандартным.

Осталось рассмотреть случай I. Переставляем первый множитель f_1 в конец произведения:

$$g' = f_2 ... f_{k-1}(f_k f_1), \quad (u := u f_1).$$

Произведение g' после перестановки осталось стандартным. Рассмотрим $(g')^2$. Если выражение $f_k f_1$ не будет единичной матрицей, то $(g')^2$ будет стандартным произведением. Поэтому $f_k = f_1^{-1}$.

Таким образом, для $k > 2$ доказано, что стандартное произведение (75) есть инволюция, только если оно имеет вид
$$g = u g' u^{-1}. \tag{79}$$

Причем g' является стандартным, имеет вид (75) и является инволюцией, но имеет сомножителей меньше чем g.

Рассмотрим случай $k = 2$. Выражение g^2 для $g = f_1 f_2$ не будет стандартным только для случая II — $f_1 = xP + I, \quad f_2 = \sum_i \alpha_i s_i + I$. Учитывая (19) и (20) получаем:

$$\begin{aligned} g^2 = (f_1 f_k)^2 = ((x+1) \textstyle\sum_i \alpha_i s_i + xP + I)^2 = \\ = (x+1)(x+2) \textstyle\sum_i \alpha_i s_i + x(x+2)P + I. \end{aligned}$$

Это произведение будет единичной матрицей только при $x = -2$. (см. [3]).

В итоге получили такую инволюцию:

$$g = (\sum_i \alpha_i s_i + I)(I - 2P) = (I - 2P)(-\sum_i \alpha_i s_i + I), \tag{80}$$

для которой выполняется тождество

$$(\sum_i \alpha_i s_i + I)(I - 2P) = ((\sum_i \alpha_i s_i)/2 + I)(I - 2P)(-(\sum_i \alpha_i s_i)/2 + I),$$

оно объясняет почему (80) не противоречит (79).

Доказательство теоремы 5 А) завершено.

Б) Матрица V является проектором тогда и только тогда, когда матрица $I-2V$ является инволюцией. Из (71) получаем

$$I-2V=ug'u^{-1},\quad V=u(I-g')u^{-1}/2.$$

Так как g' принимает значения из (72), то $(I-g')/2$ принимает значения из (74). Доказательство теоремы 5 завершено.

Матрица A называется нильпотентной индекса k, если существует целое число $k\geqslant 2$, что $A^k=0$, но $A^{k-1}\neq 0$. Назовем многочлен $g(P,Q)$ нильпотентным индекса k (k целое, $k\geqslant 2$), когда существуют проекторы P и Q такие, что $g(P,Q)^{k-1}\neq 0$, но $g(P,Q)^k=0$ для любых проекторов P и Q.

Теорема 6. *Многочлен $g=g(P,Q)$ будет нильпотентным многочленом индекса 2 тогда и только тогда, когда*

$$g=u(f-I)u^{-1}, \tag{81}$$

где матрица u, задающая подобие, есть произведение специальных многочленов, а f специальный многочлен из множеств S,T,S^τ,T^τ.

Если у нас есть нильпотентный многочлен g индекса 2, то мы имеем и всегда невырожденный многочлен $I+g$. Так как если $g^2=0$, то $(I+g)^{-1}=I-g$.

По теореме 1

$$I+g=\prod\nolimits_{i=1}^{k} f_i=F. \tag{82}$$

Для $k=1$ из (82) следует, что

$$g=f_1-I, \tag{83}$$

$g^2=0$, если $f_1\in S,T,S^\tau,T^\tau$.

Из (82) получаем

$$g^2=F^2-2F+I=0. \tag{84}$$

Если f_k,f_1 такие, что произведение F^2 остается стандартным, то по (26) и (84)

$$\deg F^2=2\deg F-v=\deg F\quad\Rightarrow\quad \deg F=v=0,1.$$

Нетрудно показать, что никакой многочлен первой степени не является нильпотентным. Таким образом, в выражении F^2 должны происходить сокращения. Как и при доказательстве теоремы 5 А) повторяя дословно приведенные там рассуждения о том, какие многочлены g допускают сокращение в g^2, получим

$$g+I=F=ug'u^{-1}. \tag{85}$$

Причем многочлен $g'-I$ является нильпотентным. Многочлен g' имеет сомножителей меньше, чем $g+I$, и является стандартным произведением. (При применении леммы 3 надо учитывать, что $r(x)=(x-1)^2$, это следует из (84)).

Рассмотрим случай $k=2$. Вторая степень выражения $g+I=f_1f_2$ не будет стандартной, как и в теореме 5, только для случая II — $f_1=xP+I,\quad f_2=\sum_i\alpha_is_i+I$. Учитывая (19) и (20):

$$\begin{aligned}g^2&=(f_1f_2-I)^2=((x+1)\textstyle\sum_i\alpha_is_i+xP)^2=\\&=x^2P+x(x+1)\textstyle\sum_i\alpha_is_i=0.\end{aligned}$$

Полученный многочлен будет нулевым для любых проекторов P,Q (см. [3]), когда его коэффициенты будут нулевыми. Таким образом, $x=0$. Но мы не получили новых решений, фактически это случай $k=1$. Поэтому k не может быть равно 2. Окончательно, из (85) учитывая (83) получаем формулу (81). Теорема 6 доказана.

6. Заключение

Таким образом, доказано что многочлен от двух проекторов, который является невырожденным при любом выборе этих проекторов, раскладывается единственным образом в произведение специальных многочленов. Последние не допускают разложения на сомножители меньшей степени.

Из этого результата получено, что многочлен-проектор подобен одному из "элементарных" проекторов $P, I-P, Q, I-Q$; а нильпотентный многочлен подобен линейной комбинации специальных нелинейных биномов одного вида. Трансформирующая матрица этих подобий есть всегда невырожденный многочлен. Аналогичные результаты получены в [16] для ортопроекторов. Коэффициенты многочлена-ортопроектора определяются через коэффициенты чебышевских многочленов второго рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Икрамов Х. Д. Об одновременной приводимости к блочно-треугольному виду пар косых проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 2. С. 181-182.

2. Икрамов Х. Д. Одновременное приведение к блочно-треугольному виду и теоремы о парах комплексных идемпотент // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 979-982.

3. Ветошкин А. М. Свойства многочленов от двух проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. с. 189-192.

4. Джордж А., Икрамов Х. Д. Замечание о канонической форме пары ортопроекторов // Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2004.

5. Икрамов Х. Д. О канонической форме проекторов относительно унитарного подобия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 3. С. 3–5.

6. Икрамов Х. Д. Каноническая форма как средство доказательства свойств проекторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 9. С. 1285–1290.

7. Икрамов Х. Д. Квазидиагонализуемость косых проекторов как частный случай некоммутативной спектральной теоремы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1123–1130.

8. Икрамов Х. Д. Канонические формы проекторов относительно унитарного подобия и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1534–1539.

9. Djokovic D. Z. “Unitary similarity of projectors”, Aequationes Mathematicae, 42, 220-224 (1991).

10. Bottcher A., Spitkovsky I.M. “A gentle guide to the basics of two projections theory”, Linear Algebra Appl. 432, 1412–1459 (2010).

11. Roch S., Silbermann B. “Algebras generated by idempotents and the symbol calculus for singular integral operators“, Integral Equat. Operator Theory. 11, 385–419 (1988).

12. Gohberg I., Krupnik N. Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols // Integral Equat. Operator Theory. 16, 514–529 (1993).

13. Альпин Ю. А., Икрамов Х. Д. Об унитарном подобии алгебр, порождаемых парами ортопроекторов // Численные методы и вопросы организации вычислений. XVIII, Зап. научн. сем. ПОМИ, 323, ПОМИ, СПб., 2005, 5–14.

14. Spitkovsky I. M. “Once more on algebras generated by two projections”, Linear Algebra Appl. 208, 377-395 (1994).

15. Spitkovsky I. M. “On polinomials in two projections”, Electronic Journal of Linear Algebra15, 154-158 (2006).

16. Ветошкин А.М. Матричные многочлены от переменных проекторов, которые сами являются проекторами // Автоматизация и компьютеризация информационной техники и технологии. Научн. тр. Вып. 341. М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2008. С. 69–78.

REFERENCES

1. Kh. D. Ikramov. 1998, "On simultaneous reduction of a pair of oblique projectors to block triangular form" , Comput. Math. Math. Phys. 38 (2), pp. 173-174.

2. Kh. D. Ikramov. 2011, "Simultaneous reduction to block triangular form and theorems on pairs of complex idempotents" , Comput. Math. Math. Phys. 51 (6), pp. 915-918.

3. Vetoshkin A. M., 2015, "Property of polinimials in two proectors" , Comput. Math. Math. Phys. 55 (2), pp. 179-182.

4. A. George and Kh. D. Ikramov. 2006, "A note on the canonical form for a pair of orthoprojectors" , J. Math. Sci. 132 (2), pp. 153-155.

5. Ikramov Kh. D. 1996, “A canonical form for projectors under unitary similarity”, Comput. Math. Math. Phys. 36 (3), pp. 279–281.

6. Ikramov Kh. D. 2000, “The canonical form as a tool for proving the properties of projectors”, Comput. Math. Math. Phys. 40 (9), pp. 1233–1238.

7. Ikramov Kh. D. 2000, “The quasidiagonalizability of oblique projectors as a particular case of the noncommutative spectral theorem”, Comput. Math. Math. Phys. 40 (8) pp. 1077–1084.

8. Ikramov Kh. D. 2004, “Canonical forms of projectors with respect to unitary similarity and their applications”, Comput. Math. Math. Phys. 44 (9), pp. 1456–1461.

9. Djokovic D. Z. 1991, “Unitary similarity of projectors”, Aequationes Mathematicae, 42, pp. 220-224.

10. Bottcher A., Spitkovsky I. M. 2010, “A gentle guide to the basics of two projections theory”, Linear Algebra Appl. 432, pp. 1412–1459.

11. Roch S., Silbermann B. 1988, “Algebras generated by idempotents and the symbol calculus for singular integral operators“, Integral Equat. Operator Theory. 11, pp. 385–419.

12. Gohberg I., Krupnik N. 1993, Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols, Integral Equat. Operator Theory. 16, pp. 514–529.

13. Alpin Yu. A., Ikramov Kh. D. 2006, “Unitary similarity of algebras generated by pairs of orthoprojectors”, J. Math. Sci. (N. Y.), 137(3), pp. 4763–4768.

14. Spitkovsky I. M. 1994, “Once more on algebras generated by two projections”, Linear Algebra Appl. 208, pp. 377-395.

15. Spitkovsky I. M. 2006, “On polinomials in two projections”, Electronic Journal of Linear Algebra15, pp. 154-158.

16. A. M. Vetoshkin. 2008, “Matrix polynomials in variable projectors that are projectors themselves”, in Automation and Computerization of Data Processing Techniques and Technologies (Mosk. Gos. Univ. Lesa, Moscow, 2008), Vol. 341, pp. 69–78.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Мытищенский филиал

Получено 30.06.2016 Принято 13.03.2017