ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 18 Выпуск 1

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-1-29-43

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ ВИДА $\sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$

М. Г. Башмакова, Е. С. Золотухина (г. Брянск)

Аннотация

В данной работе рассмотрено обобщение некоторых методов, позволяющих получать оценки меры иррациональности чисел вида $\gamma_d = \sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ при $d = 2k, d = 4k+1, k \in \mathbb{N}$, и приведён обзор известных на данный момент результатов.

Мера иррациональности различных значений гипергеометрической функции Гаусса, в частности

$$2F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{d}\right) = \sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1},$$

оценивалась неоднократно. Первые подобные оценки для отдельных значений были получены в работах Д. Рина [1], М.Хуттнера [2], А. К. Дубицкаса [3]. Позднее К. Ваананеном, А. Хеймоненом и Т. Матала-Ахо в [4] был предложен общий метод, позволяющий строить оценки показателя иррациональности значений гипергеометрической функции

$$F\left(1, \frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}; \frac{r}{s}\right), k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, (r,s) = 1, \frac{r}{s} \in (-1, 1).$$

Данный метод использовал полиномы Якоби для построения рациональных приближений функции Гаусса.

В работе [4] было получено много конкретных результатов. Некоторые из них не улучшены до сих пор, но для отдельных классов значений гипергеометрической функции в дальнейшем были разработаны специализированные методы, позволившие уменьшить оценки. Так, в трудах [5], [6] авторами, работавшими под руководством В. Х. Салихова, были усилены результаты о показателях иррациональности некоторых значений вида γ_d. В основе доказательств лежало использование симметризованных интегралов.

Следует отметить, что вещественные или комплексные симметризованные интегралы в последнее время широко применяются для оценки показателей иррациональности. С помощью таких интегралов были получены новые оценки для $\ln 2$ (см. [7]), $\ln 3$, $\ln\pi$ (см. [8], [9]) и других чисел.

Проведём исследование и сравнение некоторых из таких симметризованных конструкций, позволивших ранее улучшить оценки мер иррациональности для конкретных значений γ_d.

Ключевые слова: показатель иррациональности, гипергеометрическая функция Гаусса, симметризованные интегралы.

Библиография: 17 названий.

ON IRRATIONALITY MEASURE OF THE NUMBERS $\sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$

M. G. Bashmakova, E. S. Zolotukhina (Bryansk)

Abstract

In the present paper we will consider the generalization of some methods for evaluation of irrationality measures for $\gamma_d = \sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ and currently known results overview.

The extent of irrationality for various values of Gauss hypergeometric function were estimated repeatedly, in particular for $2F(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{d}) = \sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$. The first such estimates in some special cases were obtained by D. Rhinn [1], M. Huttner [2], D. Dubitskas [3]. Afterward by K. Vaananen, A. Heimonen and D. Matala-Aho [4] was elaborated the general method, which one made it possible to get upper bounds for irrationality measures of the Gauss hypergeometric function values $F(1, \frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}; \frac{r}{s}), k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, (r, s) = 1, \frac{r}{s} \in (-1, 1)$. This method used the Jacobi type polynomials to construct rational approach to the hypergeometric function. In [4] have been obtained many certain estimates, and some of them have not been improved till now. But for the special classes of the values of hypergeometric function later were elaborated especial methods, which allowed to get better evaluations. In the papers [5], [6] authors, worked under supervision of V.Kh.Salikhov, obtained better estimates for the extent of irrationality for some specific values γ_d. In the basis of proofs for that results were lying symmetrized integral constructions.

It should be remarked, that lately symmetrized integrals uses very broadly for researching of irrationality measures. By using such integrals were obtained new estimates for $\ln 2$([7]),$\ln 3, \ln\pi$, ([8], [9]) and other values.

Here we present research and compare some of such symmetrized constructions, which earlier allowed to improve upper bounds of irrationality measure for specific values of γ_d.

Keywords: Irrationality measure, Gauss hypergeometric function, symmetrized integrals.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Для любого иррационального числа γ можно получить количественную характеристику степени его приближения рациональными дробями. Показатель иррациональности или мера иррациональности $\mu(\gamma)$ определяется как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$. Точное значение меры иррациональности известно для немногих чисел, в большинстве случаев имеются лишь оценки сверху величины $\mu(\gamma)$ для различных классов чисел.

Оценки меры иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса, приведенные в работе [4], для многих случаев остаются лучшими на данный момент, но ряд результатов был усилен. Так, оценки показателей иррациональности чисел вида $\gamma_d = \sqrt{d}\ln\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ при $d = 5; 8$ были улучшены в работах Е. С. Золотухиной [6] и М. Г. Башмаковой [5] с помощью симметризованных интегралов. Идея симметрии подынтегральной функции позволяет усиливать аналогичные результаты работы [4] при четных d в общем случае (см. [5]). Уточнить часть этих оценок можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $r, s \in \mathbb{N}$ — четные, $k = 2^t m$, $t \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ — нечетное,*

$$K = r + (r-s)\ln 2, M = \max\left\{\left(\frac{s}{r}\right)^s\left(1-\frac{s}{r}\right)^{r-s}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{r-s}, \frac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^{r+s}}\right\}.$$

Если выполнено $-K - \ln M < 0$, *то справедливо неравенство*

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}\right) \leq 1 - \frac{K + (r+s)\ln\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}{K + \ln M}.$$

Данным методом в [5] была получена оценка $\mu(\gamma_8) \leq 11.6500\ldots$. Отметим, что в [4] она составляла $\mu(\gamma_8) \leq 41.032\ldots$. В настоящей работе приведем другие, менее значимые результаты.

Следующая теорема помогает усилить результаты теоремы 1 при $m = 1$ в случае нечетных $t \geq 5$.

Теорема 2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0(\mu)$, *где* $q_0(\mu)$ – *достаточно большое число. Тогда существует такое число* $\mu_0(k) \in \mathbb{R}^+$, *что для любого* $\mu > \mu_0(k)$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1} - \frac{p}{q}\right| > q^{-\mu}.$$

В случае нечетных $d = 2l + 1$, где $l = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. при $d = 4k + 1$, усиление результатов работы [4] с помощью конструкций М. Г. Башмаковой и Е. С. Золотухиной происходит только при $d = 5$ (или $k = 1$). Следует отметить, что оценка $\mu(\gamma_5) \leq 4.4937\ldots$, приведенная в [4], подтверждала результат, полученный ранее в работе М. Хата [10]. Лучший результат $\mu(\gamma_5) \leq 3.71331\ldots$ найден М. Г. Башмаковой в [11]. Ею в [5] также были получены оценки мер иррациональности чисел γ_d при $d = 13$ ($k = 3$), $d = 17$ ($k = 4$). Они были улучшены А. А. Полянским в [12] и составили: $\mu(\gamma_{13}) \leq 3.51433\ldots$ и $\mu(\gamma_{17}) \leq 3.47833\ldots$. А. А. Полянским в [13] приведен также ряд оценок сверху для показателей иррациональности чисел γ_d, $d = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, и при $k = 5, 6, \ldots 10$.

С помощью следующей теоремы могут быть получены результаты, усиливающие оценки А. А. Полянского при $k = 5; 7 - 10$, и не указанные в работе [4].

Теорема 3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0(\mu)$, *где* $q_0(\mu)$ – *достаточно большое число. Тогда существует такое число* $\mu_0(k) \in \mathbb{R}^+$, *что для любого* $\mu > \mu_0(k)$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sqrt{4k+1}\ln\frac{\sqrt{4k+1}+1}{\sqrt{4k+1}-1} - \frac{p}{q}\right| > q^{-\mu}.$$

2. Основная лемма и основные конструкции

Построение всех дальнейших оценок основано на представлении интеграла в виде линейной формы с целыми коэффициентами и использовании для неё классического подхода М. Хата:

Лемма 1. *[[14], лемма 3.1] Пусть* $n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}$ *-иррационально,* $l_n = g_n\gamma + p_n$, *где* $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| = -\delta$, $\delta > 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|g_n| \leq \tau$, *тогда* $\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\tau}{\delta}$.

Рассмотрим интеграл

$$I_n(b) = \int\limits_0^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{b^2})^{sn}(1-x^2)^{rn-sn}b^{rn+sn+1}}{(b^2-x^2)^{rn+1}}dx = \int\limits_0^1 f_n(b,x)dx, \qquad (1)$$

где $r, s-$ чётные натуральные числа $r \leq s, n \in \mathbb{N}, n \to \infty$. Интегральная конструкция такого вида впервые была предложена в [15], но позволила получить новые результаты только после некоторой модификации в работе М. Г. Башмаковой [5]. Особенностью данного интеграла является симметричность подынтегральной функции относительно замены b на $\frac{1}{b}$, что позволяет представить его в виде [см. [5], предложение 1]:

$$I_n(b) = R_n(b+\frac{1}{b}) + A_{1n}(b+\frac{1}{b})\ln\frac{b+1}{b-1}, \quad \text{где } R_n(t), A_{1n}(t) \in \mathbb{Q}(t) \tag{2}$$

и, в частности, делает интеграл удобным для использования параметра вида $b = \sqrt{k}+\sqrt{k-1}$, давая возможность строить оценки для величин γ_k.

Коэффициенты линейной формы имеют вид

$$R_n(b) = -\sum_{j=2}^{2rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1}(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}}), A_{1n}(b) \in \mathbb{Q}(b). \tag{3}$$

Обозначим для всех $j = 1, ..., rn+1$

$$M_j = \{\bar{m} = (m_1, ..., m_5) | m_\nu \in \mathbb{Z}^+, \nu = 1, .., 5;$$
$$m_1, m_2 \le sn; m_3, m_4 \le rn - sn; m_1 + ... + m_5 = rn + 1 - j\}$$

Тогда

$$A_n(b) = \sum_{\bar{m}\in M_j} \gamma(\bar{m})(b+\frac{1}{b})^{sn-m_1}(\frac{1}{b}-b)^{sn-m_2}(1-b)^{rn-sn-m_3}(1+b)^{rn-sn-m_4}(2b)^{-rn-1-m_5}b^{rn+sn+1},$$

$\gamma(\bar{m}) \in \mathbb{Z}$ для любого $\bar{m} \in M_j$. Заметим, что интеграл (1) не приводится к виду гипергеометрической функции.

Другая симметризованная интегральная конструкция использовалась Е. С. Золотухиной в [6].

$$I(a,b,c;\alpha,1) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{(x-(\alpha-1))^{an}((\alpha+1)-x)^{an}(x-\alpha)^{2bn}}{x^{cn+1}(2\alpha-x)^{cn+1}}dx \equiv \int_{\alpha}^{\alpha+1} R(x)dx, \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \longrightarrow \infty$, a, b, $c \in \mathbb{N}$, $a+b-c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Подынтегральная функция здесь обладает свойством симметрии $R(x) = R(2\alpha - x)$, ввиду которого справедливо следующее разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{cn+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(2\alpha-x)^j}\right), \tag{5}$$

где

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} b_i x^i, \; b_i \in \mathbb{R}, \; P(2\alpha - x) = P(x), \tag{6}$$

$$a_j = \frac{1}{(cn+1-j)!}\frac{d^{cn+1-j}}{dx^{cn+1-j}}\left(R(x)x^{cn+1}\right)\Bigg|_{x=0}. \tag{7}$$

С помощью замены $x = \alpha + \sqrt{t}$ интеграл (4) приводится к виду:

$$I(a,b,c;\alpha,1) = \frac{1}{2\alpha^{2cn+2}} \int_0^1 \frac{t^{bn-0.5}(1-t)^{an}}{\left(1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 t\right)^{cn+1}}dt. \tag{8}$$

Имеет место равенство

$$F\left(cn+1, bn+\frac{1}{2}; (a+b)n+\frac{3}{2}; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)$$
$$= 2\alpha^{2cn+2}\frac{\Gamma\left((a+b)n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(bn+\frac{1}{2}\right)\Gamma(an+1)}I(a,b,c;\alpha,1).$$

3. Рациональные приближения чисел вида $\frac{1}{2\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}$ при $k=2n$, $n\in\mathbb{N}$

Рассмотрим в интеграле (1) параметр $b=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}, k\in\mathbb{N}$. Как было доказано в [[5], лемма 2], справедливо следующее представление:

Лемма 2. *При $b=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}, k\in\mathbb{N}, k>1$, существуют $\nu(k),\alpha(k)\in\mathbb{R}^+$, такие что*

$$q_{rn}2^{\nu(k)n+\alpha(k)}(\frac{1}{2\sqrt{k}})I_n(b)=B_n+A_n\frac{1}{2\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}, A_n, B_n\in\mathbb{Z}, \tag{9}$$

где $q_M =HOK(1,...,M)$.

Рассматриваемый интеграл и это представление дают возможность более эффективно оценивать меру иррациональности чисел γ_d при чётных d. При нечётных d только один частный случай $\mu(\gamma_3)\le 15.6592..$, рассмотренный в [5], улучшил имеющиеся оценки, остальные результаты оказались намного хуже, чем уже известные, например в [4] . Метод позволяет получить оценку и в случаях, когда $\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ является рациональным числом, но результаты также уступают полученным другими методами.

Представление интеграла $I_n(b)$ и лемма 2 на основании леммы 1 позволяют получить следующее утверждение, которое рассматривалось в [[5], лемма 4].

Лемма 3. *Пусть $s,r\in\mathbb{N}-$ чётные, $k\in\mathbb{N}, k>1, \nu(k)$ определяется в соответствии с леммой 2 и выполнено $-K-\ln M>0$, где*

$$M=max\{(\tfrac{s}{r})^s(1-\tfrac{s}{r})^{r-s}(\tfrac{1}{2\sqrt{k}})^{r-s}, \tfrac{1}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^{r+s}}\}, K=r+\nu(k)\ln 2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mu(\frac{1}{\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1})\le 1-\frac{K+(r+s)\ln(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{K+\ln M}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай $k=2^tm, m\in\mathbb{N}$, нечётное. Для получения соответствующих мер иррациональности γ_k необходимо оценить $\nu(k)$. Обобщим для данных k метод, использованный в работе [5] для отдельных значений.

Лемма 4. *Пусть $b=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}, k=2^tm, t\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}, m>1-$ нечётное, тогда можно положить в лемме 2 $\nu(k)=r-s, \alpha(k)=2$.*

Доказательство.
Обозначим $\mathbb{K}-$ кольцо целых алгебраических чисел. Докажем, что

$$2^{(r-s)n+2}\tfrac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}}=A'_{jn}, A'_{jn}-\text{ целое алгебраическое число.}$$

Из представления $A_{in}(b)$ имеем при $j = 1, ..., rn + 1$

$\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} =$

$= \sum\limits_{\bar{m}\in M_j} \gamma(\bar{m})(b+\frac{1}{b})^{sn-m_1}(1-b)^{rn-m_2-m_3}(1+b)^{rn-m_2-m_4-j+1}2^{-rn-m_3-1}b^{m_2-m_5}.$

Так как $b, \frac{1}{b} \in \mathbb{K}$, то $\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = P_1(b)\cdot 2^{d_1}, P_1(b) \in \mathbb{K}, d_1 \in \mathbb{Z}$. Для любого нечётного m выполняются соотношения:

$$b + \frac{1}{b} = 2\cdot 2^{\frac{t}{2}}\sqrt{m} = 2^{1+\frac{t}{2}}\sqrt{m}, (1\pm b)^2 = b\cdot 2(2^{\frac{t}{2}}\sqrt{m}\pm 1).$$

Пусть

$rn - m_2 - m_3 = 2l_1 + h_1, rn - m_2 - m_4 - j + 1 = 2l_2 + h_2, h_1, h_2 \in \{0,1\}, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $l_1 \geqslant \frac{rn-m_2-m_3-1}{2}, l_2 \geqslant \frac{rn-m_2-m_4-j}{2}$.

Получаем, используя определение M_j :

$d_1 \geqslant (1+\frac{t}{2})(sn-m_1) - rn - m_5 - 1 + l_1 + l_2 \geqslant$

$\geqslant (1+\frac{t}{2})sn - (1+\frac{t}{2})m_1 - rn - m_5 - 1 + (rn - m_2 - \frac{m_3}{2} - \frac{m_4}{2} - \frac{j-1}{2} - 1) =$

$= (1+\frac{t}{2})sn - (1+\frac{t}{2})m_1 - \frac{m_3}{2} - \frac{m_4}{2} - m_5 - 2 - rn - (\frac{rn-m_1-m_2-m_3-m_4-m_5}{2}) =$

$= (1+\frac{t}{2})sn - \frac{rn}{2} - (\frac{t}{2}+1)m_1 + \frac{m_1}{2} - \frac{m_5}{2} - 2 \geqslant$

$\geqslant (1+\frac{t}{2})sn - \frac{t}{2}m_1 - \frac{rn}{2} - \frac{m_1}{2} - \frac{m_5}{2} - 2 = sn - rn - 2$, так как $m_1 + m_5 \leq rn, m_1 \leq sn$. Аналогичным образом можно доказать, что

$$2^{(r-s)n+2}\frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = A''_{jn}, A''_{jn} - \text{ целое алгебраическое число.}$$

Из представления $A_{in}(b)$ имеем при $j = 1, ..., rn + 1$

$\frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} =$

$= \sum\limits_{\bar{m}\in M_j} \gamma(\bar{m})(b+\frac{1}{b})^{sn-m_1}(1-b)^{rn-m_2-m_3-j+1}(1+b)^{rn-m_2-m_4}2^{-rn-m_3-1}b^{m_2-m_5}$. При этом $b, \frac{1}{b} \in \mathbb{K}$ и $\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = P_1(b)\cdot 2^{d_1}, P_1(b) \in \mathbb{K}, d_1 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $rn - m_2 - m_3 - j + 1 = 2l_1 + h_1, rn - m_2 - m_4 = 2l_2 + h_2$,

$h_1, h_2 \in \{0,1\}, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+$, тогда $l_1 \geqslant \frac{rn-m_2-m_3-j}{2}, l_2 \geqslant \frac{rn-m_2-m_4-1}{2}$. Тем же способом получаем $d_2 \geqslant (1+\frac{t}{2})(sn-m_1) - rn - m_5 - 1 + l_1 + l_2 \geqslant sn - rn - 2$.

Таким образом, определён основной множитель для получения целых коэффициентов линейной формы, дальнейшие же рассуждения полностью повторяют [5], лемма 2.

Лемма 2 и соответствующие значения параметров $\nu(k), \alpha(k)$ дают утверждение теоремы 1 и позволяют получить оценки мер иррациональности для соответствующих γ_k. Так мы получим следующие оценки:

Таблица 1

k	$\mu(\gamma_k) \leq$	k	$\mu(\gamma_k) \leq$
4	15.1152...	6	15.6053...
8	11.6500...	10	9.8474...
12	8.7902...	14	8.0862...
16	7.5776...	18	7.1902...

Результаты при $k = 4, 16$, дающие оценку логарифмов рациональных чисел, как уже было сказано, значительно уступают полученным другими методами. Так, оценка для $\gamma_4 = \ln 3$, полученная в [8] составляла $\mu(\ln 3) \leqslant 5.125...$

4. Рациональные приближения чисел вида $\sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$

Для доказательства теоремы 2 в интеграле (4) следует положить $\alpha = 2^k\sqrt{2}$. Имеем

$$I(a,b,c;2^k\sqrt{2},1) = \int\limits_{2^k\sqrt{2}}^{2^k\sqrt{2}+1} \frac{\left(x-\left(2^k\sqrt{2}-1\right)\right)^{an}\left(2^k\sqrt{2}+1-x\right)^{an}\left(x-2^k\sqrt{2}\right)^{2bn}}{x^{cn+1}\left(2^{k+1}\sqrt{2}-x\right)^{cn+1}}dx. \tag{11}$$

Пусть $q_M = \text{НОК}(1,2,\dots,M)$, $M\in\mathbb{N}$, K — кольцо чисел вида $e\sqrt{2}+f$, где $e,f\in\mathbb{Z}$. Определим коэффициенты a_j и b_i разложений (5) и (6).

Лемма 5. *Для всех $j=1,\dots,cn+1$ справедливо представление*

$$2^{((2k+3)c-(2k+1)b)n+k+2}\left(2^{2k+1}-1\right)^{(c-a)n}a_j = \left(\sqrt{2}\right)^{j_1}\left(2^{2k+1}-1\right)^{j-1}A_j, \tag{12}$$

где $j\equiv j_1(\mod 2)$, $A_j\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Обозначим $D_m(f(x)) = \dfrac{1}{m!}\dfrac{d^m}{dx^m}(f(x))\Big|_{x=0}$, $m\geq 0$. По формуле дифференцирования Лейбница, учитывая (7), имеем

$$2^{((2k+3)c-(2k+1)b)n+k+2}\left(2^{2k+1}-1\right)^{(c-a)n}a_j = \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_4=cn+1-j,\\ m_i\geq 0}} c_{\bar{m}}\left(2^k\sqrt{2}-1\right)^{cn-m_1}$$
$$\times\left(2^k\sqrt{2}+1\right)^{cn-m_2}2^{(k+1)cn-km_3-(k+1)m_4}\left(\sqrt{2}\right)^{cn-m_3-m_4+1},$$

где $\bar{m}=(m_1,m_2,m_3,m_4)$, $c_{\bar{m}}\in\mathbb{Z}$.

Заметим, что $(k+1)cn-km_3-(k+1)m_4\geq(k+1)(j-1)$.

Если $m_1=m_2$, то $\left(2^k\sqrt{2}-1\right)^{cn-m_1}\left(2^k\sqrt{2}+1\right)^{cn-m_2} = \left(2^{2k+1}-1\right)^{cn-m_1}\in\mathbb{Z}$, так как $cn-m_1\geq j-1$, и $cn-m_3-m_4+1\equiv j(\mod 2)$.

Если $m_1\neq m_2$, $m=\min(cn-m_1;cn-m_2)$, $\underline{m}=\max(cn-m_1;cn-m_2)$, то, группируя слагаемые при $cn-m_2=m+\rho$, $cn-m_1=m+\rho$, $\rho\geq 1$, и используя тот факт, что $c_{\overline{m}}$ для таких слагаемых одинаковы, получим для них множитель $\left(2^{2k+1}-1\right)^m\left(\left(2^k\sqrt{2}-1\right)^\rho+\left(2^k\sqrt{2}+1\right)^\rho\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{\rho_1}A_\rho, m\geq j-1, A_\rho\in\mathbb{Z}, \rho\equiv\rho_1(\mod 2)$. Так как $cn-m_3-m_4+1=2cn+j-2\underline{m}+\rho$, то $\left(\sqrt{2}^\rho\right)\left(2^{2k+1}-1\right)^m\left(\left(2^k\sqrt{2}-1\right)^\rho+\left(2^k\sqrt{2}+1\right)^\rho\right)\in\mathbb{Z}$, и $cn-m_3-m_4+1-\rho\equiv j(\mod 2)$. Что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Для всех $i=0,1,\dots,2(a+b-c)n-2$ справедливо представление*

$$b_i=\left(\sqrt{2}\right)^{i_1}C_i, \text{ где } i\equiv i_1(\mod 2),\ C_i\in\mathbb{Z}. \tag{13}$$

Доказательство. Из (5) и (6) следует, что $P(x)$ – часть разложения функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x=\infty$, содержащая все неотрицательные степени x. Из (11) имеем

$$R(x) = (-1)^{(a-c)n-1}x^{2(a+b-c)-2}\left(1-\frac{2^k\sqrt{2}-1}{x}\right)^{an}\left(1-\frac{2^k\sqrt{2}+1}{x}\right)^{an}$$
$$\times\left(1-\frac{2^k\sqrt{2}}{x}\right)^{2bn}\left(1-\frac{2^{2k+1}\sqrt{2}}{x}\right)^{-cn-1},$$

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_4=2(a+b-c)n-2-i,\\ m_j\geq 0}} d_{\bar m}\left(2^k\sqrt{2}-1\right)^{m_1}\left(2^k\sqrt{2}+1\right)^{m_2}2^{km_3+(k+1)m_4}\\ &\times \left(\sqrt{2}\right)^{m_3+m_4}, \bar m=(m_1,m_2,m_3,m_4), d_{\overline{m}}\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.

В следующей лемме установим некоторые арифметические свойства коэффициентов β_i в разложении
$$P(x)=\sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2}\beta_i\left(x-\left(2^k\sqrt{2}-1\right)\right)^i. \tag{14}$$

Лемма 7. *Пусть* $(2k+1)b-(2k+3)c>0$. *Тогда*
1) для $i=0,\ldots,an-1$: $2^{k+2}\beta_i=2^{((2k+1)b-(2k+3)c)n}M_i$, *где* $M_i\in K$;
2) для $an\leq i\leq 2an$ *при* $(2k+1)b-(2k+3)c\geq a$: $2^{k+2}\beta_i=2^{2an-i}M_i$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.5 работы [16].

Далее представим интеграл (11) в виде линейной формы от 1 и $\sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1}$ с целыми коэффициентами.

Лемма 8. *Пусть* $Q_1=\max\{c,2(a+b-c)\}$, $s_1=\min\{(2k+1)b-(2k+3)c,2a\}$,
$$s_2=\begin{cases} -s_1, \text{ если } (2k+1)b-(2k+3)c>0,\\ (2k+3)c-(2k+1)b, \text{если } (2k+1)b-(2k+3)c\leq 0,\end{cases}$$
$$s_3=\max\{0,c-a\}.$$
Тогда справедливо представление вида
$$q_{Q_1n}2^{s_2n+k+3}\left(2^{2k+1}-1\right)^{s_3n}I=A\sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1}+B, \text{ где } A,\ B\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Проинтегрируем слагаемое в (5) при $j=1$, имеем
$$I_1=a_1\int\limits_{2^k\sqrt{2}}^{2^k\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2^{k+1}\sqrt{2}-x}\right)dx=a_1\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1}.$$

Тогда из (12) следует, что
$$2^{((2k+3)c-(2k+1)b)n+k+2}\left(2^{2k+1}-1\right)^{(c-a)n}I_1=A_1\sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1},\ A_1\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

При $j=2,\ldots,cn+1$ получим
$$I_2=\sum_{j=2}^{cn+1}a_j\int\limits_{2^k\sqrt{2}}^{2^k\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{x^j}+\frac{1}{(2^{k+1}\sqrt{2}-x)^j}\right)dx=\sum_{j=2}^{cn+1}\frac{a_j\left(\sqrt{2}\right)^{j_2}A'_j}{(j-1)\left(2^{2k+1}-1\right)^{j-1}},$$
где $j\equiv j_2(\mod 2)$, $A'_j\in\mathbb{Z}$. Следовательно, согласно (12) имеем
$$2^{((2k+3)c-(2k+1)b)n+k+2}\left(2^{2k+1}-1\right)^{(c-a)n}I_2=V_1,\ q_{cn}V_1\in\mathbb{Z}. \tag{16}$$

Далее, учитывая (6) и (13), получим

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int\limits_{2^k\sqrt{2}}^{2^k\sqrt{2}+1} P(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} b_i \int\limits_{2^k\sqrt{2}-1}^{2^k\sqrt{2}+1} x^i dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{i_1} C_i \left(\sqrt{2}\right)^{i_2} C_i'}{i+1},\ C_i, C_i' \in \mathbb{Z},\ i \equiv i_2 (\mod 2).
\end{aligned}
$$

И $2q_{2(a+b-c)n}I_3 \in \mathbb{Z}$. Также, учитывая (14), имеем

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int\limits_{2^k\sqrt{2}}^{2^k\sqrt{2}+1} P(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} \beta_i \int\limits_{2^k\sqrt{2}-1}^{2^k\sqrt{2}+1} \left(x - \left(2^k\sqrt{2}-1\right)\right)^i dx \\
&= \sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} \frac{2^i\beta_i}{i+1}.
\end{aligned}
$$

Тогда из леммы 7 следует, что при $(2k+1)b-(2k+3)c>0$:
1) при $(2k+1)b-(2k+3)c<a$: $q_{2(a+b-c)n}2^{((2k+3)c-(2k+1)b)n+k+3}I_3 \in \mathbb{Z}$;
2) при $(2k+1)b-(2k+3)c \geq a$: $q_{2(a+b-c)n}2^{-s_1n+k+3}I_3 \in \mathbb{Z}$.
Следовательно, при $(2k+1)b-(2k+3)c>0$ выполняется

$$
q_{2(a+b-c)n}2^{-s_1n+k+3}I_3 \in \mathbb{Z}. \tag{17}
$$

Если же $(2k+1)b-(2k+3)c \leq 0$, то

$$
q_{2(a+b-c)n}I_3 \in \mathbb{Z}. \tag{18}
$$

Таким образом, утверждение леммы выполняется в силу (5), (15)– (18).
Следующая лемма позволяет уточнить знаменатель q_{Q_1n}.

Лемма 9. *Пусть числа Q_1, s_2, s_3 определены как в лемме 8, $Q_2 = \max\{a, 2b\}$, $Q = \max\{Q_1, Q_2\}$, $\dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{(an)!(2bn)!((a+b-c)n)!}{(bn)!(cn)!(2(a+b-c)n)!}$, $A_n,\ B_n \in \mathbb{N}, (A_n, B_n) = 1$,*

$$
l_n = B_n^{-1}q_{Qn}2^{s_2n+k+3}\left(2^{2k+1}-1\right)^{s_3n} I = g_n\sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1} + p_n. \tag{19}
$$

Тогда $g_n,\ p_n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство леммы 9 подобно доказательству леммы 2.7 работы [16].
Далее доказательство теоремы 2 сводится к применению леммы 1 для линейной формы (19), то есть к нахождению числа $\mu_0(k) = 1 + \tau/\delta$, и проводится аналогично доказательству теоремы 2.2 в [16].
Рассмотрим функцию

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(x-\left(2^k\sqrt{2}-1\right)\right)^a \left(2^k\sqrt{2}+1-x\right)^a \left(x-2^k\sqrt{2}\right)^{2b}}{x^c\left(2^{k+1}\sqrt{2}-x\right)^c} &\equiv \frac{1}{2^{(2k+1)c}}f(t(k)) \\
&= \frac{1}{2^{(2k+1)c}}\frac{t^b(1-t)^a}{\left(1-\frac{t}{2^{2k+1}}\right)^c},\ \text{где } t=(x-2^k\sqrt{2})^2.
\end{aligned}
$$

Обозначим через $t_1(k)$ меньший корень уравнения $\frac{d}{dt}\ln(f(t(k))) = 0$, причем, $t_1(k) \in (0;1)$, через $t_2(k)$ — больший корень.

Для любого $k \geq 1$ (в частности, при выборе в (11) $a = 27$, $b = 50$, $c = 28$) существуют

$$\begin{aligned}
\delta(k) &= -\left(Q - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln B_n + (s_2 - (2k+1)c)\ln 2 + s_3 \ln\left(2^{2k+1} - 1\right) + \ln|f(t_1(k))|\right),\\
\tau(k) &= Q - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln B_n + (s_2 - (2k+1)c)\ln 2 + s_3 \ln\left(2^{2k+1} - 1\right) + \ln|f(t_2(k))|,
\end{aligned}$$

а, следовательно, и $\mu_0(k)$.

В работе [16] было показано, что в большинстве случаев наилучшие оценки, найденные с помощью интеграла (4), достигались при условии $b = c$. Тогда они совпадали с результатами работ [4] и [17]. Иначе происходило усиление. В данном случае наилучшие результаты для $\mu_0(k)$ получаются при условии $2a = (2k+1)b - (2k+3)c$ на параметры интеграла (11).

В таблице 2 приведем некоторые оценки показателей иррациональности чисел вида $\omega_k = \sqrt{2}\ln\frac{2^k\sqrt{2}+1}{2^k\sqrt{2}-1}$, полученных с помощью интеграла (11), и для сравнения результат применения интеграла М. Г. Башмаковой.

Таблица 2

k	М. Г. Башмакова: $\mu(\omega_k) \leq$	Е. С. Золотухина: $\mu(\omega_k) \leq$
1	11.6500...	12.3569...
2	5.8393...	4.2828...
3	4.2782...	3.2896...

При $k \geq 2$ наилучшие оценки могут быть получены с помощью интеграла (11). Рассмотрим более подробно эти результаты при $k = 2; 3$:

1) выбирая в интеграле (11) $k = 2$, $a = 27$, $b = 50$, $c = 28$, получим $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln B_n = 5.1344\ldots$, $t_1 = 0.6519\ldots$, $t_2 = 50.0827\ldots$, $\delta = 85.4800\ldots$, $\tau = 280.6193\ldots$;

2) выбирая в интеграле (11) $k = 3$, $a = 31$, $b = 50$, $c = 32$, имеем $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln B_n = 5.1435\ldots$, $t_1 = 0.6180\ldots$, $t_2 = 211.3411\ldots$, $\delta = 152.2802\ldots$, $\tau = 348.6757\ldots$.

5. Рациональные приближения чисел вида $\sqrt{4k+1}\ln\frac{\sqrt{4k+1}+1}{\sqrt{4k+1}-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

Для доказательства теоремы 3 в интеграле (4) выбираем $\alpha = \sqrt{4k+1}$:

$$I(a,b,c;\sqrt{4k+1},1) = \int\limits_{\sqrt{4k+1}}^{\sqrt{4k+1}+1} \frac{\left(x - (\sqrt{4k+1}-1)\right)^{an}\left(\sqrt{4k+1}+1-x\right)^{an}\left(x-\sqrt{4k+1}\right)^{2bn}}{x^{cn+1}\left(2\sqrt{4k+1}-x\right)^{cn+1}}dx. \tag{20}$$

Здесь наилучшие оценки при $k \geq 2$ достигаются при условии $b = c$ на параметры интеграла (20). Как уже было отмечено, при таком соотношении результаты работы [16] совпадали с результатами работ [4] и [17]. Но доказательство теоремы 3 с помощью интеграла (20) представляет интерес, так как некоторые оценки, получаемые при $k \geq 2$ усиливают результаты А. А. Полянского [см. [13]], а в работе [4] аналогичные конкретные результаты не были указаны.

В целом доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству рассмотренной выше теоремы 2 и теоремы 4.1 работы [16]. Поэтому далее подробно будут рассмотрены лишь некоторые моменты доказательства.

Лемма 10. *Справедливы следующие представления для коэффициентов разложения (5):*

$$2^{2(c-a)n+2}\,(4k+1)^{(c-b)n+1}\,k^{(c-a)n}a_j=\left(\sqrt{4k+1}\right)^{j_1}2^{j-1}k^{j-1}A_j,$$

где $j=1,\ldots,cn+1$, $j\equiv j_1(\mod 2)$, $A_j\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Число $\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}$ является положительным корнем уравнения $t^2+t-k=0$. По индукции можно показать, что $\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)^{\omega}=A_\omega\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}+B_\omega$, где $\omega\in\mathbb{N}$, $\omega\geq 2$, $A_\omega,B_\omega\in\mathbb{Z}$. Поэтому $2\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)^{\omega}=A_\omega\left(\sqrt{4k+1}-1\right)+2B_\omega$. Аналогично,

$$2\left(\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2}\right)^{\omega}=\overline{A}_\omega\left(\sqrt{4k+1}+1\right)+2\overline{B}_\omega,\quad \overline{A}_\omega,\overline{B}_\omega\in\mathbb{Z}.$$

Также $\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2}\right)=k$.

Далее аналогично доказательству леммы 5, имеем

$$2^{2(c-a)n+2}(4k+1)^{(c-b)n+1}k^{(c-a)n}a_j=\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_4=cn+1-j,\\ m_i\geq 0}}c_{\bar m}\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)^{cn-m_1}$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2}\right)^{cn-m_2}2^{cn-m_1-m_2-m_4+1}\left(\sqrt{4k+1}\right)^{cn-m_3-m_4+1}$$

где $\bar m=(m_1,m_2,m_3,m_4)$, $c_{\bar m}\in\mathbb{Z}$.

Заметим, что $cn-m_1-m_2-m_4\geq(j-1)$.

Если $m_1=m_2$, то $\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)^{cn-m_1}\left(\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2}\right)^{cn-m_2}=k^{cn-m_1}\in\mathbb{Z}$, так как $cn-m_1\geq j-1$, и $cn-m_3-m_4+1\equiv j(\mod 2)$.

Если $m_1\neq m_2$, $m=\min(cn-m_1;cn-m_2)$, $\underline{m}=\max(cn-m_1;cn-m_2)$, то, группируя слагаемые при $cn-m_2=m+\rho$, $cn-m_1=m+\rho$, $\rho\geq 1$, получим для них множитель

$$2k^m\left(\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)^{\rho}+\left(\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2}\right)^{\rho}\right)=\left(\sqrt{4k+1}\right)^{\rho_1}A_\rho,$$

$m\geq j-1$, $A_\rho\in\mathbb{Z}$, $\rho\equiv\rho_1(\mod 2)$.Так как $cn-m_3-m_4+1=2cn+j-2\underline{m}+\rho$, то

$$\left(\sqrt{4k+1}\right)^{\rho}2k^m\left(\left(\frac{\sqrt{4k+1}-1}{2}\right)^{\rho}+\left(\frac{\sqrt{4k+1}+1}{2}\right)^{\rho}\right)=\left(\sqrt{4k+1}\right)^{\rho}\left(\sqrt{4k+1}\right)^{\rho_1}A_\rho\in\mathbb{Z},$$

и $cn-m_3-m_4+1-\rho\equiv j(\mod 2)$. Что и требовалось доказать.

Лемма 11. *Справедливы следующие представления для коэффициентов разложения (6):*

$$2b_i=\left(\sqrt{4k+1}\right)^{i_1}2^{2(a-c)n-2-i}C_i,$$

где $i=0,1,\ldots,2(a+b-c)n-2$, $i\equiv i_1(\mod 2)$, $C_i\in\mathbb{Z}$.

Рассмотренные леммы позволяют доказать следующие.

Лемма 12. *Пусть* $Q_1 = \max\{c, 2(a+b-c)\}$, $s_1 = \max\{0, c-b\}$, $s_2 = \max\{0, c-a\}$, *тогда справедливо представление вида*

$$q_{Q_1 n} 2^{2(c-a)n+4}(4k+1)^{s_1 n+1} k^{s_2 n} I = A\sqrt{4k+1}\ln\frac{\sqrt{4k+1}+1}{\sqrt{4k+1}-1} + B, \text{ где } A,\ B \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 13. *Пусть числа* Q_1, s_2, s_3 *определены как в лемме 12,* $Q_2 = \max\{a, 2b\}$, $Q = \max\{Q_1, Q_2\}$, $\dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{(an)!(2bn)!((a+b-c)n)!}{(bn)!(cn)!(2(a+b-c)n)!}$, $A_n,\ B_n \in \mathbb{N}, (A_n, B_n) = 1$,

$$l_n = B_n^{-1} q_{Qn} 2^{2(c-a)n+4}(4k+1)^{s_1 n+1} k^{s_2 n} I = g_n\sqrt{4k+1}\ln\frac{\sqrt{4k+1}+1}{\sqrt{4k+1}-1} + p_n.$$

Тогда $g_n,\ p_n \in \mathbb{Z}$.

Дальнейшее доказательство теоремы 2 сводится к применению леммы 1 для линейной формы l_n. Рассмотрим функцию $f(t(k)) = \frac{t^b(1-t)^a}{1-\left(\frac{t}{4k+1}\right)^c}$. Обозначим через $t_1(k)$ меньший корень уравнения $\dfrac{d}{dt}\ln(f(t(k))) = 0$, причем, $t_1(k) \in (0;1)$, через $t_2(k)$ — больший корень.

Исследования показали, что для любого $k \geq 1$ (в частности, при выборе в (20) $a = 5$, $b = 6$, $c = 6$) существуют

$$\begin{aligned}\delta(k) &= -\left(Q - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln B_n + 2(c-a)\ln 2 + (s_1 - c)\ln(4k+1) + s_2\ln(k) + \ln|f(t_1(k))|\right),\\ \tau(k) &= Q - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln B_n + 2(c-a)\ln 2 + (s_1 - c)\ln(4k+1) + s_2\ln(k) + \ln|f(t_2(k))|,\end{aligned}$$

а, следовательно, и $\mu_0(k)$.

Следует отметить, что частные случаи при $k = 2; 6; 11; 12$ были подробно рассмотрены в [16], при этом результаты совпадали с результатами работ К. Ваананена, А. Хеймонена и Т. Матала-ахо в [4], [17].

При $k = 1$ конструкция интеграла позволила находить наилучшую оценку при соотношении $(a+b)/c = 3/2$ параметров интеграла (20) [см. [16]], что улучшило аналогичный результат К. Ваананена, А. Хеймонена и Т. Матала-ахо. Но впоследствии этот результат был усилен М. Г. Башмаковой.

Далее приведем некоторые оценки мер иррациональности чисел вида

$$\overline{\omega}_k = \sqrt{4k+1}\ln\frac{\sqrt{4k+1}+1}{\sqrt{4k+1}-1},$$

когда $\frac{\sqrt{4k+1}+1}{\sqrt{4k+1}-1}$ не является рациональным числом, полученных с помощью интеграла (20).

Таблица 3

k	$\mu(\overline{\omega}_k) \leq$	k	$\mu(\overline{\omega}_k) \leq$
1	4.4562...	8	3.2311...
3	3.6439...	9	3.1935...
4	3.5012...	10	3.1619...
5	3.4025...	11	3.1346...
7	3.2756...		

Рассмотрим более подробно результаты при $k = 5; 7 - 10$, когда происходит усиление аналогичных неравенств работы [13]:

1) выбирая в интеграле (20) $k = 5$, $a = 5$, $b = 6$, $c = 6$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.5266\ldots$, $t_1 = 0.5520\ldots$, $t_2 = 45.6479\ldots$, $\delta = 14.2182\ldots$, $\tau = 34.1606\ldots$;

2) при $k = 7$, $a = 6$, $b = 7$, $c = 7$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.6928\ldots$, $t_1 = 0.5431\ldots$, $t_2 = 62.2901\ldots$, $\delta = 18.7723\ldots$, $\tau = 42.7188\ldots$;

3) при $k = 8$, $a = 6$, $b = 7$, $c = 7$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.6928\ldots$, $t_1 = 0.5425\ldots$, $t_2 = 70.9574\ldots$, $\delta = 19.5594\ldots$, $\tau = 43.6395\ldots$;

4) при $k = 9$, $a = 7$, $b = 8$, $c = 8$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.8353\ldots$, $t_1 = 0.5369\ldots$, $t_2 = 78.7487\ldots$, $\delta = 23.3864\ldots$, $\tau = 51.2992\ldots$;

5) при $k = 10$, $a = 7$, $b = 8$, $c = 8$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.8353\ldots$, $t_1 = 0.5366\ldots$, $t_2 = 87.3205\ldots$, $\delta = 24.1138\ldots$, $\tau = 52.1319\ldots$.

6. Заключение

В последние годы был получен ряд значительных результатов в области оценки мер иррациональности как для значений логарифмической функции, так и других классических констант. Доказательства этих результатов связаны с конструкцией рациональных приближений к исследуемым числам. Чаще всего они используют однократные или многократные интегралы, дающие приближения Паде или близкие к ним функциональные приближения для функции, значения которой исследуются. При этом общие подходы, разработанные для целого класса значений, как правило, не могут дать улучшения оценок для всех элементов данного класса. В конкретных случаях более эффективными оказываются методы, учитывающие особенности данного числа. Различного рода симметричность интегральных конструкций позволяет использовать эти особенности и служит построению наилучшего приближения. Впервые симметричный интеграл, подобный рассматриваемым в данной работе, был использован для улучшения показателя иррациональности числа $\ln 3$ В. Х. Салиховым [8], которому авторы искренне признательны за научные идеи и помощь в работе.

Рассматривая обобщение результатов об оценке меры иррациональности чисел вида γ_d, авторы надеялись, что это послужит ориентиром и поможет в дальнейших исследованиях данной проблемы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.

2. Huttner M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques // J. Number Theory. 1987. Vol. 26. P. 166-178.

3. Дубицкас А. К. Приближения логарифмов некоторых чисел // Диофантовы приближения, ч.2/ Под ред. А. Б. Шидловского. М.: Изд-во Московского университета, 1986. С. 23-34.

4. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.

5. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, №6. С. 822-835.

6. Сальникова Е. С. О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса // Чебышевский сборник. 2007. Том 8, № 2. С. 88-96.

7. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Aritm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.

8. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.

9. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63, № 3. С. 163-164.

10. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.

11. Башмакова М. Г. Оценка мер иррациональности логарифма "золотого сечения-// Чебышевский сборник. 2010. Т.11, №1. С. 47-53.

12. Polyanskii A. On the irrationality measure of certain numbers // Comb. and Number Theory. 2011. Vol. 1, № 4. P. 80-90.

13. Полянский А. А. О показателях иррациональности некоторых чисел. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. 2013. 138 с.

14. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 407, № 1. P. 99-125.

15. Viola C., Zudilin W. Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm // Funct. Approx. Comment. Math. 2008. Vol. 39, № 2. P. 211-222.

16. Золотухина Е. С. Диофантовы приближения некоторых логарифмов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Брянский государственный технический университет. 2009. 100 с.

17. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.

REFERENCES

1. Rhin, G. 1987, "Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité", Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.

2. Huttner, M. 1987, "Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques", J. Number Theory, vol. 26, pp. 166-178.

3. Dubickas, A. K. 1986, "Approximation of logarithms of some numbers", Publishing Moscow State University Diophantine approximations, 2, pp. 23-34.

4. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1994, "An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures", Bull. Austral. Math. Soc., vol. 50, № 2, pp. 225-243.

5. Bashmakova, M. 2010, "Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions", Mathematical Notes, vol. 88, № 6, pp. 822-835. (Russian)

6. Salnikova, E. 2007, "On irrationality measures of some values of the Gauss function", Chebyshevskii Sbornik, vol. 8, № 2, pp. 88-96. (Russian)

7. Marcovecchio, R. 2009, "The Rhin-Viola method for $\ln 2$", Acta Aritm., vol. 139.2, pp. 147-184.

8. Salikhov, V. H. 2007, "On the irrationality measures of $\ln 3$", Doklady Mathematics, vol. 417, № 6, pp. 753-755. (Russian)

9. Salikhov, V. H. 2008, "On the irrationality measures of π", Russian Mathematical Surveys, vol. 63, № 3, pp. 163-164. (Russian)

10. Hata, M. 1992, "Irrationality measures of the values of hypergeometric functions", Acta Arith., vol. LX, pp 335-347.

11. Bashmakova, M. 2010, "Estimate of the irrationality measure of logarithm of the "Golden section", Chebyshevskii Sbornik, vol. 11, № 1, pp. 47-53. (Russian)

12. Polyanskii, A. 2011, "On the irrationality measure of certain numbers", Comb. and Number Theory, vol. 1, № 4, pp. 80-90.

13. Polyanskii, A. A. On the irrationality measure of certain numbers. Dissertation. Lomonosov State University, 2013. 138 pp. (Russian)

14. Hata, M. 1990, "Legendre type polynomials and irrationality measures", J. Reine Angew. Math., vol. 407, № 1, pp. 99-125.

15. Viola, C., Zudilin, W. 2008, "Hypergeometric transformations of linear forms in one logarithm", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 39, № 2, pp. 211-222.

16. Zolotukhina, E. C. Diophantine approximations of some logarithms. Dissertation. Bryansk State University, 2009. 100 pp. (Russian)

17. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", Manuscripta Math., vol. 81, pp. 183-202.

Брянский государственный технический университет.
Получено 10.03.2016 Принято 14.03.2017