

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511

МОСКОВСКИЙ ДОКЛАД: ТЕОРЕМА О
ПРИБЛИЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ
СУММЫ БОЛЕЕ КОРОТКОЙ (ATS)¹

А. А. Карацуба (г. Москва)²

Аннотация

Доклад, сделанный на семинаре Б. С. Кашина и С. В. Конягина механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова 9 ноября 2006 г.

Ключевые слова: тригонометрическая сумма, приближение, формула Вороного, формула суммирования Пуассона, теорема ATS.

Библиография: 15 названий.

UDK 511

MOSCOW TALK: THE THEOREM ON
APPROXIMATION OF TRIGONOMETRIC SUM
BY A SHORT ONE (ATS)³

A. A. Karatsuba⁴

Abstract

The invited talk presented at the seminar of Prof. B. S. Kashin and Prof. S. V. Konyagin at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow Lomonosov University at the November 9, 2006.

Keywords: trigonometric sum, approximation, Voronoi' formula, the Poisson summation formula, the theorem ATS.

Bibliography: 15 titles.

¹Доклад подготовлен к печати Е. А. Карацубой.

²Анатолий Алексеевич Карацуба (31.01.1937 — 28.09.2008) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

³The report was prepared for publication E. A. Karatsuba.

⁴Anatoly Alekseevich Karatsuba (01.31.1937 — 28.09.2008) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Number Theory Mathematics Institute. Russian Academy of Sciences, professor of the Moscow State University named after M. V. Lomonosov.

А.А. Карацуба Доклад на сем. (1)
С.В. Конягина
Б.С. Кашина, МГУ

Теорема о приближении 9, 11, 2006

Триг. суммы более короткой (ATS).

Approximation of trigonometric sums by shorter ones

и.п. Триг.с. наз. конечная с. вида S ,

$$S = \sum_{a < x \leq b} \psi(x) e^{2\pi i f(x)} \quad (1)$$

Здесь ψ и f — вещ. ф., $a \geq 0$, x — натураль-
ные числа, $i^2 = -1$,

$$e^{2\pi i f(x)} = \cos(2\pi f(x)) + i \sin(2\pi f(x)).$$

Число $b-a$ наз. длиной S ; если a и b — целые числа, то $b-a$ — кол-во слагаемых S .

В физике: $\psi(x)$ — амплитуда, $f(x)$ — фаза.

и.п. При определенных условиях на $\psi(x)$ и $f(x)$,

S можно приблизить другой S_1 , кол-во слагаемых в которой будет меньше $b-a$, т.е.

$$S = S_1 + R, \quad (2)$$

$$S_1 = \sum_{\alpha < x \leq \beta} \phi(x) e^{2\pi i F(x)};$$

$$\beta - \alpha < b - a.$$

Соотношение (2) и будет наз. ATS или Теоремой ATS.

§1. Тригонометрической суммой называется конечная сумма вида S ,

$$S = \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)}. \quad (1)$$

Здесь φ и f — вещественные функции, $a \geq 0$, x — натуральные числа, $i^2 = -1$,

$$e^{2\pi i f(x)} = \cos(2\pi f(x)) + i \sin(2\pi f(x)).$$

Число $b-a$ называется длиной S ; если a и b — целые числа, то $b-a$ — количество слагаемых S .

В физических задачах: $\varphi(x)$ — амплитуда, $f(x)$ — фаза.

§2. При определённых условиях на $\varphi(x)$ и $f(x)$ сумму S можно приблизить другой суммой S_1 , количество слагаемых в которой будет меньше $b-a$, то есть

$$S = S_1 + R, \quad S_1 = \sum_{\alpha < x \leq \beta} \Phi(x) e^{2\pi i F(x)}, \quad \beta - \alpha < b - a. \quad (2)$$

Соотношение (2) и будем называть ATS ("Approximation of Trigonometric Sum") или теоремой ATS.

§3. Сформулируем ATS в том виде, в каком она представлена в [1] и [2].

ТЕОРЕМА 1. (ATS) Пусть вещественные функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют на $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f^{(4)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$ — непрерывные;
- 2) существуют числа H, U, A ,
 $0 < H, \quad 1 \ll A \ll U, \quad 0 < b-a \leq U$,
такие что

$$\frac{1}{A} \ll f^{(2)}(x) \ll \frac{1}{A}, \quad f^{(3)}(x) \ll \frac{1}{AU}, \quad f^{(4)}(x) \ll \frac{1}{AU^2};$$

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi^{(1)}(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi^{(2)}(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения

$$f^{(1)}(x_n) = n, \quad (3)$$

будем иметь

$$S = \sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \sum_{\alpha \leq n \leq \beta} C(n) Z(n) + R, \quad (4)$$

где

$$\alpha = f^{(1)}(a), \quad \beta = f^{(1)}(b),$$

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < n < \beta; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } n = \alpha \text{ или } n = \beta; \end{cases}$$

$$Z(n) = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f^{(2)}(x_n)}} e^{2\pi i(f(x_n) - nx_n)};$$

$$R \ll H \left(\frac{A}{b-a} + T_a + T_b + \ln(\beta - \alpha + 2) \right);$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } f^{(1)}(\mu) - \text{целое число}; \\ \min \left(\frac{1}{\|f^{(1)}(\mu)\|}, \sqrt{A} \right), & \text{если } \|f^{(1)}(\mu)\| \neq 0. \end{cases}$$

Здесь $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$, функция *дробная часть числа* x , $y = \{x\}$, для вещественного x , определяется равенством

$$y = \{x\} = x - [x],$$

где $[x]$ есть *целая часть* x , то есть такое целое число, что $x - 1 < [x] \leq x$.

Кроме того, при $B \rightarrow +\infty$, запись

$$B \ll A \ll B$$

значит, что существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, такие что

$$C_1 B \leq |A| \leq C_2 B.$$

§4. Несколько замечаний по поводу (4). Прежде всего имеем:

$$\beta - \alpha = f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a) = (b - a)f^{(2)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b.$$

Но по условию теоремы,

$$f^{(2)}(\xi) \asymp \frac{1}{A}, \quad A \gg 1,$$

то есть

$$\beta - \alpha \asymp \frac{b - a}{A} \ll b - a.$$

Сумма S_1 — "короче".

Конечно, амплитуда и фаза S_1 , вообще говоря, отличаются от амплитуды и фазы S .

Величина R часто бывает малой. Например, если взять $U = b - a$, $1 \ll A \ll b - a$, оценить $|T_\mu|$ тривиально, то есть

$$|T_\mu| \leq \sqrt{A},$$

то получим

$$R \ll H \left(\frac{A}{b-a} + \sqrt{A} + \ln \left(\frac{b-a}{A} + 2 \right) \right).$$

Посмотрим на тривиальную оценку $|S|$:

$$|S| \leq (b-a)H.$$

Таким образом, R будет меньше тривиальной оценки $|S|$, если

$$\frac{A}{(b-a)^2} + \frac{\sqrt{A}}{b-a} + \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{b-a}{A} + 2 \right) \ll 1,$$

то есть при

$$A \ll (b-a)^2$$

(по условию $A \ll b-a$).

Какова тривиальная оценка $|S_1|$? Имеем

$$|S_1| \ll (\beta - \alpha) \frac{H}{\sqrt{A^{-1}}} \asymp \frac{H(b-a)}{\sqrt{A}},$$

и тривиальная оценка $|S_1|$ будет больше R , если

$$H \left(\frac{A}{b-a} + \sqrt{A} + \ln \left(\frac{b-a}{A} + 2 \right) \right) \ll H \frac{b-a}{\sqrt{A}},$$

то есть

$$\frac{A}{b-a} \ll \frac{b-a}{\sqrt{A}} \implies A \ll (b-a)^{4/3};$$

$$\sqrt{A} \ll \frac{b-a}{\sqrt{A}} \implies A \ll (b-a);$$

$$\ln \left(\frac{b-a}{A} + 2 \right) \ll \frac{b-a}{\sqrt{A}} \implies A \ll (b-a)^{2-\varepsilon}.$$

Итак, если $A \ll b-a$, то R в (4) будет, вообще говоря, меньше $|S_1|$.

Мы видели, что $|S| \ll R$ при $A \ll b-a$. Кроме того, тривиально

$$|S_1| \ll \frac{H(b-a)}{\sqrt{A}}.$$

Следовательно, формула (4) даёт нетривиальную оценку, если

$$H(b-a) \ll \frac{H(b-a)}{\sqrt{A}},$$

то есть при любых $1 \ll A \ll b-a$ формула (4) даёт нетривиальную оценку $|S|$.

§5. Теорема ATS имеет длинную историю. Истоком ATS явилась (см. [3]) теорема Вороного (формула Вороного) 1903 г.

ТЕОРЕМА 2. (теорема Вороного) Пусть

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x (\ln x + 2\gamma - 1) + \Delta(x);$$

тогда

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n=1}^N \frac{\tau(n)}{n^{3/4}} \cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + O\left((T^2 x^{-1})^a\right) + O\left(x^c T^{-1}\right),$$

где

$$\frac{T^2}{4\pi^2 x} = N + \frac{1}{2},$$

$a > 0, c > 1$ — любые, γ — константа Эйлера.

Затем, в 1914 г. Харди и Литтлвуд в статье "Тригонометрические ряды, ассоциированные с эллиптической θ -функцией" ([4]) доказали частный случай ATS. В 1917 г. И. М. Виноградов в работе "О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя" (см. [5]) также доказал частные случаи ATS, связанные с целыми точками в областях на плоскости и в пространстве. Наконец, Ван дер Корпут в 1922 г. в работе, связанной с проблемой делителей (см. [6]), доказал вариант ATS, с помощью которого и оценок тригонометрических сумм улучшил результат Вороного с

$$R = O\left(N^{\frac{1}{3}} \ln N\right)$$

до

$$R = O\left(N^{0,33}\right).$$

Приведу вариант ATS, опубликованный И. М. Виноградовым в 1976 г. в книге "Особые варианты метода тригонометрических сумм", стр. 22 (см. [7]):

ТЕОРЕМА 3. Если

$$\frac{1}{A} \ll f^{(2)}(x) \ll \frac{1}{A}, \quad f^{(3)}(x) \ll \frac{1}{AU};$$

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi^{(1)}(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi^{(2)}(x) \ll HU^{-2},$$

причём функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ вещественные алгебраические, степени которых ограничены, тогда справедлива (4).

Вариант ATS Ван дер Корпута формулируется так:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(x)$ вещественная, $f^{(3)}(x)$ — непрерывная на $[a, b]$, $f^{(1)}(x)$ монотонно убывает на $[a, b]$, $f^{(1)}(b) = \alpha$, $f^{(1)}(a) = \beta$, числа x_n определяются уравнением

$$f^{(1)}(x_n) = n, \quad \alpha < n \leq \beta.$$

Пусть, кроме того,

$$2\pi\lambda_2 \leq |f^{(2)}(x)| \leq A\lambda_2, \quad |f^{(3)}(x)| \leq A\lambda_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{\alpha < n \leq \beta} \frac{e^{2\pi i(f(x_n) - nx_n)}}{\sqrt{|f^{(2)}(x_n)|}} + \\ &+ O\left(\lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right) + O(\ln(2 + (b-a)\lambda_2)) + O\left((b-a)(\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{5}}\right). \end{aligned}$$

Замечу, что часто применяется следующая лемма Ван дер Корпута:

ЛЕММА 1. (лемма Ван дер Корпута) Если $f(x)$ вещественная, $f^{(1)}(x)$ монотонна на (a, b) и $|f^{(1)}(x)| \leq \theta < 1$, то

$$\sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + O(1). \quad (5)$$

§6. Как доказывается ATS.

1) Сначала при условиях ATS (и даже несколько более слабых) получают равенство:

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \sum_{\alpha - \Delta \leq n \leq \beta + \Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x) - nx)} dx + O(H \ln(\beta - \alpha + 2)), \quad (6)$$

где Δ — любое число с условием $0 < \Delta < 1$.

Формула (6) является формулой суммирования Пуассона. Простой её вывод таков.

Пусть $\varphi(x) \equiv 1$. При $a < n \leq b$, рассмотрим

$$W_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{\sin \pi x} e^{2\pi i f(n+x)} dx,$$

где m — ”большой параметр”, и W_n очень близка к

$$e^{2\pi i f(n)}.$$

Легко оценивается V_n ,

$$W_n = e^{2\pi i f(n)} + V_n.$$

Затем

$$\sum_{a < n \leq b} W_n = \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} + \sum_{a < n \leq b} V_n,$$

и левая часть равна

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-m}^m e^{2\pi i k x} e^{2\pi i f(n+x)} dx &= \sum_{a < n \leq b} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-m}^m e^{2\pi i (k(n+x) + f(n+x))} dx = \\ &= \sum_{k=-m}^m \int_{a-\frac{1}{2}}^{b+\frac{1}{2}} e^{2\pi i (kx + f(x))} dx. \end{aligned}$$

Последняя же сумма близка к (6) с $\varphi(x) \equiv 1$. К любой функции $\varphi(x)$ переходят с помощью формулы суммирования Абеля:

$$\sum_{a < x \leq b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = - \int_a^b \mathbb{C}(u) d\varphi(u) + \mathbb{C}(b)\varphi(b),$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{a < x \leq u} e^{2\pi i f(x)}.$$

К $\mathbb{C}(u)$ применяют то, что получено при $\varphi(x) \equiv 1$.

2) Интегралы вида

$$I_n = \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx$$

вычисляют методом стационарной фазы (метод перевала). При условиях ATS справедлива формула:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx &= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f^{(2)}(c)}} + \\ &+ O\left(H\left(\frac{A}{U} + \min\left(|f^{(1)}(a)|^{-1}, \sqrt{A}\right) + \min\left(|f^{(1)}(b)|^{-1}, \sqrt{A}\right)\right)\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$f^{(1)}(c) = 0.$$

Применяя (7) к I_n , получают ATS.

§7. Применения ATS.

1) Наиболее простое и очень эффективное применение ATS — приближённое уравнение Харди–Литтлвуда для $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + F(s) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(t^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1}),$$

где $2\pi xy = t > 0$; $x \geq 1, y \geq 1$; $0 < \sigma < 1$; $s = \sigma + it$;

$$F(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Если $x = y$, то $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, и каждый отрезок ряда Дирихле имеет $\approx \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$ слагаемых, то есть $\zeta(s)$ хорошо приближается такими "короткими" суммами отрезков ряда Дирихле.

Сначала при $z \geq \frac{t}{\pi}$ получают формулу:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq z} \frac{1}{n^s} + \frac{z^{1-s}}{s-1} + O(z^{-\sigma}), \quad s = \sigma + it. \quad (8)$$

Пусть $Res = \sigma > 1$. Тогда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^s}.$$

К последней сумме применим формулу суммирования Эйлера:

$$T = \sum_{N < n \leq M} n^{-s} = \int_N^M x^{-s} dx + \rho(M)M^{-s} - \rho(N)N^{-s} + s \int_N^M \rho(x)x^{-s-1} dx,$$

$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du$, то есть

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1-s} M^{1-s} - \frac{1}{1-s} N^{1-s} + \frac{1}{2} M^{-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^M \rho(x) x^{-s-1} dx = \\ &= \frac{1}{1-s} M^{1-s} + \frac{1}{s-1} N^{1-s} + \frac{1}{2} M^{-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s(s+1) \int_N^M \sigma(x) x^{-s-2} dx. \end{aligned}$$

При $M \rightarrow +\infty$, так как $Res > 1$,

$$T_1 = \lim_{M \rightarrow +\infty} T = \sum_{N < n} n^{-s} = \frac{1}{s-1} N^{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + s(s+1) \int_N^{\infty} \sigma(x) x^{-s-2} dx =$$

$$= \frac{1}{s-1} N^{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + O(t^2 N^{-1}).$$

Итак,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} N^{1-s} - \frac{1}{2} N^{-s} + O(t^2 N^{-1}).$$

Пусть $N > z \geq \frac{t}{\pi}$, рассмотрим сумму

$$\sum_{z < n \leq N} \frac{1}{n^\sigma} e^{-2\pi i \frac{t \ln n}{2\pi}}$$

при $f(n) = \frac{t \ln n}{2\pi}$, $f^{(1)}(n) = \frac{t}{n2\pi} \leq \frac{1}{2}$, то есть к сумме применима лемма Ван дер Корпута, по которой

$$\sum_{z < n \leq N} \frac{1}{n^s} = \int_z^N \frac{du}{u^s} + O(z^{-\sigma}) = \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{z^{1-s}}{1-s} + O(z^{-\sigma}).$$

Если взять $t^2 N^{-1} = z^{-\sigma}$, то есть $N = t^2 z^\sigma$, то получим (8).

Для простоты, пусть $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$. Берём $z = \frac{t}{\pi}$ и рассмотрим сумму S ,

$$S = \sum_{x < n \leq \frac{t}{\pi}} \frac{1}{n^\sigma} e^{-2\pi i \frac{t \ln n}{2\pi}}.$$

S представима в виде суммы слагаемых вида

$$\sum_{2^\nu x < n \leq 2^{\nu+1} x} n^{-\sigma} e^{-2\pi i \frac{t \ln n}{2\pi}}, \quad \nu = 0, 1, \dots, [\ln t];$$

или

$$S_a = \sum_{a < n \leq 2a} n^{-\sigma} e^{-2\pi i \frac{t \ln n}{2\pi}}.$$

К S_a применима АТС с $f(x) = \frac{-t \ln x}{2\pi}$, $f^{(1)}(x) = \frac{-t}{2\pi x}$, $f^{(2)}(x) = \frac{t}{2\pi x^2}$, $A = \frac{a^2}{t} 2\pi \geq 1$.

2) В 1981 г. в статье "О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой" (см. [8]) я доказал следующую теорему:

ТЕОРЕМА 5. Пусть

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где

$$e^{i\theta(t)} = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}, \quad s = \frac{1}{2} + it;$$

$k > 0$; тогда $Z^{(k)}(t)$ имеет нуль на $(T, T + H_k)$, если

$$H_k = T^{\frac{1}{6k+6}} (\ln T)^{\frac{2}{k+1}},$$

а $Z(t)$ имеет нуль на $(T, T + H_0)$, если

$$H_0 = T^{\frac{5}{32}} \ln T.$$

Раньше (у Я. Мозера, см. [9]) было

$$H_0 = T^{\frac{1}{6}} \ln T.$$

Показатель $\frac{5}{32} = \frac{1}{6} - \frac{1}{96}$ удалось получить, применяя для соответствующих тригонометрических сумм ATS. Сейчас $\frac{5}{32}$ немного уменьшено, именно $\frac{5}{32} = 0,1562500$ заменено на $0,1559458$, а $\frac{1}{6k+6}$ на $\frac{27}{164k+168}$ (А. Ивич, см. [10]).

3) В последние годы (около 10–15 лет) делаются попытки применять варианты ATS в физике: квантовой оптике, физике колебаний и других областях (см. [11]–[15]); в том числе для получения зависимостей, наблюдаемых экспериментально.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karatsuba A. A. Approximation of exponential sums by shorter ones // Proc. Indian. Acad. Sci. (Math. Sci.), vol. 97 (1-3), pp. 167–178 (1987).
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994, 376 с.
3. Voronoi, G. Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. // Journal für die reine und angewandte Mathematik 126, s. 241–282 (1903).
4. Hardy, G. H., Littlewood, J. E. The trigonometrical series associated with the elliptic θ -functions // Acta Math. 37, pp. 193–239 (1914).
5. Виноградов И. М., О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя // Сообщения Харьк. матем. об-ва, т. 16, стр. 10–38 (1917).
6. Van der Corput, J. G. Verschärfung der abschätzung beim teilerproblem // Math. Ann., 87, pp. 39–65 (1922).
7. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976, 122 с.
8. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН, т. 157, стр. 49–63 (1981).

9. Мозер, Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // *Acta Arith.* 31 (1976), 31–43; Исправление к работам: *Acta Arith.* 31 (1976), стр. 31–43; 31(1976), стр. 45–51; 35 (1979), стр. 403–404, *Acta Arith.* 40, стр. 97–107 (1981).
10. Ivic, A. *Topics in Recent Zeta- Function Theory* Publ. Math. d'Orsay, Université de Paris-Sud, Orsay, 1983, 272 p.
11. Narozhny, N.B., Sanchez-Mondragon, J.J., and Eberly, J.H., Coherence versus incoherence: collapse and revival in a single quantum model // *Phys. Rev. A*, 23, pp. 236–247 (1981).
12. Fleischhauer, M. and Schleich, W. P. Revivals made simple: Poisson summation formula as a key to the revivals in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. A*, 47:3, pp. 4258–4269 (1993).
13. Chassande - Mottin E. and Pai A., Best chirplet chain: Near-optimal detection of gravitational wave chirps, *Physical Review D* 73, 042003, 1 - 23 (2006).
14. Karatsuba E. A., Approximation of sums of oscillating summands in certain physical problems, *Journal of Math. Physics*, 2004, Vol. 45, N 11, 4310–4321.
15. Карацуба Е. А. Approximation of exponential sums in the problem on the oscillator motion caused by pushes. // *Чебышевский сборник*. 2005. Т. 6, вып. 3(15), С. 205–224.

REFERENCES

1. Karatsuba, A. A., 1987, "Approximation of exponential sums by shorter ones.", *Proc. Indian. Acad. Sci. (Math. Sci.)*, Vol. 97 (1–3), pp. 167–178.
2. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A., 1994, "The Riemann zeta-function", *Moscow: Phys.-Math. Lit.*, 376 p. (Russian).
3. Voronoi, G., 1903, "Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques.", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 126, s. 241–282.
4. Hardy, G. H. & Littlewood, J. E., 1914, "The trigonometrical series associated with the elliptic θ -functions", *Acta Math.* 37, pp. 193–239.
5. Vinogradov, I. M., 1917, "On the average value of the number of classes of purely root form of the negative determinant", *Communications of Kharkhov Mathematics Society* 16, pp. 10–38.
6. Van der Corput, J. G., 1922, "Verschärfung der abschätzung beim teilerproblem", *Math. Ann.*, 87, pp. 39–65.

7. Vinogradov, I. M., 1976, "Special Variants of the Method of Trigonometric Sums", *Moscow: Nauka*, pp. 1–122.
8. Karatsuba, A. A., 1981, "On the distance between adjacent zeros of the Riemann zeta function lying on the critical line.", *Proc. Steklov Inst. Math.*, 157, pp. 51–66 (1983); translation from *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 157, pp. 49–63.
9. Moser J., On a certain sum in the theory of the Riemann zeta-function, *Acta Arith.* 31 (1976), pp. 34–43; Correction to the paper: *Acta Arith.*, 31 (1976), pp. 31–43, pp. 45–51 (1976), *Acta Arith.* 35, pp. 403–404 (1979), *Acta Arith.* 40, pp. 97–107 (1981).
10. Ivic, A., 1983, "Topics in Recent Zeta- Function Theory", *Publ. Math. d'Orsay, Uni- versite de Paris-Sud, Orsay*, pp. 1–272.
11. Narozhny, N. B.& Sanchez-Mondragon, J. J.& and Eberly, J. H., 1981, "Coherence versus incoherence: collapse and revival in a single quantum model," *Phys. Rev. A*, 23, pp. 236–247.
12. Fleischhauer, M. & Schleich, W. P., 1993, "Revivals made simple: Poisson summation formula as a key to the revivals in the Jaynes-Cummings model.", *Phys. Rev. A*, 47:3, pp. 4258–4269.
13. Chassande-Mottin E. & Pai A., 2006 "Best chirplet chain: Near-optimal detection of gravitational wave chirps", *Phys. Rev. D* 73, pp. 042003, 1 – 23.
14. Karatsuba E. A., 2004, "Approximation of sums of oscillating summands in certain physical problems", *Journal of Mathem. physics*, Vol.45, 11, pp. 4310–4321.
15. Карацуба Е. А., 2005, "Approximation of exponential sums in the problem on the oscillator motion caused by pushes." *Chebyshevskii Sb.*, Vol. 6, 3(15), pp. 205–224.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10.02.2015