ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 4.

УДК 512.558 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-167-179

О drl-ПОЛУГРУППАХ И drl-ПОЛУКОЛЬЦАХ

О. В. Чермных (г. Киров)

Аннотация

В статье изучаются drl-полукольца. Полученные результаты верны также для drl-полугрупп, поскольку drl-полукольцом будет drl-полугруппа с нулевым умножением. Указанные алгебры имеют связь с двумя проблемами: 1) существует ли абстрактная конструкция, объединяющая как булевы алгебры, так и решеточно упорядоченные группы? (Г. Биркгоф); 2) рассмотреть решеточно упорядоченные полукольца (Л. Фукс). Одной из возможных конструкций, удовлетворяющей условиям первой проблемы, является drl-полугруппа, определенная K. L. N. Swamy в 1965 г. Как решение второй проблемы в 1981 г. Rango Rao ввел в обиход l-полукольцо. Для последней алгебры мы используем название drl-полукольца.

В настоящей статье основным объектом исследования является drl-полукольцо. Нами обобщаются результаты Swamy, полученные им для drl-полугрупп, а в некоторых случаях уточняются. Известно, что любое drl-полукольцо раскладывается в прямую сумму $S = L(S) \oplus R(S)$ положительно упорядоченного drl-полукольца $L(S)$ и l-кольца $R(S)$. Указывается условие, при котором $L(S)$ обладает наименьшим и наибольшим элементами (теорема 2). В теореме 3 найдены необходимые и достаточные условия разложения drl-полукольца в прямую сумму l-кольца и брауэровой решетки, а в теореме 4 — l-кольца и булевой алгебры. Теоремы 5 и 6 характеризуют l-кольцо и аддитивно сократимое drl-полукольцо в терминах симметрической разности. Наконец, мы показываем, что произвольная конгруэнция на drl-полукольце является отношением Берна.

Ключевые слова: полукольцо, drl-полугруппа, drl-полукольцо, решеточно упорядоченное кольцо.

Библиография: 11 названий.

ON drl-SEMIGROUPS AND drl-SEMIRINGS

O. V. Chermnykh

Abstract

In the article drl-semirings are studied. The obtained results are true for drl-semigroups, because a drl-semigroup with zero multiplication is drl-semiring. This algebras are connected with the two problems: 1) there exists common abstraction which includes Boolean algebras and lattice ordered groups as special cases? (G. Birkhoff); 2) consider lattice ordered semirings (L. Fuchs). A possible construction obeying of the first problem is drl-semigroup, which was defined by K. L. N. Swamy in 1965. As a solution to the second problem, Rango Rao introduced the concept of l-semiring in 1981. We have proposed the name drl-semiring for this algebra.

In the present paper the drl-semiring is the main object. Results of K. L. N. Swamy for drl-semigroups are extended and are improved in some case. It is known that any drl-semiring is the direct sum $S = L(S) \oplus R(S)$ of the positive to drl-semiring $L(S)$ and l-ring $R(S)$. We show the condition in which $L(S)$ contains the least and greatest elements (theorem 2). The necessary and sufficient conditions of decomposition of drl-semiring to direct sum of l-ring and Brouwerian lattice (Boolean algebra) are founded at theorem 3 (resp. theorem 4). Theorems 5 an 6 characterize l-ring and cancellative drl-semiring by using symmetric difference. Finally, we proof that a congruence on drl-semiring is Bourne relation.

Keywords: semiring, drl-semigroup, drl-semiring, lattice ordered ring.

Bibliography: 11 titles.

1. Введение

Статья посвящена изучению drl-полуколец, а поскольку drl-полукольца с нулевым умножением суть drl-полугруппы, то результаты верны и для них. Появление этих алгебр тесно связана с двумя следующими проблемами.

1) Г. Биркгоф ([1], проблема 105): "Существует ли абстрактная конструкция, объединяющая булевы алгебры и решеточно упорядоченные группы?"

2) Л. Фукс ([2], проблема 37): "Рассмотреть решеточно упорядоченные полукольца".

Начнем с проблемы Фукса и кратко отметим некоторые подходы к ее решению. Во-первых, это исследования положительно упорядоченных полуколец, имеющих тесные связи с положительными конусами упорядоченных l-колец. Во-вторых, в монографии Дж. Голана [3] исследуются решеточно упорядоченные полукольца. Под решеточно упорядоченными полукольцами Голан понимает аддитивно идемпотентные полукольца, образующие важный, но не достаточно широкий класс.

В 1981 году о решении проблемы Фукса заявил Rango Rao [4]. Под названием l-полукольца им были рассмотрены алгебры, базирующиеся на drl-полугруппах, введенные в обиход K. L. N. Swamy в 1965 году [5]. Класс drl-полугрупп (*dually residuated lattice ordered semigroup*) дает примеры абстракций, включающих как булевы алгебры, так и l-группы, следовательно, мы получаем одно из решений проблемы Биркгофа (см. также [6], [7]). Особенностью drl-полугрупп является удачное определение бинарной операции разности. Идейные предпосылки, приведшие к drl-полугруппам, можно найти среди брауэровых алгебр и решетках с делением (*residuated lattice*); на последние [8] явно указывал Swamy.

В настоящей статье при исследовании drl-полуколец (l-полукольца в терминологии Rao) выделяются важные идеалы drl-полукольца S — множество всех аддитивно обратимых элементов $R(S)$ и положительно упорядоченное drl-полукольцо $L(S)$. Найдены условия, при которых $L(S)$ удовлетворяет дополнительным условиям, а также выясняется, когда drl-полукольцо является l-кольцом, брауэровой решеткой, булевой алгеброй, аддитивно сократимым полукольцом. Доказывается, что любая конгруэнция на drl-полукольце есть отношение Берна.

Свойства drl-полугрупп и drl-полуколец и их доказательства помимо пионерских работ Swamy можно найти в [9], [10].

2. Основные понятия

Под *полукольцом* будем понимать систему $(S, +, \cdot, 0)$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой относительно умножения и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Такое определение является более общим, чем у Голана [3], не предполагается наличие единицы и мультипликативности нуля.

Определение. Алгебра $(S, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются условия:

1. $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо;
2. $(S, \vee, \wedge)$ — решетка (с порядком $\leqslant$);
3. сложение $+$ дистрибутивно относительно $\vee$ и $\wedge$;
4. для любых $a, b \in S$ $a - b$ — наименьший элемент $z \in S$ такой, что $b + z \geqslant a$;
5. $(a - b) \vee 0 + b \leqslant a \vee b$ для любых $a, b \in S$;
6. $a(b - c) = ab - ac$ и $(a - b)c = ac - bc$ для любых $a, b, c \in S$;

7. $ab \geq 0$ для любых $a, b \geq 0$ из S.

Данное определение принадлежит P. Ranga Rao [4] и основывается на определении drl-полугруппы, введенной в обиход K. L. N. Swamy [5]. Определение drl-полугруппы (dually residuated lattice ordered semigroup) мы получим из определения drl-полукольца, если не будем учитывать аксиомы, в которых задействована мультипликативная операция. Отметим, что определение drl-полугруппы в [5] содержало условие $a - a \geq 0$, которое, как показал T. Kovar [11], вытекает из остальных аксиом.

Примеры.

1. Решеточно упорядоченное кольцо (*l-кольцо*) с обычной кольцевой разностью является drl-полукольцом.

2. Пусть $\mathbb{N}$ — полукольцо целых неотрицательных чисел с обычными сложением, умножением и отношением порядка. Определим $a - b = 0$, если $a \leqslant b$, и как обычную разность целых чисел в противном случае. Тогда $(\mathbb{N}, +, \cdot, -, \leq)$ — drl-полукольцо. Подобным образом получаем drl-полукольца на множестве $\mathbb{R}^+$ неотрицательных действительных чисел и его подполукольцах. Эти алгебры являются как положительно упорядоченными, так и линейно упорядоченными drl-полукольцами.

3. Любая drl-полугруппа с нулевым умножением является drl-полукольцом.

4. Пусть $(L, \vee, \wedge)$ — конечная дистрибутивная решетка; для произвольных $a, b \in L$ определим разность следующим образом: $a - b = \wedge\{r \in L : r \vee b \geq a\}$. Алгебра $(L, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ становится drl-полукольцом, если в качестве сложения и умножения взять $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Таким же образом мы получаем drl-полукольцо, отталкиваясь от полной дистрибутивной решетки с бесконечной $\vee$-дистрибутивностью.

5. Пусть $(B, \vee, \wedge)$ — произвольная булева решетка. Алгебра $(B, +, \cdot, 0, \vee, \wedge, -)$ становится drl-полукольцом, если сложение и умножение совпадают соответственно с $\vee$ и $\wedge$, а разность определить как $a - b = a \wedge b^{\perp}$, где $b^{\perp}$ — дополнение к элементу b. Несложно показать, что такая разность в случае булевой решетки совпадает с разностью из предыдущего примера.

6. Пусть $L = \{0, a, i\}$ — трехэлементная цепь. Положим $a + a = i$, 0 — нейтральный, i — поглощающий элементы относительно $+$. Тогда однозначно определяется разность, и $(L, +, \leq, -, 0)$ становится drl-полугруппой. Для получения drl-полукольца возможно только нулевое умножение.

7. Решетка L называется *брауэровой*, если для любых ее элементов a, b множество всех таких $x \in L$, что $b \vee x \geq a$, имеет наименьший элемент $a - b$. Брауэрова решетка является дистрибутивной. Положив $x + y = x \vee y$ мы получим drl-полугруппу $(L, +, \vee, \wedge, -)$. Если умножение определить совпадающим с $\wedge$, то получим drl-полукольцо, обобщающее примеры 4) и 5). Отметим, что в [5, theorem 4] утверждается, что если drl-полугруппа $(L, +, \leq, -, 0)$ как решетка $(L, \leq, -)$ брауэрова, то $+$ необходимо совпадает с $\vee$. В условии этого утверждения требуется совпадение операций вычитания в брауэровой решетке и drl-полугруппе. Поскольку порядок в брауэровой решетке определяет операцию $-$, то естественно возникает вопрос: если drl-полугруппа $(S, +, \leq, -, 0)$ как решетка $(S, \leq)$ является брауэровой (без условия совпадения операций вычитания), то будет ли верно $a + b = a \vee b$ для произвольных $a, b \in S$? Отрицательный ответ дает предыдущий пример.

Операции взятия точных граней договоримся считать "более сильными" нежели сложение и вычитание, поэтому будем писать, к примеру, $c - a \vee b$ вместо $c - (a \vee b)$. В свою очередь $c \vee ab$ будет означать $c \vee (ab)$.

Поскольку [5, theorem 1] в коммутативной l-полугруппе аксиома 4) определения 2 равносильна системе трех условий (i) $x + (y - x) \geq y$; (ii) $x - y \leq x \vee z - y$; (iii) $(x + y) - y \leq x$, то класс всех drl-полуколец является многообразием.

Для удобства приведем простейшие свойства drl-полугрупп. Пусть S — drl-полугруппа, $a, b, c \in S$, тогда справедливы утверждения:

$a - a = 0, a - 0 = 0$	lemma 1
$a \leq b \Rightarrow a - c \leq b - c, c - b \leq c - a$	lemma 3
$a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0 \Rightarrow b - a \geq 0$	lemma 7
$a \leq b \Rightarrow (b - a) + a = b$	lemma 8
$a + (b - c) \geq (a + b) - c$	
$a - (b - c) \leq (a - b) + c$	lemma 13
$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$	lemma 6
$a \vee b - c = (a - c) \vee (b - c)$	lemma 4
$a \wedge b - c \leq (a - c) \wedge (b - c)$	
$c - a \vee b \leq (c - a) \wedge (c - b)$	
$c - a \wedge b = (c - a) \vee (c - b)$	lemma 5
$a \vee b + a \wedge b = a + b$	lemma 9

Ссылки даны на утверждения из статьи Swamy [5]. При отсутствии ссылки утверждение и доказательство можно найти в [9].

Элементы $a^+ = a \vee 0$ и $a^- = a \wedge 0$ называются *положительной* и *отрицательной частями элемента* a. Введенная терминология оправдывается тем, что для любого элемента a drl-полукольца выполняется $a = a^+ + a^-$; кроме того, $a^+ \geq 0$ и $a^- \leq 0$, и равенства достигаются в точности тогда, когда $a \leq 0$ и $a \geq 0$ соответственно.

Важную роль при изучении drl-полуколец, в частности при факторизации, играет *симметрическая разность*, которую можно рассматривать как новую операцию: $a * b = (a - b) \vee (b - a)$.

Пусть $S = (S, +, \cdot, \vee, \wedge, -)$ — drl-полукольцо. Отображение $\varphi : S \to T$ в drl-полукольцо T, сохраняющее все пять бинарных операций, назовем *гомоморфизмом*. Множество $Ker\ \varphi$ всех элементов, отображающихся в ноль при гомоморфизме, называется *ядром* гомоморфизма φ. Отношение эквивалентности на drl-полукольце S, стабильное относительно всех бинарных операций, называется *конгруэнцией* на S.

Введенные определения являются стандартными понятиями для универсальных алгебр. Отметим, что произвольная конгруэнция ρ на drl-полукольце S определяет факторполукольцо S/ρ, являющееся drl-полукольцом. Легко показать, что любой гомоморфизм drl-полукольца является изотонным отображением, сохраняет симметрическую разность и ноль.

Определение. Непустое подмножество A drl-полукольца S называется *идеалом*, если выполняются условия:

1. если $a, b \in A$, то $a + b \in A$;

2. если $a \in A, s \in S$, то $as, sa \in A$;

3. если $b * 0 \leq a * 0, a \in A$, то $b \in A$.

Стандартно устанавливается замкнутость идеала относительно всех операций drl-полукольца. В отличие от произвольного полукольца, в частности, ограниченной дистрибутивной решетки, конгруэнции на drl-полукольце характеризуются своими классами нуля, или равносильно, ядрами естественных гомоморфизмов [4, theorem 1.1]. Именно, каждой конгруэнции соответствует идеал, являющийся классом нуля, а каждый идеал A drl-полукольца S однозначно определяет конгруэнцию $a \equiv b(A) \Longleftrightarrow a * b \in A$. Класс нуля при этом совпадает с A, а для совпадения двух конгруэнций на S достаточно совпадения их классов нуля.

Суммой идеалов A и B drl-полукольца S называется множество

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Понятно, что пересечение идеалов drl-полукольца снова будет идеалом. Более сложным оказывается доказательство, что сумма двух идеалов является идеалом [4, remark 1.6]. Отметим, что сумма и пересечение идеалов являются точными гранями в решетке идеалов drl-полукольца, а сама решетка дистрибутивна [4, remark 1.8].

Лемма 1. *В drl-полугруппе справедливо неравенство $c - a \vee b \leq (c - a) \wedge (c - b)$.*

Доказательство. Вытекает из определения разности и

$$\begin{gathered} a \vee b + (c - a) \wedge (c - b) = (a \vee b + (c - a)) \wedge (a \vee b + (c - b)) = \\ = ((a + (c - a) \vee (b + (c - a))) \wedge ((a + (c - b)) \vee (b + (c - b))) \geq \\ \geq (a + (c - a)) \wedge (b + (c - b)) \geq c \wedge c = c. \end{gathered}$$

□

Предложение 1. *Множество $L(S) = \{a \in S : 0 - a = 0\}$ является идеалом drl-полукольца S, и $L(S)$ является положительно упорядоченным drl-полукольцом с наименьшим элементом 0.*

Доказательство. Покажем замкнутость $L(S)$ относительно сложения. Для элементов drl-полугруппы выполняется $x - (y + z) = (x - y) - z$ [5, lemma 6], поэтому для $a, b \in L(S)$

$$0 - (a + b) = (0 - a) - b = 0 - b = 0,$$

откуда $a + b \in L(S)$. Далее, используя $x - (y - z) \leq (x - y) + z$ [5, lemma 13], получаем $a \geq 0 - (0 - a) = 0$ для любого $a \in L(S)$, поэтому $a * 0 = (a - 0) \vee (0 - a) = a \vee 0 = a$. Пусть $t * 0 \leq a * 0$ для некоторого $a \in L(S)$. Поскольку $x \leq y$ влечет $z - x \geq z - y$ [5, lemma 3], то $0 - t * 0 \geq 0 - a * 0 = 0 - a = 0$. По предыдущей лемме и [5, lemma 13] $0 \leq 0 - t \vee (0 - t) \leq (0 - t) \wedge (0 - (0 - t)) \leq (0 - t) \wedge t$, откуда $0 - t \geq 0$ и $t \geq 0$. Второе неравенство дает нам $0 - t \leq 0$, следовательно $0 - t = 0$ и $t \in L(S)$. Наконец, $as, sa \in L(S)$ для любых $a \in L(S), s \in S$. □

Напомним, что подмножество A полугруппы называется *строгим (полустрогим)*, если из $a + b \in A$ $(a + b, a \in A)$ следует $b \in A$. Очевидно, строгое подмножество является полустрогим.

Идеал $L(S)$ является полустрогим, но не строгим. Действительно, из $a, a + b \in L(S)$ вытекает $0 = 0 - (a + b) = (0 - a) - b = 0 - b$, следовательно, $b \in L(S)$. Ненулевой аддитивно обратимый элемент a не лежит в $L(S)$, хотя $a + (0 - a) = 0 \in L(S)$, поэтому $L(S)$ не является строгим.

Рассмотрим конструкцию еще одного важного идеала drl-полукольца.

Предложение 2. *В drl-полукольце S справедливы утверждения:*

1. *множество $R(S) = \{0 - a : a \in S\}$ совпадает с множеством всех аддитивно обратимых элементов из S;*

2. если $g \in R(S)$ и $a \leq g$, то $a \in R(S)$;

3. если $g, h \in R(S)$, то $g \vee h \in R(S)$; в частности, $g * 0 \in R(S)$;

4. $R(S)$ — идеал в S.

Доказательство. (1) Пусть $a + b = 0$. Тогда $a = a - (a + b) = (a - a) - b = 0 - b$ и $a \in R(S)$. Обратно, покажем, что для любого $a \in S$ элемент $0 - a$ имеет противоположный. Заметим, что в силу [5, lemma 5] $0 - a^- = 0 - a \wedge 0 = (0 - a) \vee (0 - 0) = (0 - a)^+$. Поскольку $(x - y) + y = x$ для $x \geq y$ [5, lemma 8], и $a^- \leq 0$, то $(0 - a)^+ + a^- = (0 - a^-) + a^- = 0$. Таким же образом $(0 - (0 - a))^+ + (0 - a)^- = 0$, т.е. элементы $(0 - a)^+$ и $(0 - a)^-$ имеют противоположные. Следовательно, $0 - a = (0 - a)^+ + (0 - a)^-$ аддитивно обратим.

(2) Отметим, что из доказательства пункта 1) следует, что любой отрицательный элемент из S лежит в $R(S)$. Пусть $g \in R(S)$ и h — противоположный к нему элемент. Из $a \leq g$ следует $a + h \leq g + h = 0$, и в силу отрицательности элемент $a + h$ лежит в $R(S)$. Используя полустрогость множества $R(S)$, получаем $a \in G(S)$.

(3) Пусть $h + f = 0$, тогда $g \vee h + f = (g + f) \vee 0 = (g + f)^+$. Элемент $g + f$ лежит в $R(S)$, поэтому $(g + f)^+ \in G(S)$. Поскольку множество $R(S)$ строгое, то $g \vee h \in R(S)$.

(4) Пусть $0 \leq a * 0 \leq g * 0$ для некоторого $g \in R(S)$. Очевидно, $a^+ \leq a * 0$, поэтому $a^+ \leq g * 0$. По 3) $g * 0 \in R(S)$, поэтому $a^+ \in R(S)$. В силу отрицательности $a^- \in R(S)$ получаем $a = a^+ + a^- \in R(S)$. Наконец, если $a \in R(S), s \in S$, то очевидно $as, sa \in R(S)$. □

3. Теоремы о разложении

Скажем, что полукольцо S является *прямой суммой* идеалов A и B, если $A + B = S$ и разложение $s = a + b, a \in A, b \in B$, однозначно для любого элемента $s \in S$. Обозначим прямую сумму как $S = A \oplus B$.

Теорема 1. [10] *Любое drl-полукольцо является прямой суммой drl-полукольца с наименьшим элементом и l-кольца.*

Доказательство. Пусть S — произвольное drl-полукольцо. Покажем, что $S = R(S) \oplus L(S)$. Пусть $s \in S$, и g — противоположный элемент к $0 - s$. Тогда $s = s + (0 - s) + g$ и элемент $l = s + (0 - s)$ лежит в $L(S)$. Действительно, $0 - (s + (0 - s)) = (0 - s) - (0 - s) = 0$ по предложению [5, lemma 6]. Получили, $s = g + l$ для $g \in R(S), l \in L(S)$. Пусть $s = g_1 + l_1$ для некоторых $g_1 \in R(S), l_1 \in L(S)$. Из $g + l = g_1 + l_1$ получаем $0 - (g + l) = 0 - (g_1 + l_1)$, откуда $(0 - l) - g = (0 - l_1) - g_1$ и, следовательно, $0 - g = 0 - g_1$. В силу аддитивной обратимости элементов g и g_1 получаем $g = g_1$, что влечет $l = l_1$. □

Договоримся использовать обозначение $a = a_r + a_+$ для однозначно определенных $a_r \in R(S)$ и $a_+ \in L(S)$. В дальнейшем мы будем использовать такое свойство: *если A — идеал drl-полукольца и $a \in A$, то $a_r, a_+ \in A$.* Действительно, $a_r = 0 - (0 - a) \in A$ и $a_+ = a - a_r \in A$.

Поскольку теорема справедлива для drl-полуколец с нулевым умножением, мы получаем, что *любая drl-полугруппа есть прямая сумма drl-полугруппы с наименьшим элементом и абелевой l-группы.* Отметим, что для такого разложения drl-полугруппы в [5, theorem 8] используется равенство

$$0 - (x + y) = (0 - x) + (0 - y) \qquad (S1)$$

в качестве необходимого и достаточного условия. В своей следующей статье [6, theorem 1.3] Swamy, возвращаясь к этой теореме, указывает еще одно условие, равносильное $(S1)$: *для каждого элемента s drl-полугруппы элемент $0 - s$ аддитивно обратим.* Как было доказано выше, указанные условия справедливы в любом drl-полукольце, следовательно, в произвольной drl-полугруппе.

Далее Swamy указывает критерий разложимости drl-полугруппы в прямую сумму абелевой l-группы и drl-полугруппы с наименьшим и наибольшим элементами [5, theorem 7]. В качестве необходимых и достаточных условий указываются:

$$(a+b)-(c+c)=(a-c)+(b-c), \tag{S2}$$

$$(\exists i)(\forall a)(a+(i-a)=i+i). \tag{S3}$$

Утверждение оказывается ошибочным, условие $(S2)$ не будет выполняться в drl-полугруппе из примера 6: $0=(i+0)-(a+a)\neq(i-a)+(0-a)=a$.

Докажем уточненный полукольцевой аналог утверждения.

Теорема 2. *drl-полукольцо S есть прямая сумма l-кольца и drl-полукольца с наименьшим и наибольшим элементами тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$(\exists i)(\forall a)(a+(i-a)=i+i). \tag{S3}$$

Доказательство. Пусть в drl-полукольце S выполнено условие $(S3)$, которое влечет $i+i=i$. Применив свойство $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$ [5, lemma 6], получим:

$$0=(0-i)-(0-i)=(0-(i+i))-(0-i)=$$

$$=((0-i)-i)-(0-i)=((0-i)-(0-i))-i=0-i.$$

Отсюда следует, что $i\in L(S)$, и для произвольного $a\in L(S)$ имеем $a-i\in L(S)$. Кроме того,

$$a-i=a-(i+i)=a-(a+(i-a))=(a-a)-(i-a)=0-(i-a)\in R(S).$$

Значит, $a-i\in R(S)\cap L(S)=\{0\}$, откуда $i\geq a$. Получили, что i — наибольший элемент в $L(S)$. Обратно, пусть $S=L\oplus R$, и $i=i+i$ — наибольший элемент положительно упорядоченного drl-полукольца L. Тогда для любого $a\in L$ выполняется $a+(i-a)\geq 1$, поэтому $a+(i-a)=i$. Для произвольного аддитивно обратимого элемента $b\in R$ и любого элемента $x\in S$ верно $b+(x-b)=b+(x+(0-b))=x$, поэтому условие $(S3)$ справедливо для i и любого элемента из S. □

Элемент s drl-полукольца S назовем *поглощающим*, если $a+s=s$ для любого $a\in S$. Отметим. что элемент i, удовлетворяющий свойству $(S3)$, является поглощающим элементом $L(S)$.

Предложение 3. *Пусть S — drl-полукольцо.*

1. *Если $a+x=x$ для некоторого $x\in S$, то $a\in L(S)$;*
2. *s — поглощающий элемент в $S\Leftrightarrow s$ — наибольший элемент в S;*
3. *если в S есть поглощающий элемент, то $S=L(S)$.*

Доказательство. (1) Пусть $a+x=x$, тогда $a+x_r+x_+=x_r+x_+$, откуда $a+x_+=x_+$. Поскольку $0-a=(0-x_+)-a=0-(x_++a)=0-x_+=0$, то $a\in L(S)$.

(2) Если $a+s=s$ для каждого $a\in S$, то по (1) $S=L(S)$. Тогда $a-s=a-(s+a)=0-s=0$, откуда получаем $a\leq s$. Обратно, пусть $a\leq s$, тогда $0-a\geq 0-s=0$. Следовательно, каждый аддитивно обратимый элемент отрицателен, что означает $R(S)=\{0\}$. Таким образом, $s\leq a+s\leq s$ и $a+s=s$.

(3) следует из (1). □

Условие $(S2)$ в совокупности с

$$(ma+nb)-(a+b)=(ma-a)+(nb-b),\ m,n\in\mathbb{N}, \qquad (*)$$

используется Swamy для характеризации разложимости drl-полугруппы в прямую сумму коммутативной l-группы и брауэровой решетки [5, theorem 6]. Покажем, что можно обойтись без условия $(*)$.

Лемма 2. *Пусть S — drl-полукольцо. Равносильны условия:*

1. *S удовлетворяет $(S2)$;*
2. *$L(S)=\{a\in S:(a+a)-a=0\}$;*
3. *$L(S)$ — множество всех аддитивно идемпотентных элементов;*
4. *$a+b=a\vee b$ для любых $a,b\in L(S)$.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Если $a\in L(S)$, то $0-a=0$, поэтому

$$(a+a)-a=((a+a)-a)+(0-a)=(a+a+0)-(a+a)=0.$$

Если $(a+a)-a=0$, то $0-a=((a+a)-a)-a=(a+a)-(a+a)=0$.

(2) ⇒ (3). Пусть $a\in L(S)$, тогда $(a+a)-a=0$, откуда $a+a\le a$. Учитывая положительность элементов из $L(S)$, получаем $a+a=a$. Очевидно, любой аддитивно идемпотентный элемент из S лежит в $L(S)$.

(3) ⇒ (4). Пусть $a,b\in L(S)$ — аддитивно идемпотентные элементы. Из $a\le a+b, b\le a+b$ следует $a+b\le a\vee b+a\vee b=a\vee b$, а из положительности $a\le a+b, b\le a+b$, откуда получаем $a\vee b\le a+b$.

(4) ⇒ (1). Поскольку условие $(S2)$ справедливо в любом l-кольце, то достаточно показать его справедливость для элементов a,b,c из $L(S)$. По предложению 1 и того факта, что идеал замкнут относительно разности, получаем $a-c,b-c\in L(S)$, следовательно, $(a+b)-(c+c)=a\vee b-c=(a-c)\vee(b-c)=(a-b)+(b-c)$. □

Следствие 1. *Если каждый элемент drl-полукольца S является аддитивно идемпотентным, то $(S,\le)$ — брауэрова решетка.*

Теорема 3. *drl-полукольцо S есть прямая сумма l-кольца и брауэровой решетки в точности тогда, когда для любых $a,b,c\in S$ выполняется условие*

$$(a+b)-(c+c)=(a-c)+(b-c). \qquad (S2)$$

Доказательство. Пусть выполнено $(S2)$. С учетом теоремы 1 достаточно показать, что $x+y=x\vee y$ для любых $x,y\in L(S)$. А это следует из леммы 2. Обратно, пусть $S=L\oplus R$ для l-кольца R и брауэровой решетки $(L,+,\wedge)$. Очевидно, условие $(S2)$ выполняется в R. Для $a,b,c\in L$ имеем: $(a+b)-(c+c)=a\vee b-c=(a-c)\vee(b-c)=(a-c)+(b-c)$, поэтому $(S2)$ выполнено в S. □

Пусть элемент $a\in S$ удовлетворяет свойству $(a+a)-a=0$. Тогда $(a_r+a_r)-a_r=0$, откуда $a_r=0$ и $a\in L(S)$. Из положительности элемента a следует $a+a\ge a$, а из равенства $(a+a)-a=0$ вытекает $a+0\ge a+a$. Поэтому a есть аддитивный идемпотент. Обозначим через

$$B(S)=\{a\in S:(a+a)-a=0\}$$

множество всех аддитивных идемпотентов из S. Множество $B(S)$, как показано в лемме 2, не всегда совпадает с $L(S)$. Кроме того, оно не обязано быть выпуклым (пример 6), следовательно, $B(S)$ не всегда является идеалом.

Лемма 3. *Пусть $S = \{S, +, \cdot, 0, \vee, \wedge\}$ — drl-полукольцо, $B(S)$ — множество всех аддитивных идемпотентов из S.*

1. *$a + b = a \vee b$ для любых $a, b \in B(S)$.*

2. *$B(S)$ замкнуто относительно операций $+, \vee, \wedge$.*

Доказательство. (1) Пусть $a, b \in B(S)$. Из аксиомы 5) определения drl-полукольца получаем $(a-b)+b = a\vee b$. Тогда $a+b = (a+b)\vee b = a\vee b+b = ((a-b)+b)+b = (a-b)+b = a\vee b$.

(2) Очевидна замкнутость операции сложения, а в силу (1) — и точной верхней грани. Для $a, b \in B(S)$ получаем $a \wedge b + a \wedge b = a \wedge b \wedge (a + b) = a \wedge b$. □

Предложение 4. *Пусть $B(S)$ — множество всех аддитивных идемпотентов drl-полукольца S.*

1. *$B(S)$ — брауэрова решетка $\Leftrightarrow (a + b) - c = (a - c) + (b - c)$ для любых $a, b, c \in B(S)$;*

2. *$B(S)$ — идеал drl-полукольца $S \Leftrightarrow b \wedge l \in B(S)$ для любых $b \in B(S), l \in L(S)$.*

Доказательство. (1) Импликация $\Rightarrow$ доказывается также как и в лемме 2. Обратно, с учетом леммы 3 достаточно показать замкнутость $B(S)$ относительно разности. А это вытекает из условия, если положить $a = b$: $a - c = (a + a) - c = (a - c) + (a - c)$.

(2) Импликация $\Rightarrow$ очевидна в силу выпуклости идеала. Пусть сейчас $0 * l \leq b$ для $b \in B(S), l \in S$. Тогда из $l \vee (0 - l) \leq b$ получаем $l_r \vee (0 - l_r) \leq b_r = 0$, откуда $l_r = 0$ и $l \in L(S)$. Имеем $l \leq b$, поэтому $l = l \wedge b \in B(S)$. Наконец, если $b \in B(S)$ и $s \in S$, то $sb, bs \in B(S)$. □

Лемма 4. *Для произвольных элементов drl-полукольца $a \wedge b = 0$ влечет $a + b = a \vee b$.*

Доказательство. Следует из равенства $a + b = a \vee b + a \wedge b$. □

Теорема 4. *Пусть S — drl-полукольцо, удовлетворяющее условиям $(S2)$ и $(S3)$. Тогда равносильны утверждения:*

1. *S есть прямая сумма l-кольца и булевой алгебры;*

2. *$i - (i - a) = a$ для любого $a \in S$;*

3. *$(i - a) \wedge a = ((i - a) \wedge a + (i - a) \wedge a) - (i - a) \wedge a$ для любого $a \in S$.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). По теоремам 2 и 3 $L(S)$ является ограниченной брауэровой решеткой и $x + y = x \vee y$ для любых $x, y \in L(S)$. Пусть $a \in L(S)$, тогда $i - a \wedge (i - a) = (i - a) \vee (i - (i - a)) = (i - a) \vee a = (i - a) + a = i$, откуда $0 = i - i = i - (i - a \wedge (i - a)) = a \wedge (i - a)$. Поскольку $a \vee (i - a) = a + (i - a) = i$, то $i - a$ является дополнением элемента a в решетке $L(S)$. Брауэрова решетка дистрибутивна, поэтому $L(S)$ — булева решетка.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $S = L \oplus R$ для булевой алгебры L и l-кольца R. Из

$$l + r = i = i + i = (l + l) + (r + r), l \in L, r \in R,$$

получаем $r = 0$, и следовательно $i \in L$. Тогда для $a \in L$ выполняется условие (2): $i - (i - a) = i - i \wedge a^{\perp} = i - a^{\perp} = i \wedge a^{\perp\perp} = a$. Условие (2) очевидным образом выполняется для произвольного $a \in R$, а значит и для любого элемента из S.

(3) $\Rightarrow$ (1). Условия $(S2)$ и $(S3)$ гарантируют, что в прямой сумме $S = L(S) \oplus R(S)$ слагаемое $L(S)$ является ограниченной брауэровой решеткой. Пусть $a \in L(S)$, тогда $(i - a) \wedge a \in L(S)$ и

поэтому правая часть равенства (3) равна нулю в силу совпадения операций $+$ и $\vee$ в $L(S)$. Из $(i-a)\wedge a = 0$ по лемме 4 получаем $(i-a)\vee a = (i-a)+a = i$. Следовательно, $i-a$ является дополнением элемента a. Брауэрова решетка дистрибутивна, поэтому $L(S)$ — булева алгебра.

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $S = L\oplus R$ для булевой алгебры L и l-кольца R. Покажем, что для любого элемента $a \in R$ $(i-a)\wedge a$ оказывается аддитивно обратимым элементом. Действительно, $(i-a)\wedge a \leq a \in R \subseteq R(S)$, поэтому $(i-a)\wedge a \in R(S)$ по предложению 2. Отсюда получаем, что условие (3) верно для $a \in R$. Если $a \in L$, то $(i-a)\wedge a = (i \wedge a^{\perp})\wedge a = 0$, что влечет справедливость условия (3) для $a \in L$ и следовательно для любого элемента из S. $\square$

Следствие 2. *drl-полукольцо S является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда S имеет наибольший элемент, $a+a=a$ и $i-(i-a)=a$ для любого $a\in S$.*

Известно, что симметрическая разность произвольного l-кольца инвариантна относительно сдвигов. Ниже мы рассмотрим два результата, описывающие сдвиги симметрической разности в drl-полукольцах.

Теорема 5. *Для drl-полукольца S равносильны условия:*

1. *S — l-кольцо;*
2. *$a*b = (x-a)*(x-b)$ для любых $a,b,x \in S$;*
3. *$a*b = (a-x)*(b-x)$ для любых $a,b,x \in S$;*
4. *$a*b = (0-a)*(0-b)$ для любых $a,b \in S$;*
5. *$a*0 = (0-a)*0$ для любого $a \in S$.*

Доказательство. Импликации $(1)\Rightarrow(2), (1)\Rightarrow(3), (2)\Rightarrow(4)$ очевидны.

(3) $\Rightarrow$ (4). $a*b = (a-(a+b))*(b-(a+b)) = (0-b)*(0-a)$.

(4) $\Rightarrow$ (5). При $b=0$ получаем $a*0 = (0-a)*(0-0) = (0-a)*0$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $a \in L(S)$, тогда $a*0 = (0-a)*0 = 0*0 = 0$, откуда получаем $a=0$. Следовательно, S — l-кольцо. $\square$

Напомним, что полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если из $a+c=b+c$ следует $a=b$ для любых $a,b,c\in S$. Аддитивно сократимые полукольца, и только они, вложимы в кольца — свои кольца разностей. Легко понять, что аддитивная сократимость drl-полукольца S равносильна аддитивной сократимости $L(S)$ и влечет отсутствие ненулевых аддитивных идемпотентов.

Пусть R — кольцо разностей полукольца S. Напомним, что элементами кольца R являются классы упорядоченных пар $[a,b], a,b \in S$, и $[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow a+d = c+b$. Положим $[a,b] \leq_R [c,d] \Leftrightarrow a+d \leq c+b$. Стандартно проверяется, что R становится l-кольцом с порядком $\leq_R$ и точными гранями $[a,b]\vee_R[c,d] = [(a+d)\vee(c+b), b+d]$ и $[a,b]\wedge_R[c,d] = [(a+d)\wedge(c+b), b+d]$. Отметим, что при вложении drl-полукольца S в свое кольцо разностей порядок $\leq_R$ продолжает порядок $\leq$, но ограничение кольцевой разности в общем не совпадет с разностью на S.

Теорема 6. *drl-полукольцо S аддитивно сократимо тогда и только тогда, когда $a*b = (a+x)*(b+x)$ для любых $a,b,x\in S$.*

Доказательство. Равенство $a*b = (a+x)*(b+x)$ верно в произвольном l-кольце, поэтому достаточно его обосновать для элементов из $L(S)$. Пусть $a,b,x \in L(S)$. Из $a+x \geq x$ следует $((a+x)-x)+x = a+x$, поэтому $(a+x)-x = a$ в силу аддитивной сократимости. Аналогично, $(b+x)-x = b$. Тогда

$$(a+x)*(b+x) = ((a+x)-(b+x)) \vee ((b+x)-(a+x)) =$$
$$= (((a+x)-x)-b)) \vee (((b+x)-x)-a) = (a-b)*(b-a) = a*b.$$

Обратно, пусть $a+x=b+x$ для $a,b,x \in S$. Тогда $0=(a+x)*(b+x)=a*b$, откуда получаем $a=b$, и S — аддитивно сократимо. □

Как из теоремы 5, так и из теоремы 6, получается

Следствие 3. [6, theorem 2.1] *drl-полукольцо S с наибольшим элементом является l-кольцом тогда и только тогда, когда $a*b=(a+x)*(b+x)$ для любых $a,b,x \in S$.*

Пусть S — произвольное полукольцо и A — его идеал. Отношение на S

$$a \equiv_A b \Leftrightarrow a+u=b+v \text{ для некоторых } u,v \in A$$

является конгруэнцией на S и называется *отношением Берна*. Значение отношения Берна при изучении полуколец заключается в следующем. Известно, что класс нуля любой конгруэнции на полукольце является полустрогим идеалом, и если A — полустрогий идеал полукольца S, то отношение Берна $\equiv_A$ является наименьшей среди конгруэнций с классом нуля, равным A. Следующее утверждение показывает, что произвольная конгруэнция на drl-полукольце есть отношение Берна.

Предложение 5. *Пусть A — идеал drl-полукольца S. Тогда $a*b \in A$ тогда и только тогда, когда $a+u=b+v$ для некоторых $u,v \in A$.*

Доказательство. Пусть A — идеал и $a*b \in A$. Тогда $a \equiv b(A)$. Понятно, что $b \equiv b(A)$, поэтому $(a-b) \equiv (b-b)(A)$, откуда $a-b \in A$. Из $A \ni (a-b)_r = a_r - b_r = u$ следует $a_r = b_r + u$ для подходящего $u \in A$. Далее $(a-b)_+ = a_+ - b_+$. Из определения drl-полукольца вытекает $a_+ + (b_+ - a_+) \vee 0 = a_+ \vee b_+$. Так как $b_+ - a_+ \geq 0$, то $a_+ + (b_+ - a_+) = a_+ \vee b_+$. Таким же образом справедливо равенство $b_+ + (a_+ - b_+) = a_+ \vee b_+$. Следовательно, $a_+ + (b_+ - a_+) = b_+ + (a_+ - b_+)$. Окончательно, $a + (b_+ - a_+) = a_r + a_+ + (b_+ - a_+) = b_r + u + b_+ + (a_+ - b_+) = b + u + (a_+ - b_+)$. Учитывая $b_+ - a_+, u + (a_+ - b_+) \in A$, получаем $a \equiv_A b$.

Обратно, пусть $a+u=b+v$ для некоторых $u,v \in A$. Тогда $a_r + u_r = b_r + v_r$ и $a_+ + u_+ = b_+ + v_+$. Из первого равенства получаем $a_r - b_r \in A$ и $b_r - a_r \in A$, следовательно, $a_r * b_r \in A$. Из второго равенства вытекает $0 = a_+ - (a_+ + u_+) = a_+ - (b_+ + v_+) = (a_+ - b_+) - v_+$. Поэтому $v_+ = ((a_+ - b_+) - v_+) + v_+ \geq (a_+ - b_+) - (v_+ - v_+) = a_+ - b_+$. В силу выпуклости идеала имеем $a_+ - b_+ \in A$. Точно также $b_+ - a_+ \in A$, следовательно, $a_+ * b_+ \in A$. Отсюда $a*b = a_r * b_r + a_+ * b_+ \in A$. □

Заключительное замечание сделаем относительно дистрибутивности произвольного drl-полукольца (или drl-полугруппы) как решетки. Утверждение об этом имеется еще в первой работе Swamy [5, theorem 2]. Однако вместо доказательства автор утверждает, что что доказательство для drl-полугрупп такое же, как и для решеток с делением [8] с обращением отношения порядка. В последующих работах по нашей тематике другие авторы, ссылаясь на Swamy, соглашаются с таким обоснованием дистрибутивности. В действительности, доказательство в [8, theorem 13.2] использует решеточную специфику и формально проходит только для положительно упорядоченых drl-полугрупп. Дадим сейчас свое доказательство, основывающееся на известном критерии: дистрибутивность решетки равносильна отсутствию в ней подрешеток изоморфных пентагону или диаманту.

Предложение 6. *Любое drl-полукольцо является дистрибутивной решеткой.*

Доказательство. Допустим, что drl-полукольцо S содержит диамант или пентагон относительно $\leq$. В каждом из этих случаев найдутся такие $a, b, c \in S$, что a не сравним с элементом c, $b \wedge c \leq a$, и $a \lneqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. С последним неравенством получим противоречие. Действительно,

$$a - b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) - b \wedge c =$$

$$= ((a \vee b) \wedge (a \vee c) - b) \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c) - c) \leq$$

$$\leq (a \vee b) - b) \vee (a \vee c - c) = (a - b) \vee 0 \vee (a - c) \vee 0 =$$

$$= (a - b \wedge c) \vee 0 = a - b \wedge c,$$

откуда получаем

$$a = (a - b \wedge c) + b \wedge c =$$

$$= ((a \vee b) \wedge (a \vee c) - b \wedge c) + b \wedge c =$$

$$= (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birkhoff G. Lattice theory. Am. Math. Colloquium Publications. 25. 1948.

2. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: "Мир" — 1965. — 342 с.

3. Golan J. S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. Longman scienificand tehnical. Harlow, 1992.

4. Rao P. R. Lattice ordered semirings // Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1981. Vol. 9. P. 119–149.

5. Swamy K. L. N. Dually residuated lattice ordered semigroups // Math. Ann. 1965. Vol. 159. P. 105–114.

6. Swamy K. L. N. Dually residuated lattice ordered semigroups, II // Math. Ann. 1965. Vol. 160. P. 64–71.

7. Swamy K. L. N. Dually residuated lattice ordered semigroups, III // Math. Ann. 1966. Vol. 167. P. 71–74.

8. Ward M, Dilworth R. P. Residuated lattices // Trans. Am. Math. Soc., 45. 1939. P. 335–354.

9. Ворожцова Т. А., Чермных О. В. Арифметические свойства drl-полугрупп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып 16. — Киров: Изд-во ООО "Радуга-ПРЕСС" — 2014. — С.74–81.

10. Миклин А. В., Чермных В. В. О drl-полукольцах // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып 16. — Киров: Изд-во ООО "Радуга-ПРЕСС" — 2014. — С.87–95.

11. Kovar T. Two remarks on dually residuated lattice ordered semigroups // Math. Slovaka, 49. 1999. no 1. P. 17–18.

REFERENCES

1. Birkhoff G. 1948 *Lattice theory.* Am. Math. Colloquium Publications.

2. L. Fuchs 1965, *Partially ordered algebraic systems.* M .: Mir — P. 342

3. Golan J. S. 1992, *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science.* Longman scienificand tehnical. Harlow.

4. Rao P. R. 1981. "Lattice ordered semirings" *Math. Sem. Notes*, Kobe Univ. Vol. 9. pp. 119–149.

5. Swamy K. L. N. 1965, "Dually residuated lattice ordered semigroups", *Math. Ann.* Vol. 159. pp. 105–114.

6. Swamy K. L. N. 1965, "Dually residuated lattice ordered semigroups, II" *Math. Ann.* Vol. 160. pp. 64–71.

7. Swamy K. L. N. 1966, "Dually residuated lattice ordered semigroups, III" *Math. Ann.* Vol. 167. pp. 71–74.

8. Ward M, Dilworth R. P. 1939, "Residuated lattices" *Trans. Am. Math. Soc.*, 45. pp. 335–354.

9. Vorozhcova T. A., Chermnyh O. V. 2014, "Arifmeticheskie svojstva drl-polugrupp" *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona.* Vyp 16. Kirov: Izd-vo OOO "Raduga-PRESS"pp.74–81.

10. Miklin A. V., Chermnyh V. V. 2014. "O drlpolukol'cah" *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona.* Vyp 16. Kirov: Izd-vo OOO "Raduga-PRESS"pp. 87–95.

11. Kovar T. 1999 "Two remarks on dually residuated lattice ordered semigroups" *Math. Slovaka* vol 49 no 1. pp. 17–18.

Вятский государственный университет

Получено 11.05.2016 г.
Принято в печать 13.12.2016 г.