ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 4

УДК 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-157-166

АЛГЕБРЫ РИСА И КОНГРУЭНЦ-АЛГЕБРЫ РИСА В ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБР С ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ

В. Л. Усольцев (г. Волгоград)

Аннотация

Понятие конгруэнции Риса первоначально было введено для полугрупп. Р. Тихи обобщил его на произвольные универсальные алгебры. Обозначим через $\triangle$ нулевую конгруэнцию алгебры A. Конгруэнция θ алгебры A, представляющаяся как $\theta = B^2 \cup \triangle$ для некоторой подалгебры B алгебры A, называется конгруэнцией Риса. Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если $B^2 \cup \triangle$ есть конгруэнция алгебры A. Алгебра A называется алгеброй Риса, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

В работе вводятся понятия рисовски простой алгебры и конгруэнц-алгебры Риса. Неодноэлементная универсальная алгебра называется рисовски простой, если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной. Конгруэнц-алгеброй Риса называется алгебра, в которой любая конгруэнция является конгруэнцией Риса.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Получены некоторые условия, при которых алгебра с одним оператором и произвольной основной сигнатурой является алгеброй Риса. Для алгебр из этого же класса найдено необходимое условие, при котором они являются конгруэнц-алгебрами Риса. Получено необходимое условие рисовской простоты для произвольной алгебры с оператором, унарный редукт которой является связным унаром с неподвижным элементом, не содержащим узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного.

Операцией почти единогласия называется n-арная операция φ $(n \geqslant 3)$, удовлетворяющая тождествам

$$\varphi(x, \ldots, x, y) = \varphi(x, \ldots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \ldots, x) = x.$$

В тернарном случае φ называется операцией большинства. Полностью описаны алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в классе алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия $g^{(n)}$, заданной следующим образом: $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ для $n > 3$. Через $m(x_1, x_2, x_3)$ здесь обозначается операция большинства, заданная автором на произвольном унаре в соответствии с подходом, предложенным В.К. Карташовым, и перестановочная с унарной.

Ключевые слова: алгебра Риса, конгруэнция Риса, рисовски простая алгебра, конгруэнц-алгебра Риса, алгебра с операторами, операция почти единогласия.

Библиография: 16 названий.

REES ALGEBRAS AND REES CONGRUENCE ALGEBRAS OF ONE CLASS OF ALGEBRAS WITH OPERATOR AND BASIC NEAR-UNANIMITY OPERATION

V. L. Usol'tsev (Volgograd)

Abstract

The concept of Rees congruence was originally introduced for semigroups. R. Tichy generalized this concept to universal algebras. Let A be an universal algebra. Denote by $\triangle$ the identity relation on A. Any congruence of the form $B^2 \cup \triangle$ on A for some subalgebra B of A is called a Rees congruence. Subalgebra B of A is called a Rees subalgebra whenever $B^2 \cup \triangle$ is a congruence on A. An algebra A is called a Rees algebra if its every subalgebra is a Rees one.

In this paper we introduce concepts of Rees simple algebra and Rees congruence algebra. A non-one-element universal algebra A is called Rees simple algebra if any Rees congruence on A is trivial. An universal algebra A is called Rees congruence algebra if any congruence on A is Rees congruence.

Universal algebra is called an algebra with operators if it has an additional set of unary operations acting as endomorphisms with respect to basic operations. For algebras with one operator and an arbitrary basic signature some conditions to be Rees algebra are obtained. Necessary condition under which algebra of the same class is Rees congruence algebra is given. For algebras with one operator and a connected unary reduct that has a loop element and does not contain the nodal elements, except, perhaps, the loop element necessary condition for their Rees simplicity are obtained.

A n-ary operation φ $(n \geqslant 3)$ is called near-unanimity operation if it satisfies the identities $\varphi(x,\ldots,x,y) = \varphi(x,\ldots,x,y,x) = \ldots = \varphi(y,x,\ldots,x) = x$. If $n = 3$ then operation φ is called a majority operation. Rees algebras and Rees congruence algebras of class algebras with one operator and basic near-unanimity operation $g^{(n)}$ which defined as follows $g^{(3)}(x_1,x_2,x_3) = m(x_1,x_2,x_3)$, $g^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}),x_{n-1},x_n)$ $(n > 3)$ are fully described. Under $m(x_1,x_2,x_3)$ we mean here a majority operation which permutable with unary operation and which was defined by the author on arbitrary unar according to the approach offered by V.K. Kartashov.

Keywords: Rees algebra, Rees congruence, Rees simple algebra, Rees congruence algebra, algebra with operators, near-unanimity operation.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Теория алгебр Риса имеет своими истоками теорию полугрупп. В работе [1] Д. Рисом было введено понятие конгруэнции Риса для полугрупп. В [2] оно обобщается на произвольные универсальные алгебры. Определения возникающих при этом понятий, приведенные ниже, даны в формулировках работы [3].

Обозначим через $\triangle$ нулевую конгруэнцию алгебры A. Конгруэнция θ алгебры A, представляющаяся как $\theta = B^2 \cup \triangle$ для некоторой подалгебры B алгебры A, называется *конгруэнцией Риса*. Подалгебра B алгебры A называется *подалгеброй Риса*, если $B^2 \cup \triangle$ есть конгруэнция алгебры A. Алгебра A называется *алгеброй Риса*, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

Характеризация алгебр Риса и рисовских многообразий алгебр дается в [4], [5]. В монографии [6] также уделяется значительное внимание алгебрам Риса и связанным с ними понятиям.

Обозначим через $SubA$ решетку подалгебр универсальной алгебры A, а через $ConA$ — решетку ее конгруэнций. Положим $\emptyset \in SubA$. При этом условии совокупность всех подалгебр

Риса алгебры A образует решетку $Sub_R A$ относительно включения [2]. Поскольку пустое множество считается подалгеброй в A, то легко показать, что и совокупность всех конгруэнций Риса алгебры A образует полную решетку $Con_R A$ относительно включения, нулем и единицей которой являются тривиальные конгруэнции $\bigtriangledown = A^2 \cup \triangle$ и $\triangle = \emptyset^2 \cup \triangle$. Это позволяет ставить для $Con_R A$ задачи, аналогичные тем, которые возникают при изучении решетки $Con A$. В частности, к задачам такого рода относится описание алгебр из заданного класса, решетка конгруэнций Риса которых является двухэлементной цепью. Будем называть такие алгебры *рисовски простыми.* Другими словами, неодноэлементная алгебра A рисовски проста, если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной.

Естественный интерес вызывает также противоположная к рисовской простоте ситуация, когда любая конгруэнция алгебры является конгруэнцией Риса. Назовем алгебры с таким свойством *конгруэнц-алгебрами Риса.* Сходное понятие возникает в теории полугрупп: конгруэнц-полугруппой Риса называется такая полугруппа, в которой любая ненулевая конгруэнция является конгруэнцией Риса [7].

В настоящей работе изучаются алгебры Риса и конгруэнц-алгебры Риса в одном классе алгебр с оператором и основной операцией почти единогласия. Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций. Если f — унарная операция из сигнатуры Ω, то *унарным редуктом* алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется унар $\langle A, f\rangle$.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) (см., напр., [8]) называется n-арная операция φ, удовлетворяющая тождествам

$$\varphi(x, \ldots, x, y) = \varphi(x, \ldots, x, y, x) = \ldots = \varphi(y, x, \ldots, x) = x (n \geqslant 3).$$

В тернарном случае φ называют *операцией большинства.* Алгебрам с термальной операцией почти единогласия уделяется значительное внимание в современной универсальной алгебре (см., напр., [9]) и теоретической информатике (см., напр., [10]).

В [11] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так определить операцию большинства $m(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, m, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. Предложенная конструкция восходит к [12]. Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$m(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \geqslant k(y, z); \\ x, & \text{если } k(x, y) < k(y, z). \end{cases}$$

В [11] описаны простые и строго простые алгебры в классе алгебр $\langle A, m, f\rangle$, в [13] — гамильтоновы алгебры данного класса.

В [14] показано, что используя произвольную операцию большинства на множестве A, на A можно определить операцию почти единогласия. Там же, на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ для $n \geqslant 3$ определяется n-арная операция почти единогласия $g^{(n)}$ по следующим правилам: $g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2, x_3)$ и $g^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ для $n > 3$, и доказывается, что алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ является алгеброй с оператором f.

В [14] были полностью описаны простые алгебры в классе алгебр $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$, а также были получены необходимые и достаточные условия совпадения решеток конгруэнций алгебры из данного класса и унарного редукта этой алгебры.

2. Основные определения и конструкции

Класс конгруэнции θ, порожденный элементом x, обозначается через $[x]\theta$.

Конгруэнция $\overline{\alpha}$ произвольной алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ называется *расширением* конгруэнции α подалгебры B в $\langle A, \Omega\rangle$, если условие $x\overline{\alpha}y$ для $x, y \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\alpha y$, либо $x = y$.

Через C_h^t $(h > 0,\ t \geqslant 0)$ обозначается унар $\langle a | f^t(a) = f^{h+t}(a)\rangle$. Унар C_n^0 называется *циклом длины* n. Элемент a унара называется *циклическим*, если подунар, порожденный этим элементом, является циклом. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots (t_i \geqslant 0),\ t_1 < t_2 < \ldots$. Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар. *Цепью* C^∞ называется унар, изоморфный унару $\langle Z, f\rangle$, где Z — множество целых чисел и $f(n) = n + 1$ для любого $n \in Z$.

Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ для некоторых $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Через $T(A)$ обозначается множество всех периодических элементов унара A. Если a — периодический элемент, то наименьшее из чисел t, для которых $f^t(a) = f^{t+n}(a)$ при некоторых $n \geqslant 1$, называется *глубиной элемента* a и обозначается через $t(a)$. *Глубиной* $t(A)$ *унара* A называется наибольшая из глубин его периодических элементов, если $T(A) \neq \emptyset$. Если множество $\{t(a) \mid a \in T(A)\}$ не ограничено, то говорят, что унар имеет бесконечную глубину.

Унар $\langle A, f\rangle$ называется *связным*, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие

$$f^n(x) = f^m(y)$$

для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется *компонентой связности* унара A. Объединение непересекающихся унаров называется их *суммой*. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется *неподвижным*, если $f(a) = a$. Элемент a унара называется *узловым*, если найдутся такие различные элементы b и c, отличные от a, что $f(b) = a = f(c)$. Связный унар с неподвижным элементом называется *корнем. Корнем специального вида* называется связный унар $\langle A, f\rangle$ с неподвижным элементом a, в котором не существует узловых элементов, отличных от a. Через $\langle a\rangle$ обозначается подунар унара $\langle A, f\rangle$, порожденный элементом a.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень. Через D_k обозначается его подунар, состоящий из всех элементов с глубиной, не превосходящей k. Если $t(A)$ конечна, то $0 \leqslant k \leqslant t(A)$; в противном случае, $0 \leqslant k < t(A)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Через σ_k обозначается конгруэнция произвольной алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ с оператором $f \in \Omega$, определенная как $\mathrm{Ker} f^k$. Положим также $\sigma_0 = \triangle$. Через σ обозначается конгруэнция на $\langle A, \Omega\rangle$, определенная как $x\sigma y \Leftrightarrow \exists s > 0\ (f^s(x) = f^s(y))$ [15].

Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$. Через θ_v обозначается бинарное отношение на A, определенное по правилу: $x\theta_v y$, где $x, y \in A$, выполняется тогда и только тогда, когда либо $x = y$, либо $x, y \in f^{-1}(v)$.

Другие определения и обозначения из теории унаров можно найти в [15].

3. Основные результаты

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если ее унарный редукт $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо C_h^0, где $h \in \mathbb{N}$, либо C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, либо $C_1^0 + C_1^0$, то алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является алгеброй Риса.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f\rangle \cong C_h^0$ для некоторого $h > 0$. Тогда алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ не содержит собственных нетривиальных подалгебр, и, следовательно, является алгеброй Риса.

Пусть теперь $\langle A, f\rangle \cong C_1^0 + C_1^0$. Если $\langle A, \Omega\rangle$ не содержит нетривиальных подалгебр, то, очевидно, она является алгеброй Риса. В противном случае любая нетривиальная подалгебра B алгебры $\langle A, \Omega\rangle$ одноэлементна. Тогда $B^2 \cup \triangle = \triangle$.

Наконец, пусть $\langle A, f\rangle \cong C_1^h$, где $h \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, и B — нетривиальная подалгебра алгебры $\langle A, \Omega\rangle$. Так как B замкнута относительно операции f, то $\langle B, f\rangle$ — подунар унара $\langle A, f\rangle$.

Отсюда, $\langle B, f\rangle \cong C_1^s$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, где $s \leqslant h$ в случае конечности h. Обозначим неподвижный элемент унара $\langle A, f\rangle$ через a, порождающий элемент подунара $\langle B, f\rangle$ — через b, и докажем, что $B = [a]\sigma_s$.

Пусть $x \in B$. Тогда $x = f^d(b)$ для некоторого $d \leqslant t(b)$. Поскольку $t(b) = s$, то $t(x) \leqslant s$, откуда $f^s(x) = a$. С другой стороны, $f^s(a) = a$. Отсюда, $f^s(x) = f^s(a)$, что влечет $x\sigma_s a$ и $x \in [a]\sigma_s$. Таким образом, $B \subseteq [a]\sigma_s$. Пусть теперь $x \in [a]\sigma_s$. Тогда $f^s(x) = f^s(a) = a$, и следовательно, $t(x) \leqslant s = t(b)$, откуда $x \in B$. Значит, $[a]\sigma_s \subseteq B$, и, окончательно, $B = [a]\sigma_s$.

Предположим, что найдется неодноэлементный класс K конгруэнции σ_s, не совпадающий с B. Отсюда, $c\sigma_s d$ для некоторых $c, d \in K$, $c \neq d$. Так как $\langle A, f\rangle \cong C_1^h$, то без ограничения общности можно положить $f^k(c) = d$ для некоторого $k > 0$. Поскольку $\langle B, f\rangle \cong C_1^s$ и $B \cap K = \emptyset$, то $t(c) > s$. Из условия $c\sigma_s d$ следует, что $f^s(c) = f^s(d) = f^s(f^k(c)) = f^k(f^s(c))$. Отсюда, элемент $f^s(c)$ — циклический, что противоречит условию $t(c) > s$. Таким образом, $B^2 \cup \triangle = \sigma_s \in ConA$. □

Предложение 2. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная неодноэлементная алгебра с оператором $f \in \Omega$, а ее унарный редукт $\langle A, f\rangle$ является корнем специального вида. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является рисовски простой, то глубина унара $\langle A, f\rangle$ равна единице.*

Доказательство. Так как $\langle A, \Omega\rangle$ неодноэлементна, то глубина унара $\langle A, f\rangle$ не равна нулю.

Предположим, что $t(A) > 1$. По предложению 1 [16], подунар D_1 унара $\langle A, f\rangle$ является подалгеброй в $\langle A, \Omega\rangle$. Из определения конгруэнции $\sigma_1 \in Con\langle A, \Omega\rangle$ следует, что на $\langle A, f\rangle$ выполняется равенство $\sigma_1 = D_1^2 \cup \triangle$, то есть, σ_1 — конгруэнция Риса. Из предположения вытекает ее нетривиальность, что противоречит условию. □

Замечание 1. *Необходимое условие рисовской простоты алгебры $\langle A, \Omega\rangle$, приведённое в предложении 2, не является достаточным.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\langle A, d, f\rangle$ с тернарной операцией d и оператором f, заданными следующим образом: $A = \{a, b, c\}$, $f(a) = a$, $f(b) = a$, $f(c) = a$, $d(a, b, c) = d(c, b, a) = a$, $d(a, c, b) = d(b, a, c) = d(b, c, a) = d(c, a, b) = b$ и $d(x, y, y) = d(y, y, x) = d(x, y, x) = x$ для любых $x, y, \in A$.

Из определений операций d и f следует, что для унара $\langle A, f\rangle$ выполняется условие $t(A) = 1$, а подмножество $\{a, c\}$ множества A является подалгеброй алгебры $\langle A, d, f\rangle$. Непосредственная проверка показывает, что отношение $\{a, c\}^2 \cup \triangle$ является конгруэнцией Риса на $\langle A, d, f\rangle$. Таким образом, алгебра $\langle A, d, f\rangle$ не является рисовски простой. □

Предложение 3. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если $\langle A, \Omega\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса, то унар $\langle A, f\rangle$ содержит не более одного узлового элемента.*

Доказательство. Предположим, что унар $\langle A, f\rangle$ имеет два несовпадающих узловых элемента a, b. Тогда найдутся такие элементы $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, для которых $|\{a_1, a_2, a\}| = 3$, $|\{b_1, b_2, b\}| = 3$ и $f(a_1) = a = f(a_2)$, $f(b_1) = b = f(b_2)$. Отсюда, $a_1\sigma_1 a_2$, $b_1\sigma_1 b_2$, то есть, классы $[a_1]\sigma_1$ и $[b_1]\sigma_1$ конгруэнции $\sigma_1 \in Con\langle A, \Omega\rangle$ неодноэлементны. Поскольку $a \neq b$, то эти классы не совпадают, и следовательно, σ_1 не является конгруэнцией Риса на $\langle A, \Omega\rangle$. □

Далее везде зафиксируем $n \geqslant 3$.

Теорема 1. *Алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ с оператором f является алгеброй Риса тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров: 1) C_h^0, где $h \in \mathbb{N}$; 2) C_1^t, где $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; 3) $C_1^0 + C_1^0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть унар $\langle A, f\rangle$ не удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим случай, когда $\langle A, f\rangle$ содержит подунар B, изоморфный F_1. Из определения операции $g^{(n)}$ следует, что $B \in Sub\langle A, g^{(n)}, f\rangle$.

Пусть подунар B — собственный и $B = \langle b\rangle$. Предположим, что $B^2 \cup \triangle = \theta$ для некоторой $\theta \in ConA$. Тогда $(b, f(b)) \in \theta$ и $(a, b) \notin \theta$ для некоторого $a \in A \setminus B$. Так как операция f инъективна на B, то $k(b, f(b)) = \infty$, откуда по определению операции $g^{(n)}$ имеем $g^{(n)}(b, \ldots, b, f(b), a) = m(g^{(n-1)}(b, \ldots, b, f(b)), f(b), a) = m(b, f(b), a) = a$. С другой стороны, $g^{(n)}(b, \ldots, b, a) = b$, то есть, отношение θ не стабильно относительно $g^{(n)}$, что противоречит выбору θ.

Если $B = A$, то $\langle A, f\rangle$ изоморфен F_1. Тогда, по теореме 2 [14], алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ проста. Обозначим через a порождающий элемент унара $\langle A, f\rangle$. Тогда $\langle f(a)\rangle \in Sub\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. Предполагая, что $\langle f(a)\rangle^2 \cup \triangle = \theta$ для некоторой $\theta \in ConA$, получаем противоречие с простотой алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ не имеет подунаров, изоморфных F_1. Тогда любая его компонента связности содержит подунар, изоморфный C_h^0 для некоторого $h \in \mathbb{N}$.

Положим сначала, что $h > 1$ для хотя бы одного подунара $B \cong C_h^0$. Тогда $b \neq c$ для некоторых $b, c \in B$. По условию, подунар B — собственный, то есть, найдется $a \in A \setminus B$. Предположим, что найдется $\theta \in ConA$, для которой $\theta = B^2 \cup \triangle$. Тогда $b\theta c$ и $(a, b) \notin \theta$. В силу инъективности операции f на B имеем $k(b, c) = \infty$, откуда

$$g^{(n)}(b, \ldots, b, c, a) = m(g^{(n-1)}(b, \ldots, b, c), c, a) = m(b, c, a) = a,$$

что ведет к противоречию, так как $g^{(n)}(b, \ldots, b, a) = b$.

Пусть теперь циклические подунары во всех компонентах связности унара $\langle A, f\rangle$ имеют вид C_1^0. Если $\langle A, f\rangle$ — связный, то, по условию, он содержит узловой элемент v. Тогда найдутся такие $b, c \in A$, что $f(b) = v = f(c)$ и $|\{v, b, c\}| = 3$. Из определения операции $g^{(n)}$ следует, что $\langle b\rangle \in Sub\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. Предположим, что найдется $\theta \in ConA$, для которой $\theta = \langle b\rangle^2 \cup \triangle$. Так как $b, v \in \langle b\rangle$, то $v\theta b$; при этом $c \notin \langle b\rangle$, то есть, $(c, b) \notin \theta$. Поскольку $f(b) = v = f(c)$, то по лемме 10 [15], $k(b, v) = t(b)$ и $k(v, c) = t(c)$. Учитывая, что $t(b) = t(c)$, по определению операции $m(x, y, z)$ получаем $m(b, v, c) = c$. Тогда $g^{(n)}(b, \ldots, b, v, c) = m(g^{(n-1)}(b, \ldots, b, v), v, c) = m(b, v, c) = c$. С другой стороны, $g^{(n)}(b, \ldots, b, c) = b$, что влечет нестабильность отношения θ относительно операции $g^{(n)}$, и тем самым, противоречит выбору θ.

Если унар $\langle A, f\rangle$ — несвязный, то зафиксируем циклические элементы b и c любых двух его компонент связности. Тогда $f(b) = b$, $f(c) = c$. Множество $B = \{b, c\}$ является подунаром в $\langle A, f\rangle$. Как следствие, $B \in Sub\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. По условию, B — собственный подунар, то есть найдется элемент $a \in A \setminus B$. Поскольку b и c лежат в разных компонентах связности $\langle A, f\rangle$, то $k(b, c) = \infty$. Отсюда, $g^{(n)}(b, \ldots, b, c, a) = m(g^{(n-1)}(b, \ldots, b, c), c, a) = m(b, c, a) = a$, что снова ведет к нестабильности отношения θ относительно $g^{(n)}$, поскольку $g^{(n)}(b, \ldots, b, a) = b$.

Достаточность. Следует из предложения 1. □

Лемма 1. *Пусть v — узловой элемент унара $\langle A, f\rangle$. Тогда отношение θ_v является конгруэнцией алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n, что для всех $n \geqslant 3$ выполняется

$$\theta_v \in Con\langle A, g^{(n)}, f\rangle.$$

Стабильность отношения θ_v относительно f очевидна. При $n = 3$, по определению, $g^{(3)} = m$. Пусть $x_1\theta_v y_1$, $x_2\theta_v y_2$, $x_3\theta_v y_3$ для $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in A$. Обозначим $a_1 = m(x_1, x_2, x_3)$, $a_2 = m(y_1, y_2, y_3)$. Предположим, что $(a_1, a_2) \notin \theta_v$. Тогда $a_1 \neq a_2$, причем $a_1 \notin f^{-1}(v)$ или $a_2 \notin f^{-1}(v)$. Далее,

$$f(a_1) = f(m(x_1, x_2, x_3)) = m(f(x_1), f(x_2), f(x_3)) = m(f(y_1), f(y_2), f(y_3)) = f(m(y_1, y_2, y_3)) = f(a_2).$$

Отсюда $k(a_1, a_2) = 1$, и, следовательно, $a_1, a_2 \notin f^{-1}(v)$.

По определению операции m, достаточно рассмотреть только два случая:
1) $m(x_1, x_2, x_3) = x_1$, $m(y_1, y_2, y_3) = y_3$;
2) $m(x_1, x_2, x_3) = x_3$, $m(y_1, y_2, y_3) = y_1$.

Рассмотрим случай 1). Так как $m(x_1, x_2, x_3) = x_1$, то $k(x_1, x_2) < k(x_2, x_3)$, то есть, коэффициент $k(x_1, x_2)$ конечен и равен некоторому $s \in \mathbb{N}$. По предположению, $x_1 \neq y_3$ и, как показано выше, $x_1 \notin f^{-1}(v)$, $y_3 \notin f^{-1}(v)$. Последнее, по определению отношения θ_v, влечет $x_1 = y_1$, $x_3 = y_3$. При этом $x_2 \neq y_2$, так как $a_1 \neq a_2$. Тогда $x_2, y_2 \in f^{-1}(v)$ и, значит, $f(x_2) = v = f(y_2)$. Из условия $m(y_1, y_2, y_3) = y_3$ вытекает соотношение $k(y_1, y_2) \geqslant k(y_2, y_3)$. Таким образом, $k(x_1, x_2) < k(x_2, x_3)$, $k(x_1, y_2) \geqslant k(y_2, x_3)$ (*).

Докажем, что $k(x_1, x_2) = k(x_1, y_2)$. Так как $x_1 \notin f^{-1}(v)$, а $x_2, y_2 \in f^{-1}(v)$, то $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq y_2$, а значит, $k(x_1, x_2) = s \neq 0$, $k(x_1, y_2) \neq 0$. Пусть $k(x_1, y_2) = t$ для некоторого $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда $f^s(x_1) = f^s(x_2) = f^{s-1}(v) = f^{s-1}(f(y_2)) = f^s(y_2)$, откуда $t \leqslant s$, то есть, $t < \infty$. Отсюда, $f^t(x_1) = f^t(y_2) = f^{t-1}(v) = f^{t-1}(f(x_2)) = f^t(x_2)$, и значит, $s \leqslant t$. Таким образом, $s = t$. Аналогично получаем, что $k(x_2, x_3) = k(y_2, x_3)$, а это противоречит условию (*). Случай 2) рассматривается аналогично. Отсюда, $\theta_v \in Con\langle A, m, f\rangle$.

Предположим, что если $x_i \theta_v y_i$ для $x_i, y_i \in A$, где $i = 1, \dots, n-1$, то выполнено условие $g^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) \theta_v g^{(n-1)}(y_1, \dots, y_{n-1})$. Пусть теперь $x_i \theta_v y_i$ для $x_i, y_i \in A$, где $i = 1, \dots, n$. По определению операции $g^{(n)}$, имеем $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_{n-1}, x_n)$ и $g^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = m(g^{(n-1)}(y_1, \dots, y_{n-1}), y_{n-1}, y_n)$. Отсюда, учитывая индуктивное предположение и стабильность θ_v относительно операции m, получаем $g^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \theta_v g^{(n)}(y_1, \dots, y_n)$. Таким образом, $\theta_v \in Con\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. □

Лемма 2. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ содержит узловой элемент v, не являющийся неподвижным. Тогда алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ не является конгруэнц-алгеброй Риса.*

Доказательство. По условию, найдутся $a, b \in A$, для которых $f(a) = v = f(b)$ и $|\{a, b, v\}| = 3$. По лемме 1, $\theta_v \in Con\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. Предположим, что $\theta_v = B^2 \cup \triangle$ для некоторой $B \in SubA$. Поскольку $a \theta_v b$, то $a, b \in B$. Так как B — подалгебра, то $f(a) = v \in B$. Отсюда, $a \theta_v v$, то есть, $f(a) = v = f(v)$, что противоречит условию. □

Лемма 3. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ — связный, а алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ является конгруэнц-алгеброй Риса. Тогда $\langle A, f\rangle$ изоморфен либо F_1, либо цепи, либо C_h^0 для некоторого $h \in \mathbb{N}$, либо корню специального вида.*

Доказательство. Пусть $\langle A, f\rangle$ имеет подунар, изоморфный F_1. Из леммы 2 следует, что $\langle A, f\rangle$ не содержит узловых элементов. Тогда он изоморфен либо F_1, либо цепи. Пусть теперь $\langle A, f\rangle$ имеет собственный подунар B, изоморфный C_h^0 для некоторого $h \in \mathbb{N}$. Случай, когда $h > 1$ противоречит лемме 2. Если же $h = 1$, то, снова по лемме 2, $\langle A, f\rangle$ не содержит узловых элементов, кроме, может быть, неподвижного, то есть, является корнем специального вида. □

Лемма 4. *Пусть $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, $b, c \in A$, $b \neq c$, $\theta \in Con\langle A, g^{(n)}, f\rangle$, $b \theta c$ и $t(b) \leqslant t(c)$. Тогда для любых $x, y \in A$ из $t(x) \leqslant t(c)$ и $t(y) \leqslant t(c)$ следует, что $x \theta y$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$ и $t(x) \leqslant t(c)$, $t(y) \leqslant t(c)$. По следствию 2 из леммы 10 [15], $k(b, x) = \max\{t(b), t(x)\}$, и из $t(b) \leqslant t(c)$ вытекает $k(c, b) = t(c)$. Отсюда, $k(b, x) \leqslant t(c) = k(c, b)$. Тогда $m(c, b, x) = x$, откуда по определению операции $g^{(n)}$ имеем $g^{(n)}(c, \dots, c, b, x) = m(g^{(n-1)}(c, \dots, c, b), b, x) = m(c, b, x) = x$. С другой стороны, $g^{(n)}(c, \dots, c, x) = c$, что влечет $x \theta c$. Аналогично, $y \theta c$, и окончательно, $x \theta y$. □

Следствие 1. *Если $\langle A, f\rangle$ — корень специального вида, то любая неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ имеет вид σ_k для некоторого $k \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть θ — неединичная конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. Поскольку $\triangle = \sigma_0$, то рассмотрим $\theta \neq \triangle$. Допустим, что глубины всех элементов унара, входящих в нетривиальные пары конгруэнции θ, ограничены глубиной некоторого элемента c. Тогда $(b, c) \in \theta$ для некоторого $b \in A$, где $t(b) \leqslant t(c)$ и $b \neq c$. Поскольку для любых различных $x, y \in A$, таких, что $(x, y) \in \theta$, выполняются условия $t(x) \leqslant t(c)$ и $t(y) \leqslant t(c)$, то по следствию 3 [15] имеем, что $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Отсюда, $\theta \leqslant \sigma_{t(c)}$.

Допустим, что $x \neq y$ и $(x, y) \in \sigma_{t(c)}$. Тогда, по следствию 3 [15], имеем $t(x) \leqslant t(c)$, $t(y) \leqslant t(c)$. Отсюда, по лемме 4, получаем $(x, y) \in \theta$. Таким образом, $\sigma_{t(c)} \leqslant \theta$ и, окончательно, $\theta = \sigma_{t(c)}$.

Предположим теперь, что глубины элементов, принадлежащих нетривиальным парам конгруэнции θ не ограничены в совокупности. Так как $\theta \neq \triangledown$, то $(x, y) \notin \theta$ для некоторых $x, y \in A$. По предположению, найдется такой элемент c, входящий в некоторую пару $(b, c) \in \theta$, что $t(x) < t(c)$, $t(y) < t(c)$. В силу симметричности θ, можно считать, что $t(b) \leqslant t(c)$. Тогда, по лемме 4 имеем $x\theta y$, что противоречит выбору x, y. □

Лемма 5. *Пусть $\theta \in Con\langle A, g^{(n)}, f\rangle$, $\theta \neq \triangledown$. Тогда, для любых $a, b \in A$, из условия $a\theta b$ следует $k(a, b) < \infty$.*

Доказательство. Пусть $a\theta b$. Предположим, что $k(a, b) = \infty$. Так как $\theta \neq \triangledown$, то $(b, c) \notin \theta$ для некоторого $c \in A$. Поскольку $k(b, a) = \infty \geqslant k(a, c)$, то $m(b, a, c) = c$. Таким образом, $g^{(n)}(b, \ldots, b, a, c) = m(g^{(n-1)}(b, \ldots, b, a), a, c) = m(b, a, c) = c$. При этом, $g^{(n)}(b, \ldots, b, c) = b$, что противоречит выбору пары (b, c). □

Лемма 6. *Пусть унар $\langle A, f\rangle$ представляется в виде суммы подунаров B и C, где B — произвольная компонента связности, на которой операция f не инъективна, а C — подунар с инъективной операцией. Тогда любая нетривиальная конгруэнция θ алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ является расширением некоторой конгруэнции ее подалгебры $\langle B, g^{(n)}, f\rangle$.*

Доказательство. Докажем, что любой элемент из C порождает одноэлементный класс конгруэнции θ. Из леммы 1 [14] и леммы 5 следует, что $(x, y) \notin \theta$ для любых несовпадающих $x, y \in C$. Пусть $b \in B$, $c \in C$. Так как b и c лежат в разных компонентах связности, то $k(b, c) = \infty$. Тогда, по лемме 5, $(b, c) \notin \theta$. □

Теорема 2. *Алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ с оператором f является конгруэнц-алгеброй Риса тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: 1) операция f инъективна; 2) унар $\langle A, f\rangle$ — неодноэлементный связный унар с неподвижным элементом a, в котором не существует таких элементов $x \neq a$, что $f(b) = x = f(c)$ для некоторых $b, c \in A$, где $|\{x, b, c\}| = 3$; 3) унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен сумме унара из п. 2) и произвольного подунара с инъективной операцией.*

Доказательство. *Необходимость.* Если унар $\langle A, f\rangle$ связный, то утверждение теоремы следует из леммы 3. Пусть теперь $\langle A, f\rangle$ несвязен. По лемме 2, любая его компонента связности либо имеет инъективную операцию, либо является корнем специального вида. Предположим, что $\langle A, f\rangle$ имеет более одной неодноэлементной компоненты связности, содержащей неподвижный элемент. Тогда конгруэнция σ алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ имеет более одного неодноэлементного класса, что противоречит условию. Таким образом, $\langle A, f\rangle$ содержит не более одной компоненты связности, которая является корнем специального вида.

Достаточность. Если операция f инъективна, то, по теореме 2 [14], неодноэлементная алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ является простой, а следовательно, она будет и конгруэнц-алгеброй Риса. Если же она одноэлементна, то утверждение очевидно.

Пусть унар $\langle A, f\rangle$ является неодноэлементным корнем специального вида. Тогда, по следствию 1 из леммы 4, любая нетривиальная конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ имеет вид σ_k для некоторого $k > 0$. Из определения конгруэнции σ_k следует, что она имеет единственный неодноэлементный класс B, состоящий из всех $x \in A$, для которых $t(x) \leqslant n$. Из последнего условия следует, что B — подунар в $\langle A, f\rangle$, а значит, и подалгебра в $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$. Тогда σ_k является конгруэнцией Риса.

Пусть теперь унар $\langle A, f\rangle$ является суммой неодноэлементного корня специального вида и произвольного подунара с инъективной операцией. Тогда он удовлетворяет условиям леммы 6, и, с учетом доказанного выше, любая его конгруэнция является конгруэнцией Риса. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rees D. On semigroups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1940. V. 36. P. 387–400.
2. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. V. 29. P. 229–239.
3. Chajda I. Rees ideal algebras // Math. Bohem. 1997. V. 122, No. 2. P. 125–130.
4. Chajda I., Duda J. Rees algebras and their varieties // Publ. Math. (Debrecen). 1985. V. 32. P. 17–22.
5. Šešelja B., Tepavčević A. On a characterization of Rees varieties // Tatra Mountains Math. Publ. 1995. V. 5. P. 61–69.
6. Chajda I., Eigenthaler G., Langer H. Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003. 192 p.
7. Lavers T., Solomon A. The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup // Semigroup Forum. 1999. V. 59, iss. 2, P. 167–170.
8. Baker K. A., Pixley A. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. 1975. V. 143. P. 165–174.
9. Marković P., McKenzie R. Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms // Algebra Universalis. 2008. Vol. 58. P. 119–128.
10. Jeavons P., Cohen D., Cooper M. Constraints, consistency and closure // Artificial Intelligence. 1998. Vol. 101. P. 251–265.
11. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14. Вып. 4(48). С. 196–204.
12. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Унив. алгебра и ее приложения: Тез. докл. междунар. сем., посв. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.
13. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15. Вып. 3(51). С. 100–113.
14. Усольцев В. Л. О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Научно-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2. С. 28–30.
15. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 7. С. 189–207.
16. Усольцев В. Л. О гамильтоновом замыкании на классе алгебр с одним оператором // Чебышевский сб. 2015. Т. 16. Вып. 4(56). С. 284–302.

REFERENCES

1. Rees, D. 1940, "On semigroups" , *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 36, pp. 387–400.
2. Tichy, R. F. 1981, "The Rees congruences in universal algebras" , *Publications de l'Institut Mathematique (Beograd)*, vol. 29, pp. 229–239.
3. Chajda, I. 1997, "Rees ideal algebras" , *Mathematica Bohemica*, vol. 122, no. 2, pp. 125–130.
4. Chajda, I. & Duda, J. 1985, "Rees algebras and their varieties" , *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 32, pp. 17–22.
5. Šešelja, B. & Tepavčević, A. 1995, "On a characterization of Rees varieties" , *Tatra Mountains Mathematical Publications*, vol. 5, pp. 61–69.
6. Chajda, I., Eigenthaler, G. & Langer, H. 2003, "Congruence classes in universal algebra" , *Heldermann Verlag*, Vienna, 192 pp.
7. Lavers, T. & Solomon, A. 1999, "The endomorphisms of a finite chain form a Rees congruence semigroup" , *Semigroup Forum*, vol. 59, issue 2, pp. 167–170. DOI: 10.1007/PL00006004
8. Baker, K. A. & Pixley, A. 1975, "Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems" , *Mathematische Zeitschrift*, vol. 143, pp. 165–174. DOI: 10.1007/BF01187059
9. Marković, P. & McKenzie, R. 2008, "Few subpowers, congruence distributivity and near-unanimity terms" , *Algebra Universalis*, vol. 58, pp. 119–128. DOI: 10.1007/s00012-008-2049-1
10. Jeavons, P., Cohen, D. & Cooper, M. 1998, "Constraints, consistency and closure" , *Artificial Intelligence*, vol. 101, pp. 251-265. DOI: 10.1016/S0004-3702(98)00022-8
11. Usol'tsev, V. L. 2013, "On strictly simple ternary algebras with operators" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 14, issue 4(48), pp. 196–204. (Russian)
12. Kartashov, V. K. 1999, "On unars with Mal'tsev operation" , *Universal'naya algebra i ee prilozheniya: Tezisy soobshcheniy uchastnikov mezhdunarodnogo seminara, posvyashchennogo pamyati prof. Mosk. gos. un-ta L.A. Skornyakova (Universal algebra and application: theses of International workshop dedicated memory of prof. L.A. Skornyakov)*, Volgograd, pp. 31–32. (Russian)
13. Usol'tsev, V. L. 2014, "On Hamiltonian ternary algebras with operators" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 15, issue 3(51), pp. 100–113. (Russian)
14. Usol'tsev, V. L. 2016, "On congruence lattices of algebras with one operator and basic near-unanimity operation" , *Nauchno-tekhn. vestnik Povolzhya*, issue 2, pp. 28–30. (Russian)
15. Usol'tsev, V. L. 2008, "Simple and pseudosimple algebras with operators" , *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, vol. 14, no. 7, pp. 189–207 (Russian); translated in *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 164, no. 2, pp. 281-293. DOI: 10.1007/S1095800997306
16. Usol'tsev, V. L. 2015, "On hamiltonian closure on class of algebras with one operator" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, issue 4(56), pp. 284–302. (Russian)

Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Получено 18.10.2016 г.
Принято в печать 13.12.2016 г.