ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-141-156

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

К. Тухлиев (г. Худжанд)

Аннотация

Известно, что многие задачи математической физики, сводящиеся к дифференциальным уравнениям с частными производными, записанные в цилиндрических и сферических координатах, применением метода разделения переменных, в частности, приводятся к дифференциальному уравнению Бесселя и к функциям Бесселя. На практике, особенно в задачах электродинамики, небесной механики и современной прикладной математики, чаще всего используются ряды Фурье по ортогональным системам специальных функций. При этом требуется выяснить условия разложения функций в ряды по указанным специальным функциям, образующим на заданном отрезке полную ортогональную систему.

Работа посвящена получению точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по системе функций Бесселя для некоторых классов функций в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2([0,1], x\,dx)$ суммируемых с квадратом функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с весом x.

Доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина на множестве $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, связывающее величину $E_{n-1}(f)_2$ наилучшего приближении функции f частными суммами порядка $n-1$ ряда Фурье–Бесселя с усреднением с положительным весом обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)$, где $\mathcal{D} := \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx} - \dfrac{\nu^2}{x^2}$ — дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν. Аналогичные неравенства получены также через $\mathcal{K}$-функционалы r-ых производных функций. Для классов функций, определённых при помощи указанных характеристик в L_2, вычислены точные значения различных n-поперечников.

Ключевые слова: функция Бесселя, наилучшие приближения, $\mathcal{K}$-функционал, обобщённый модуль непрерывности m-го порядка, ряд Фурье–Бесселя, n-поперечники.

Библиография: 13 названий.

MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY FOURIER–BESSEL SERIES AND THE VALUES OF WIDTHS FOR SOME FUNCTIONAL CLASSES

K. Tukhliev (Khujand)

Abstract

It is known that many of the problems of mathematical physics, reduced to a differential equation with partial derivatives written in cylindrical and spherical coordinates, by using method of separation of variables, in particular, leads to the Bessel differential equation and Bessel functions. In practice, especially in problems of electrodynamics, celestial mechanics and modern applied mathematics most commonly used Fourier series in orthogonal systems of special functions. Given this, it is required to determine the conditions of expansion of functions in series into these special functions, forming in a given interval a complete orthogonal system.

The work is devoted to obtaining accurate estimates of convergence rate of Fourier series by Bessel system of functions for some classes of functions in a Hilbert space $L_2 := L_2([0,1], x\,dx)$ of square summable functions $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ with the weight x.

The exact inequalities of Jackson–Stechkin type on the sets of $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, linking $E_{n-1}(f)_2$ — the best approximation of function f by partial sums of order $n-1$ of the Fourier–Bessel series with the averaged positive weight of generalized modulus of continuity of m order $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)$, where $\mathcal{D} := \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{d}{dx} - \dfrac{\nu^2}{x^2}$ — is a Bessel differential operator of second-order of first kind index ν. Similar inequalities are also obtained through the $\mathcal{K}$-functionals r-s derivatives of functions.

The exact value of the different n-widths for classes of functions defined by specified characteristics, in L_2 were calculated.

Keywords: Bessel function, best approximation, $\mathcal{K}$-functional, generalized modulus of continuity of nth order, Fourier–Bessel series, n-widths.

Bibliography: 13 titles.

1. Введение

Пусть $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса ν, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$. Функции $J_\nu(\lambda_k x)$ являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля [1, с.345]

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x^2}u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, u(1) = 0,$$

отвечающими собственным значениям $\left\{\lambda_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система функций

$$\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$$

является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f с весом x на отрезке [0,1].

В этой работе докажем ряд точных неравенств типа Джексона–Стечкина, используя которые вычислим значения различных n-поперечников некоторых классов функций. Сразу отметим, что различные аспекты приближения функций $f \in L_2$ рядами Фурье по системе функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ исследовались, например, в работах [2–4]. По характеру полученных результатов и по технике доказательств основных утверждений мы следуем работам [5, 6].

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и известные факты. Всюду далее $L_2 := L_2([0,1], x\,dx)$ — пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^1 x f^2(x) dx\right)^{1/2}.$$

Наши дальнейшие исследования базируются на свойствах ортогональности системы $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ (см., например, [1, с.349]):

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_m x) dx = 0, \ k \neq m, \ \int\limits_0^1 x J_\nu^2(\lambda_k x) dx = \frac{1}{2} J_\nu'^{\,2}(\lambda_k),$$

откуда вытекает, что система функций $\left\{\sqrt{2} J_\nu(\lambda_k x) \cdot |J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\right\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2. Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые обозначения, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве L_2, для которой

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_m x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m, \\ \\ 1, & \text{если} \quad k = m. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим разложение в ряд Фурье–Бесселя следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x), \tag{1}$$

где

$$c_k(f) = \int\limits_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_k x) dx$$

— коэффициенты Фурье–Бесселя. Пусть

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x)$$

— частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье–Бесселя (1).

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ — обозначим подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x).$$

Тогда для величины наилучшего приближения $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν:

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \tag{3}$$

и введём функцию $T(x, y; t)$ как сумму ряда

$$T(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \quad 0 < t < 1, \tag{4}$$

где в последнем соотношении равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2([0,1]^2; xy\,dxdy)$ (см., например, [2, с. 919]).

В L_2 рассмотрим оператор (см. [2])

$$F_h f(x) = \int\limits_0^1 t f(t) T(x, t; 1-h) dt, \tag{5}$$

который называют оператором *обобщенного сдвига*.

Следующие свойства оператора (5) устанавливаются непосредственно:

1) оператор (5) является линейным:

$$F_h(f_1+f_2)=F_h(f_1)+F_h(f_2);$$

2) однородным: $F_h(\lambda f)=\lambda F_h(f), \quad \lambda\in\mathbb{R}$;

3) ограниченным: $\|F_hf\|\leqslant\|f\|$ по норме L_2;

4) удовлетворяет свойству: $F_hJ_p(\lambda_nx)=(1-h)^nJ_p(\lambda_nx)$;

5) $\|F_hf-f\|\to 0$, при $h\to+0$.

Для произвольной $f\in L_2$ определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_hf(x)=F_hf(x)-f(x)=(F_h-I)f(x),$$

$$\Delta_h^mf(x)=\Delta_h(\Delta_h^{m-1}f(x))=(F_h-I)^mf(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^kf(x),$$

где

$$F_h^0f(x)=f(x),F_h^kf(x)=F_h(F_h^{k-1}f(x)),k=1,2,...,m,$$

а символ I — единичный оператор в пространстве L_2. Величину

$$\Omega_m(f;t)=\sup\{\|\Delta_h^mf(\cdot)\|:0<h\leq t\} \tag{6}$$

назовём обобщённым модулем непрерывности m-го порядка функции $f\in L_2$.

Обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (3), множество функций $f\in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f', и таких, что $\mathcal{D}f\in L_2$.

Полагаем, $\mathcal{D}^0f\equiv f$, $\mathcal{D}^1f:=\mathcal{D}f$, $\mathcal{D}^rf:=\mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)$, $r\in N$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r=2,3,...$ обозначим множество функций $f\in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $\mathcal{D}^rf\in L_2$.

Если $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r\in\mathbb{N}$, то для её коэффициентов Фурье $c_k(f)$, $k\in\mathbb{N}$, справедлива формула [2]:

$$c_k(f)=(-1)^r\lambda_k^{-2r}c_k(\mathcal{D}^rf), \quad k,r\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Отметим, что для произвольной $f\in L_2$ с учётом равенства (4) оператор усреднения представим следующим образом:

$$F_hf(x)=\int\limits_0^1 tf(t)T(x,t,1-h)dt=\int\limits_0^1 tf(t)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}J_\nu(\lambda_kx)J_\nu(\lambda_kt)(1-h)^k\right\}dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(1-h)^k\left(\int\limits_0^1 tf(t)J_\nu(\lambda_kt)dt\right)J_\nu(\lambda_kx)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-h)^kc_k(f)J_\nu(\lambda_kx), \tag{8}$$

где равенство (8) понимается в смысле сходимости в норме пространства L_2. Используя равенства (1) и (8), на основании метода математической индукции получаем

$$\Delta_h^m(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}((1-h)^k-1)^mc_k(f)J_\nu(\lambda_kx),$$

откуда сразу следует равенство

$$\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|_{L_2}:=\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f), \tag{9}$$

где $h \in (0,1)$. Из равенств (6) и (9) для $t \in (0,1)$ имеем

$$\Omega_m(f,t) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{10}$$

В [2] для любой функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ при любом $t \in (0,1)$ доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le (1-(1-t)^n)^{-m} \lambda_n^{-2r} \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t), \quad r \in \mathbb{Z}_+, \ n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

в котором при каждом фиксированном n константы в правой части (11) не могут быть уменьшены. Легко проверить, что равенство в (11) реализуется на функции

$$f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}).$$

Из (11) вытекает экстремальное равенство:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)} = \frac{1}{(1-(1-t)^n)^m}, \quad 0 < t < 1. \tag{12}$$

В свою очередь в (12), полагая $t = 1/n$, имеем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, 1/n)} = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-m},$$

откуда сразу вытекает соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, 1/n)} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}.$$

2. Основной результат и некоторые следствия

Условимся, что всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ будем понимать неотрицательную измеримую и суммируемую на $[0,h]$ функцию, не эквивалентную нулевой. Имеет место следующее общее утверждение, доказательство которого основано на схеме рассуждений работы [5].

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, φ — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{13}$$

Доказательство. Воспользуемся одним вариантом неравенства Минковского из монографии [7, с.104]

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\tilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |\tilde{f}_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}, \tag{14}$$

верного при всех $0 < p \le 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$. Полагая в неравенстве (14) $\tilde{f}_k := f_k\varphi^{1/p}$, получаем

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{p/2} \varphi(t)dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p \varphi(t)dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ в силу формулы (7) запишем разложение функции $\mathcal{D}^r f$ в ряд Фурье–Бесселя

$$\mathcal{D}^r f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mathcal{D}^r f) J_\nu(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^r \lambda_k^{2r} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x). \tag{16}$$

Из равенств (10) и (16) для всех $t \in (0,1)$ имеем

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f). \tag{17}$$

Используя неравенство (15), равенства (17) и (2) и имея в виду, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, с учётом очевидного соотношения

$$\inf_{k \ge n} \int_0^h (1-(1-t)^k)^{mp} \varphi(t)dt = \int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t)dt,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\left\{\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p} &= \left\{\int_0^h (\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t))^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} \ge \\
&\ge \left\{\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f)\right)^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} \ge \\
&\ge \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \left(\int_0^h (1-(1-t)^k)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} \ge \\
&\ge \lambda_n^{2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{1/p} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2} = \\
&= \lambda_n^{2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{1/p} E_{n-1}(f).
\end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части (13):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{19}$$

Для получения оценки снизу той же величины в левой части равенства (13) по-прежнему полагаем $f_0(x) := J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$. В силу равенства (2) имеем $E_{n-1}(f_0) = 1$, а из равенства (17) следует, что

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0, t) = (1-(1-t)^n)^m \lambda_n^{2r}, \quad 0 < t < 1,$$

а потому имеем

$$\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0, t)\varphi(t)dt = \lambda_n^{2rp} \int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{20}$$

Требуемое равенство (13) получаем из сопоставления оценки сверху (19) и оценки снизу (20), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 в качестве следствия вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $p = 1/m$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1), \varphi$ — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt\right)^m} = \frac{1}{\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right)^m}. \tag{21}$$

Из (21), в частности, при $\varphi \equiv 1$ следует равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \frac{1}{\{(n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1}\}^m}. \tag{22}$$

Полагая в (22), например, $h = 1/(n+1)$, получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-m}, \tag{23}$$

из которого в свою очередь следует экстремальное равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = e^m.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Положим* $\varphi(t) = n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при любом* $h \in (0,1)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{24}$$

В частности, из (24) *при* $h = 1/n,\ n \in \mathbb{N}$ *получаем*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{25}$$

В свою очередь из (25) *при* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ *следует равенство*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt\right)^{1/p}} = \frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

3. Оценка величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$-функционала Петре

Теория приближения функций основана на одной из фундаментальных идей математики — замене сложных математических выражений более простыми и удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой и стимулирует развитие математики в целом и теории приближения функций, в частности. В последнее время для реализации указанной идеи в теории приближения часто используют теорию $\mathcal{K}$-функционалов Петре. В экстремальных задачах теории приближения в смысле слабой эквивалентности были установлены связи между $\mathcal{K}$-функционалами и различными обобщенными модулями непрерывности (см., например, работы [8–10]).

Рассмотрим $\mathcal{K}$-функционал следующего вида

$$\mathcal{K}(f, t^m) := \mathcal{K}(f, t^m; L_2; L_2^{(m)}(\mathcal{D})) =$$
$$= \inf\{\|f-g\| + t^m \|\mathcal{D}^m g\| : g \in L_2^{(m)}\mathcal{D}\}, \tag{26}$$

где $m \in \mathbb{N}, 0 < t < 1$. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} = 1. \tag{27}$$

Доказательство. Пользуясь формулами (2), (7) и (17), и замечая, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=n}^{\infty}$ монотонно возрастающая, для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ и произвольной функции $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$ получим

$$E_{n-1}(f) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-4r} c_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\}^{1/2} = \lambda_n^{-2r}E_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \leq \lambda_n^{-2r}\|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\|. \tag{28}$$

В силу равенства (2)

$$\|g - S_{n-1}(g)\| = E_{n-1}(g) \leq \lambda_n^{-2m}E_{n-1}(\mathcal{D}^m g). \tag{29}$$

Учитывая (29) и применяя неравенство треугольника к правой части неравенства (28), получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \lambda_n^{-2r}\|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\| \leq \lambda_n^{-2r}\left\{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \|g - S_{n-1}(g)\|\right\} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r}\{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \lambda_n^{-2m}E_{n-1}(\mathcal{D}^m g)\} \leq \lambda_n^{-2r}\big\{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \lambda_n^{-2m}\|\mathcal{D}^m g\|\big\}. \tag{30}$$

Переходя в обеих частях неравенства (30) к нижней грани по всем функциям $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$, с учетом определения $\mathcal{K}$-функционала будем иметь

$$E_{n-1}(f) \leq \lambda_n^{-2r}\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m}),$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \leq 1. \tag{31}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (31) для произвольного обобщенного полинома вида

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(q_n)J_\nu(\lambda_k x),\ c_k(q_n) \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, n},$$

учитывая равенство $\mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = (-\lambda_k^2)^r J_\nu(\lambda_k x)$ (см. [2]), имеем

$$\mathcal{D}^r q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(q_n)\mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{n}(-\lambda_k^2)^r c_k(q_n)J_\nu(\lambda_k x), \tag{32}$$

откуда с учётом равенства Парсеваля сразу вытекает соотношение

$$\|\mathcal{D}^r q_n\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{4r}c_k^2(q_n)\right\}^{1/2}. \tag{33}$$

В силу того, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ является монотонно возрастающей из (33) получаем

$$\|\mathcal{D}^r q_n\| \leq \lambda_n^{2r}\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k^2(q_n)\right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r}\|q_n\|. \tag{34}$$

Полагая теперь в равенстве (26) сначала $g = 0, f = q_n$, а затем полагая в нём $f = q_n$, для $\mathcal{K}$-функционала получаем неравенство

$$\mathcal{K}(q_n, t^m) \leq \begin{cases} \|q_n\|, \\ \\ t^m\|\mathcal{D}^m q_n\|. \end{cases} \tag{35}$$

Полагаем, как и раньше $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x)$, и поскольку $f_0 \in L_2^r(\mathcal{D})$, то в силу равенства (32) запишем

$$\mathcal{D}^{r+m} f_0(x) = (-\lambda_n^2)^{r+m} J_\nu(\lambda_n x). \tag{36}$$

Из равенства (36) и второго неравенства в соотношении (35) получаем

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m}) \le \lambda_n^{-2m} \|\mathcal{D}^{r+m} f_0\| = \lambda_n^{-2m} \lambda_n^{2(r+m)} = \lambda_n^{2r}. \tag{37}$$

Используя неравенство (37) и тот факт, что $E_{n-1}(f_0) = 1$, имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \ge \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m})} \ge 1. \tag{38}$$

Сравнивая оценки сверху (31) и оценки снизу (38), получаем требуемое равенство (27). Теорема 2 полностью доказана.

4. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций

Нам для изложения последующих результатов потребуются ряд определений и обозначений. Пусть S — единичный шар в пространстве L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_2 \to \Lambda_n$ — линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^\perp : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 :\ \varepsilon\mathcal{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_2\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2. Указанные n-поперечники монотонны по n и между ними в L_2 выполняются соотношения [7, 11]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \tag{39}$$

Введём классы функций, естественно вытекающие из теорем, доказанных в предыдущих пунктах. Пусть $h \in (0,1)$, $0 < p \le 2$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, φ — весовая на интервале $(0,h)$ функция. Через $\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt \le 1.$$

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \ge 0$ — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \tag{40}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), d^n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} := \sup\{E_n(f)_2 : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)_{L_2}\}.$$

Доказательство. Оценку сверху всех перечисленных n-поперечников получаем из неравенства (19), соотношения (39) и определения класса функций $\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$:

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) \le d_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi); L_2) \le$$

$$\le E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} \le \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{41}$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap L_2$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\|_2 \le \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$.

Для произвольного полинома

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x) \subset S_{n+1}$$

на основании формул (16), (17) и монотонного возрастания элементов последовательности собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ имеем

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r q_n, t) = \left\{ \sum_{k=1}^n (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \lambda_n^{2r} (1-(1-t)^n)^m \left\{ \sum_{k=1}^n c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} (1-(1-t)^n)^m \|q_n\|. \tag{42}$$

Возведя левую и правую части неравенства (42) в степень p, умножая их на весовую функцию φ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=h$, получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r q_n, t) \varphi(t) dt \le \lambda_n^{2rp} \|q_n\|^p \int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \le$$

$$\le \lambda_n^{2rp} \int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \, \lambda_n^{-2rp} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1} = 1,$$

и, следовательно, включение $S_{n+1}\subset \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)$ доказано. Но тогда на основании определения бернштейновского n-поперечника и соотношения (39) между n-поперечниками записываем

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2)\ge b_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2)\ge$$

$$\ge b_n(S_{n+1};L_2)\ge \lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{43}$$

Сравнением оценки сверху (41) и оценки снизу (43) получаем равенства (40). Теорема 3 доказана. Из доказанной теоремы вытекает ряд утверждений.

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3 *при* $\varphi_\star(t):=n(1-t)^{n-1}, n\in\mathbb{N}$ *и любого* $h\in(0,1)$ *имеют место соотношения*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star))=E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star)=$$

$$=\left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}\lambda_n^{-2r}. \tag{44}$$

В качестве второго следствия теоремы 3 рассмотрим экстремальную задачу вычисления точной верхней грани модулей коэффициентов Фурье–Бесселя $c_n(f)$. Эта задача для периодических классов функций рассмотрена, например, в работе [12], а для коэффициентов Фурье разложения функций по ортогональным с весом полиномов в работе [10]. Для рассматриваемых здесь классов функций эта задача также представляет определённый интерес.

Следствие 4. *Пусть* $0<p\le 2$. *Тогда для произвольного* $n\in\mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup\{|c_n(f)|:f\in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)\}=$$

$$=\lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{45}$$

Доказательство. Пользуясь свойством ортогональности частичных сумм Фурье–Бесселя для произвольной функции $f\in L_2$ запишем равенство

$$c_n(f)=\int\limits_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_n x)dx=\int\limits_0^1 x(f(x)-S_{n-1}(f,x))J_\nu(\lambda_n x)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\{\sqrt{x}(f(x)-S_{n-1}(f,x))\}\{\sqrt{x}J_\nu(\lambda_n x)\}dx. \tag{46}$$

Оценив по модулю равенство (46) и применяя неравенство Коши-Буняковского, формулу (2), получаем соотношение

$$|c_n(f)|\le\|f-S_{n-1}(f)\|\cdot\|J_\nu(\lambda_n\cdot)\|=\|f-S_{n-1}(f)\|=E_{n-1}(f). \tag{47}$$

Из формул (40) и (47) получаем оценку сверху модулей коэффициентов на всём классе функций:

$$\sup\{|c_n(f)|:f\in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)\}\le E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi))=$$

$$=\lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{48}$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (48), рассмотрим функцию

$$g_0(x) := \lambda_n^{-2r}\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p} J_\nu(\lambda_n x),$$

которая, как легко проверить, содержится в шаре S_{n+1}, введенном при доказательстве теоремы 3. Но, так как $S_{n+1}\subset \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)$, то функция g_0 принадлежит этому же классу. Следовательно,

$$\sup\{|c_n(f)| : f\in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)\}\geq c_n(g_0) =$$
$$= \lambda_n^{-2r}\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (49)$$

Из сравнения оценки сверху (48) и оценки снизу (49) следует утверждение следствия 4.

5. Значения n-поперечников классов функций, задаваемых посредством $\mathcal{K}$-функционала

Неубывающую на $[0,\infty]$ функцию Φ называют k-мажорантой [13, с.25], если функция $\Phi(t)/t^k$, где $k\in\mathbb{N}$, не возрастает на $(0,\infty), \Phi(0)=0$ и при $t\to 0$, имеем $\Phi(t)\to 0$. Множество всех k-мажорант обозначаем символом $\mathcal{F}^{(k)}$.

Символом $\mathrm{W}_{m,k}^{(r)}(\mathcal{K};\Phi)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, t^m)\leq \Phi(t^m),\ 0<t\leq 1,$$

где $\Phi-$произвольная функция из множества $\mathcal{F}^{(k)}$. В случае $k=1$ вместо символа $\mathrm{W}_{m,1}^{(r)}(\mathcal{K};\Phi)$ будем писать просто $\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K};\Phi)$.

Теорема 4. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+, m\in\mathbb{N}$. Тогда для произвольного $n\in\mathbb{N}$, имеют место равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi),L_2) = E_n(\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi))_{L_2} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}), \qquad (50)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Доказательство. Используя определения класса $\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi)$, из равенства (27) и неравенства (39) получаем оценку сверху:

$$\gamma_n(\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi),L_2)\leq d_n(\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi))\leq$$
$$\leq E_{n-1}(\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi))_{L_2} = \sup\{E_{n-1}(f): f\in \mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi)\}\leq \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2r}). \qquad (51)$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n-поперечников нужно показать, что сфера обобщенных полиномов

$$\tilde{S}_{n+1} := \{q_n\in\mathcal{P}_n : \|q_n\|\leq \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m})\}$$

содержится внутри класса $\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi)$, то есть имеет место включение $\tilde{S}_{n+1}\subset \mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi)$. Но, так как в силу определения класса $\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K},\Phi)$, функция $\Phi\in\mathcal{F}^{(1)}$, то для любых значений $0<x_1<x_2\leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\Phi(x_1)}{x_1}\geq\frac{\Phi(x_2)}{x_2}. \qquad (52)$$

Полагая в неравенстве (52) $x_1 = t_1^{2m}, x_2 = t_2^{2m}$, где $0 < t_1 < t_2 \leq 1$, имеем

$$\frac{\Phi(t_1^{2m})}{\Phi(t_2^{2m})} \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{2m}. \tag{53}$$

Теперь заметим, что из (34) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{D}^{r+m}(q_n)\| \leq \lambda_n^{2(r+m)}\|q_n\|, \ q_n \in \mathcal{P}_n. \tag{54}$$

Пусть сперва $0 < t \leq 1/\lambda_n$. Используя неравенство (53), в котором полагаем $t_1 := t$, $t_2 := 1/\lambda_n$ и применяя второе неравенство из соотношения (35) и неравенство (54), для произвольного полинома $q_n \in \tilde{S}_{n+1}$ получаем

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) \leq t^{2m}\|\mathcal{D}^{r+m}q_n\| \leq$$

$$\leq t^{2m}\lambda_n^{2(r+m)}\|q_n\| \leq t^{2m}\lambda_n^{2m}\Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}). \tag{55}$$

Если же $1/\lambda_n \leq t < 1$, то используя первое неравенство в соотношении (35) и неравенство (37), а также учитывая, что мажоранта $\Phi \subset \mathcal{F}^{(1)}$ является неубывающей функцией, для произвольного полинома $q_n \in \mathcal{P}_n$ имеем:

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) \leq \|\mathcal{D}^r q_n\| \leq \lambda_n^r\|q_n\| \leq \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^m). \tag{56}$$

Таким образом, из неравенств (55) и (56) следует включение $\tilde{S}_{n+1} \subset \mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)$ и, согласно определению бернштейновского n-поперечника и соотношению (39), запишем оценки снизу:

$$\gamma_n(\mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) \geq b_n(\mathrm{W}^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) \geq b_n(\tilde{S}_{n+1}, L_2) \geq \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}). \tag{57}$$

Равенства (50) следуют из оценок (51) и (57), чем и завершаем доказательство теоремы 4.

Следствие 5. *При выполнении условий теоремы* 4 *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_m^{(r)}(\mathcal{K}, \Phi)\} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

Доказательство утверждения следствия 5 не приводится, поскольку оно повторяет схему доказательства следствия 4.

6. Заключение

В данной работе рассматривается экстремальная задача вычисления верхней грани наилучших приближений частичными суммами ряда Фурье–Бесселя квадратично суммируемых с весом x на отрезке $[0, 1]$ функций. Вычислены точные значения различных n-поперечников некоторых классов функций, естественно возникающих при решении указанной экстремальной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.

2. Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье–Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. №6. С. 917-927.

3. Чертова Д. В. Теорема Джексона в пространстве L_2 на прямой со степенным весом // Материалы 8-й междунар. Казан. летн.научн. шк.-конф. Казань: Изд-во Казан.матем. о-ва. 2007. Т.35. С. 267-268.

4. Иванов В. И., Чертова Д. В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14. №3. С. 112-126.

5. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т.90. №5. С. 764-775.

6. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона–Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т.21. №4. С. 292-308.

7. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.

8. Фёдоров В. М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Известия вузов. Математика. 1984. №6. С. 55-63.

9. Алексеев Д. В. Приближение полиномами с весом Чебышева–Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1997. №6. С. 68-71.

10. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1, 1]\Big)$ // Известия Тульского госуниверситета. Естест. науки. 2014. Вып. 1. Ч.1. С. 83-97.

11. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.:МГУ. 1976. 304 с.

12. Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2008. Т.38. №2. С. 147-159.

13. Шевчук А. И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка. 1992. 255 с.

REFERENCES

1. Vladimirov V. S. 1981, “Equations of Mathematical Physics”, *Moscow: Science*, 512 p.

2. Abilov V. A., Abilova V. F., Kerimov M.K. 2015, “Sharp estimates for the convergence rate of Fourier–Bessel series”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 55, no 6, pp. 907–916.

3. Chertova D. V. 2007, “Jackson theorem in the space L_2 on the line with power weight”, *Material of 8th Intern. Kazan. Summer Science School-Conf., Kazan: Math Soc. Press*, vol. 35, pp. 267-268.

4. Ivanov V. I., Chertova D. V., Liu Yongping. 2008, “The sharp Jackson inequality in the space L_2 on the segment $[-1, 1]$ with the power weight”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 14, no 1, pp. 133–149.

5. Shabozov M. Sh, Yusupov G. A. 2011, "Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths", *Mathematical Notes*, vol. 90, no 5, pp. 748–757.

6. Shabozov M. Sh., Tukhliev K. 2015, "Jackson-Stechkin inequality with generalized module of continuity and widths of some classes fucntions", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 21, no 4, pp. 292–308.

7. Pinkus A. 1985, "n-Widths in Approximation Theory". Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 252 p.

8. Fedorov V. M. 1984, "Approximation by algebraic polynomials with Chebyshev–Hermitian weight", *Izvestiya VUZ. Mathematica*, vol. 28, no 6, pp. 70–79.

9. Alexeev D. V. 1997, "Approximation by polynomial with Chebyshev–Hermitian weight on the real axis", *Vestnik MGU. Mathematica. Mekhanica*, no 6, pp. 68–71.

10. Shabozov M. Sh., Tukhliev K. 2014, "$\mathcal{K}$ functionals and the exact values of n-widths of some class of functions from $L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1};[-1,1]\Big)$", *Izv. TSU. Natural Science*, no 1(1). pp. 83–97.

11. Tikhomirov V. M. 1976, "Some problems of theory of approximation", *Moscow: MSU*, 304 p.

12. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B. 2008, "On best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of functional classes in L_2", *Analysis Mathematica*, vol. 38, no 2. pp. 147–159.

13. Shevchuk A. I. 1992. "Approximation by polynomials and tracks of continuous functions on the segment", *Kiev: Naukova Dumka*, 255 p.

Худжандский государственный университет.

Поступило 12.09.2016 г.
Принято в печать 12.12.2016 г.