ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 4.

УДК 514.113.5 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-132-140

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. И. Субботин (г. Новочеркасск)

Аннотация

В работе доказана полнота списка замкнутых выпуклых многогранников в E^3, сильно симметричных относительно вращения граней.

Многогранник называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось вращения. Все оси пересекаются в одной точке, которая называется центром многогранника. Все рассматриваемые в работе многогранники являются симметричными многогранниками.

Выпуклый многогранник называется сильно симметричным относительно вращения граней, если у каждой его грани F имеется ось вращения L, пересекающая относительную внутренность F, и L является осью вращения многогранника.

Очевидно, что порядок оси вращения L не обязательно совпадает с порядком этой оси, если грань F рассматривать как фигуру, отделённую от многогранника.

Ранее автором было доказано, что требование глобальной симметрии многогранника относительно осей вращения граней можно заменить более слабым условием симметрии звезды каждой грани многогранника: для того, чтобы многогранник был сильно симметричным относительно вращения граней, необходимо и достаточно, чтобы некоторая нетривиальная ось вращения каждой грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника, являлась осью вращения звезды этой грани.

Под звездой грани F понимается сама грань и все грани, имеющие хотя бы одну общую вершину с F.

Учитывая это условие, определение многогранника сильно симметричного относительно вращения граней эквивалентно следующему: многогранник называется сильно симметричным относительно вращения граней, если некоторая нетривиальная ось вращения каждой грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника, является осью вращения звезды этой грани.

При доказательстве основной теоремы о полноте списка многогранников рассматриваемого класса используется результат о полном перечислении так называемых сильно симметричных многогранников 1-го и 2-го класса из [1].

В настоящей статье доказывается, что помимо многогранников 1-го и 2-го класса к многогранникам, сильно симметричным относительно вращения граней, принадлежат ещё только 8 типов многогранников. Из этих восьми типов 7 не являются даже комбинаторно эквивалентными равноугольно-полуправильным (архимедовым). Один тип из восьми является комбинаторно эквивалентным равноугольно-полуправильному многограннику, но не принадлежит многогранникам 1-го или 2-го класса.

Переходя к многогранникам, двойственным сильно симметричным относительно вращения граней, т.е. к многогранникам, сильно симметричным относительно вращения многогранных углов, получаем и их полное перечисление. Отсюда следует, что существует 7 типов многогранников, сильно симметричных относительно вращения многогранных углов, которые не являются комбинаторно эквивалентными телам Гесселя.

Класс многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней в работе обозначается SF. Класс SF, а также и упомянутые многогранники 1-го и 2-го класса можно рассматривать как обобщение класса правильных (платоновых) многогранников. Другие обобщения правильных многогранников можно найти в работах [3],[4], [12]-[15].

Ключевые слова: сильно симметричные многогранники, главная ось вращения, комбинаторно-эквивалентные многогранники.

Библиография: 15 наименований.

Ob odnom klasse sil'no simmetrichnyh mnogogrannikov

V. I. Subbotin

Abstract

We prove the completeness of the list of closed convex polyhedra in E^3, that are strongly symmetric with respect to the rotation of the faces .

Polyhedron is called symmetric if it has at least one non-trivial rotation axis. All axes intersect at a single point called the center of the polyhedron. All considered polyhedra are polyhedra with the center.

A convex polyhedron is called a strongly symmetrical with respect to the rotation of the faces, if each of its faces F has an rotation axis L, intersects the relative interior of F, and L is the rotation axis of the polyhedron.

It is obvious that the order of rotation axis of L does not necessarily coincide with the order of this axis, if the face of F regarded as a figure separated from the polyhedron.

It has previously been shown, that the requirement of global symmetry of the polyhedron faces the rotation axis can be replaced by the weaker condition of symmetry of the star of each face of the polyhedron: to polyhedron was symmetrical with respect to the rotation of the faces, it is necessary and sufficient that some nontrivial rotation axis of each face, regarded as a figure separated from the polyhedron, is the rotation axis of the star of face.

Under the star of face F is understood face itself and all faces have at least one common vertex with F.

Given this condition, the definition of the polyhedron strongly symmetric with respect to the rotation of the faces is equivalent to the following: the polyhedron is called a strongly symmetrical with respect to the rotation of the faces , if some non-trivial rotation axis of each face, regarded as a figure separated from the polyhedron, is the rotation axis of the star of face.

In the proof of the main theorem on the completeness of the list of this class of polyhedra using the result of the complete listing of the so-called polyhedra of 1st and 2nd class [1].

In this paper we show that in addition to the polyhedra of the 1st and 2nd class, listed in [1], only 8 types of polyhedra belongs to the class of polyhedra stronghly symmetric with respect to the rotation of faces. Seven of this eighteen types are not combinatorially equivalent regular or semi-regular (Archimedean). One type of eight is combinatorially equivalent Archimedean polyhedra, but does not belong to polyhedra of 1st or 2nd class.

Turning to the polyhedra, dual strongly symmetrical about the rotation of faces, that is, to the polyhedra, stronghly symmetric about the rotation of polyhedral angles, we get their complete listing. It follows that there are 7 types of polyhedra, highly symmetric with respect to the rotation of polyhedral angles which are not combinatorially equivalent to Gessel bodies.

Class of polyhedra stronghly symmetric with respect to the rotation of faces, as well as polyhedra 1st and 2nd class mentioned above can be viewed as a generalization of the class of regular (Platonic) polyhedra. Other generalizations of regular polyhedra can be found in [3],[4], [12]-[15].

Keywords: strongly symmetrical polyhedra, principal rotation axis, combinatorial equivalent.

Bibliography: 15 title.

1. Введение

Мы будем рассматривать симметричные замкнутые выпуклые многогранники в трёхмерном евклидовом пространстве.

В [1] автором полностью перечислены так называемые сильно симметричные многогранники 1-го и 2-го класса. Напомним определения этих классов.

Определение 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется многогранником 1-го класса, если для любых двух соседних вершин V_1, V_2 справедливо следующее: рёберные звёзды вершин V_1, V_2 симметричны относительно плоскости, проходящей через середину ребра V_1V_2, соединяющего эти вершины.*

Определение 2. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется многогранником 2-го класса, если для любого плоского угла V_1VV_2 каждой грани многогранника справедливо следующее: рёберные звёзды вершин V_1, V_2 симметричны относительно биссекторной плоскости угла V_1VV_2, перпендикулярной плоскости этого угла.*

Все указанные плоскости симметрии, о которых говорится в обоих определениях, являются не только локальными плоскостями симметрии соответствующих рёберных звёзд вершин, но и плоскостями симметрии многогранников в целом.

Это следует из лемм об эквивалентности локальных и глобальных условий симметрии в определениях 1 и 2. Доказательство этих лемм приведено в [1].

В [1] доказано, что существуют 11 типов многогранников 1-го класса и только 9 многогранников 2-го класса. Причём 2-й класс многогранников замкнут относительно преобразования двойственности.

В настоящей статье доказана полнота списка класса сильно симметричных выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве, а именно, сильно симметричных многогранников относительно вращения граней, [6], [7].

Определение 3. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если: 1) у каждой грани есть ось вращения, перпендикулярная ей и проходящая через её относительную внутренность; 2) эта ось является осью симметрии звезды этой грани.*

При этом ось вращения предполагается нетривиальной и порядок оси вращения не обязательно совпадает с порядком оси вращения грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника.

Заметим также, что локальная ось вращения звезды грани, о которой говорится в определении 3, является осью вращения всего многогранника. Это следует из леммы, доказанной в [7].

В дальнейшем класс многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней будем обозначать SF. Класс SF можно рассматривать как обобщение класса правильных (платоновых) многогранников, основанное на симметрии элементов многогранника. Другие обобщения правильных многогранников можно найти, например в работах [3]-[5], [13]-[15].

Под звездой грани F понимается совокупность грани F и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с F.

При доказательстве основной теоремы о перечислении многогранников класса SF будут использованы результаты перечисления многогранников 1-го и 2-го классов из [1].

Далее нам понадобится понятие главной оси симметрии многогранника.

Определение 4. *Ось вращения L многогранника называется главной, если все другие оси вращения, если они существуют, перпендикулярны L и порядок L не меньше порядка других осей.*

Если существует не одна, а несколько осей вращения, удовлетворяющих приведённым условиям, то любую из них можно выбрать в качестве главной.

2. Основная теорема

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Следующие типы многогранников исчерпывают класс SF:*

1. *Бесконечные серии прямых призм с правильными, либо с равноугольно - полуправильными основаниями;*
2. *многогранники 1-го класса;*
3. *многогранники 2-го класса;*
4. *один тип многогранников, не принадлежащих ни 1-му, ни 2-му классу, но комбинаторно эквивалентных равноугольно - полуправильному многограннику, рис. 1, а);*
5. *7 типов, не являющихся комбинаторно эквивалентными ни правильным, ни равноугольно-полуправильным, рис. 1, б)–з).*

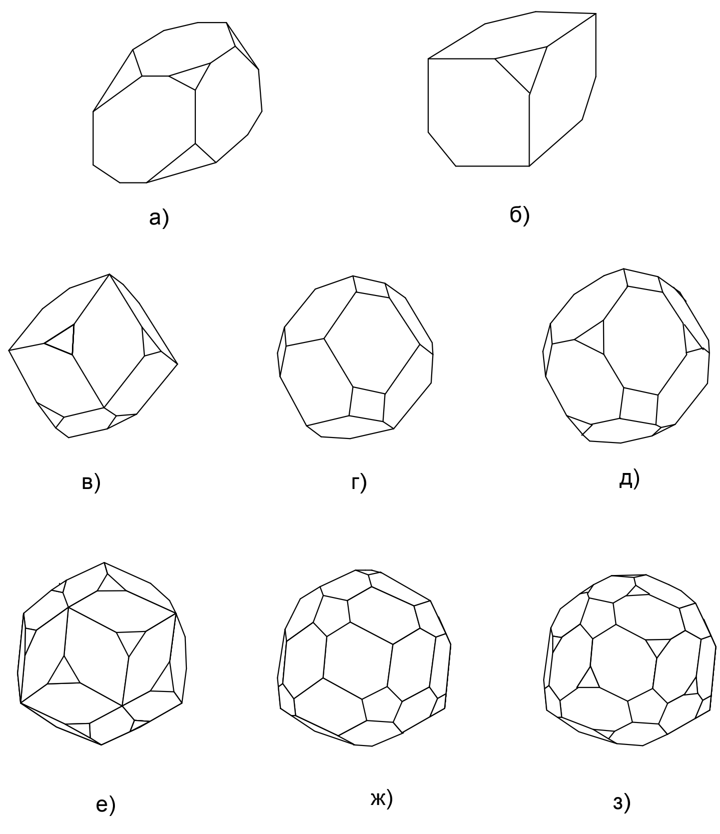

Рис. 1: Многогранники класса SF, не входящие в 1-й и 2-й класс: а) дважды усечённый куб, б) полуусечённый куб, в) 1-й полуусечённый ромбододекаэдр, г) 2-й полуусечённый ромбододекаэдр, д) усечённый ромбододекаэдр, е) 1-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, ж) 2-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, з) усечённый ромботриаконтаэдр

Доказательство.

Заметим, что все многогранники 1-го и 2-го класса принадлежат классу SF. Действительно, в силу определения многогранников 1-го и 2-го классов все их грани являются многоугольниками с центрами вращения. Через каждый из этих центров проходит ось вращения многогранника.

Для того, чтобы перечислить все многогранники класса SF будем перечислять отдельно многогранники без главной оси вращения и многогранники с главной осью вращения. Сначала найдём все многогранники класса SF без главной оси.

В согласии с теоремой Вейля-Минковского, будем рассматривать многогранники как пересечение замкнутых полупространств, содержащих фиксированную точку O — центр многогранника.

Через каждую возможную грань каждого многогранника класса SF должна проходить ось вращения, и эквивалентные грани должны находиться на одном расстоянии от центра O многогранника. При этом, не обязательно все оси вращения будут проходить через грани; некоторые оси могут проходить через вершины или рёбра многогранника.

Рассмотрим три системы плоскостей: $\mathscr{F}$ — плоскости, перпендикулярные осям вращения, проходящим через грани многогранника; $\mathscr{V}$ — плоскости, перпендикулярные осям вращения, проходящим через вершины; $\mathscr{E}$ — плоскости, перпендикулярные осям вращения, проходящим через рёбра.

Гранями многогранника класса SF могут быть грани, параллельные одной из трёх этих систем, либо двум системам, либо трём системам. Так как через любую возможную грань многогранника класса SF должна проходить ось вращения, то для нахождения всех многогранников этого класса, нужно рассмотреть все различные комбинации систем $\mathscr{F}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{E}$, содержащих возможные грани многогранника. При этом допускается параллельный сдвиг каждой из систем как целого. Очевидно, плоскости одной и той же системы должны находиться на одном расстоянии от центра O. Пересечение полупространств, ограниченных системами плоскостей $\mathscr{F}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{E}$ и содержащих центр O, и дадут искомые многогранники. Остаётся только выбрать из них те многогранники (если они имеются), которые не принадлежат ни первому, ни второму классу.

В дальнейшем, для простоты, будем говорить не о пересечениях полупространств, а о (равномерном) отсечении элементов многогранников, образованных системами $\mathscr{F}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{E}$.

Будем рассматривать последовательно перечисление многогранников класса SF, принадлежащих тетраэдральной, октаэдральной и икосаэдральной группе, но не принадлежащих ни 1-му, ни 2-му классу.

Рассмотрим куб, образованный системой $\mathscr{E}$ тетраэдральной группы. Отсечём плоскостями системы $\mathscr{V}$ его вершины. Получим многогранник рис. 1, б) — полуусечённый куб. Этот многогранник, очевидно, не является комбинаторно- эквивалентным ни правильному, ни равноугольно-полуправильному, и значит не является многогранником ни 1-го, ни 2-го класса. Если отсечь ещё другие четыре вершины куба системой плоскостей $\mathscr{F}$ так, чтобы четыре новых равносторонних треугольника не были равны треугольникам, полученным отсечением вершин плоскостями $\mathscr{V}$, то получится многогранник рис. 1, а), дважды усечённый куб, который не является многогранником ни 1-го, ни 2-го класса, но, очевидно, комбинаторно эквивалентен равноугольно-полуправильному — усечённому кубу.

Полуусечённый куб можно получить и при другой комбинации отсекающих плоскостей: отсечением рёбер тетраэдра системой $\mathscr{E}$. Отсекая вновь образовавшиеся вершины рёберно усечённого тетраэдра, получим дважды усечённый куб.

Все другие комбинации отсечений плоскостями систем $\mathscr{F}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{E}$, как легко проверить, дадут только многогранники, перечисленные в [1]. Например, фиксируя тетраэдр системы $\mathscr{F}$, отсечём системой плоскостей $\mathscr{V}$ его вершины. Получим усечённый тетраэдр. Если отсечение вершин провести так, чтобы система отсекающих плоскостей прошла через середины рёбер тетраэдра, то получим октаэдр, не принадлежащий тетраэдральной группе.

Переходя к октаэдральной группе, легко найти все многогранники этой группы класса SF, не принадлежащие ни 1-му, ни 2-му классу. Для этого будем рассматривать три системы плоскостей $\mathscr{F}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{E}$, аналогичных предыдущим. Пусть плоскости системы $\mathscr{E}$ параллельны рёбрам октаэдра. Эти плоскости ограничат ромбический додекаэдр, гранями которого являются 12 равных ромбов. Отсекая вершины степени 3 ромбододекаэдра плоскостями системы $\mathscr{F}$, получим первый полуусечённый ромбододекаэдр, рис. 1, в). Отсекая вершины степени 4 додекаэдра плоскостями системы $\mathscr{V}$, получим второй полуусечённый ромбододекаэдр, рис. 1, г). При одновременном отсечении обоих типов вершин получим усечённый ромбододекаэдр, рис. 1, д). Только эти три типа многогранника, как нетрудно убедиться, являются многогранниками этой группы, не принадлежащими ни 1-му, ни 2-му классу многогранников. Кроме того, эти многогранники не являются комбинаторно-эквивалентными ни правильным, ни равноугольно полуправильным.

Первый полуусечённый ромбический додекаэдр может быть получен также рёберным усечением октаэдра. Второй — рёберным усечением куба. А усечённый ромбический додекаэдр может быть получен либо отсечением 4-гранных вершин рёберно усечённого октаэдра, либо отсечением 3-гранных вершин рёберно усечённого куба.

В случае икосаэдральной группы система $\mathscr{E}$ образует 30-гранник — ромботриаконтаэдр. Аналогично тому, как были найдены искомые многогранники в случае октаэдральной группы, здесь получим искомые многогранники: 1-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, 2-й полуусечённый ромботриаконтаэдр, усечённый ромботриаконтаэдр, рис. 1, е)–з). И эти три многогранника могут быть получены рёберным усечением икосаэдра и додекаэдра с последующим отсечением плоскостями $\mathscr{F}$, $\mathscr{V}$ вновь образовавшихся вершин.

Покажем теперь, что среди многогранников с главной осью нет многогранников, отличных от многогранников 1-го класса. А именно, многогранники класса SF с главной осью представляют собой бесконечные серии прямых призм с правильными, либо равноугольно-полуправильными основаниями.

Пусть дан многогранник M класса SF с главной осью вращения. Гранями F_i, через которые не проходит главная ось многогранника M, могут быть прямоугольники или квадраты и, кроме того, эти грани перпендикулярны двум фиксированным граням. Действительно, рассмотрим грань F_1, через которую проходит главная ось. Кроме грани F_1 эта ось может проходить только через некоторую грань F_2, параллельную F_1 . В противном случае, если бы главная ось проходила через некоторую грань, не параллельную F_1, или через вершину, или через ребро, то M будет иметь оси вращения, не перпендикулярные главной оси, что противоречит её определению.

Итак, главная ось проходит через грани F_1 и F_2 и перпендикулярна им. Другие грани M должны быть перпендикулярны плоскостям граней F_1 и F_2 и каждые две соседние из них имеют общие рёбра, перпендикулярные плоскостям граней F_1 и F_2.

Таким образом, F_i являются или прямоугольниками, или квадратами и оси вращения, проходящие через них, есть оси 2-го порядка. Покажем, что грани F_1 и F_2 могут быть либо правильными, либо равноугольно-полуправильными многоугольниками.

Для этого рассмотрим трёхгранный угол A многогранника M, одним из плоских углов которого является внутренний угол грани F_1. Углу A равен угол B, один из плоских углов которого есть угол грани F_2. Угол B получается из угла A действием одной из осей 2-го порядка граней F_i. Угол B равен углу A_1, вершина которого расположена на том же ребре, что и вершина угла B. Значит угол A равен углу A_1, соседнему с A.

Рассуждая так же далее, получаем, что все плоские углы граней F_1 и F_2 равны между собой. При этом, углы A и A_1 имеют одно общее ребро AA_1 — сторону многоугольника F_1. Стороны этого многоугольника, соседние с AA_1, равны между собой и являются двумя другими рёбрами углов A и A_1. Если эти стороны равны AA_1, то многоугольники F_1 и F_2 правильные, в противном случае — равноугольно-полуправильные.

Терема 1 доказана.

Замечание 1. *Отметим, что из доказанной теоремы в частности следует, что класс* *многогранников, через каждую вершину и через каждую грань которых проходит ось вращения многогранника, исчерпывается девятью многогранниками: пятью правильными и кубооктаэдром, икосододекаэдром, ромбододекаэдром и ромбическим триаконтаэдром.*

Замечание 2. *Если перейти к многогранникам, двойственным классу SF , т.е. к многогранникам, сильно симметричным относительно вращения многогранных углов, получаем и их полное перечисление. Отсюда следует, что существует 7 типов многогранников, сильно симметричных относительно вращения многогранных углов, кооторые не являются комбинаторно эквивалентными телам Гесселя.*

3. Заключение

Доказанная теорема даёт полное перечисление класса многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней. Помимо многогранников 1-го и 2-го класса из [1] этот класс содержит семь многогранников, которые не являются комбинаторно эквивалентными ни правильным (платоновым), ни равноугольно-полуправильным (архимедовым). Один многогранник из этого класса хотя и не принадлежит 1-му и 2-му классу, но является комбинаторно эквивалентным равноугольно-полуправильному многограннику — усечённому кубу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин В. И. Сильно симметричные многогранники.// Геометрия и топология. 8. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т.299), 2003. С.314-325.
2. Циглер Г. М. Теория многогранников. М., МЦНМО, 2014, 568 с.
3. Coxeter H. S. M. Regular polytopes, London-NY., 1963. 648p.
4. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями, //Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2, 1967, 220 с.
5. Субботин В.И. О вполне симметричных многогранниках. //Материалы Международной конференции по дискретной геометрии и её приложениям, посвящ.70-летию проф. С.С.Рышкова .М.: МГУ, 2001. С. 88-89.
6. Субботин В. И. Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения //Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Ростов-на-Лону, 2002. С.77-78.
7. Субботин В. И. О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников. // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №2. С. 222-230.
8. Subbotin V.I. Characterization of polyhedral partitioning a space. //Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations. Kiev: September, 22-28,2003. P.46.
9. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.
10. Субботин В. И. Многогранники с максимальным числом несимметричных граней. // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Материалы Международной конф., посвящ.100-летию Н.В.Ефимова. М.: Макс-Пресс, 2010. С.60-61.

11. Субботин В. И. О симметричных многогранниках с несимметричными гранями.// Материалы Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящ. 80-летию акад. О.Б.Лупанова.М.:МГУ, 2012. С.398-400.

12. Тимофеенко А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями. // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, №2. С. 118–126.

13. Ефремович В. А. Трёхмерные правильные многогранники. // УМН, 2,вып.5. 1947. С.197.

14. Грек А. С. Правильные многогранники на замкнутой поверхности с эйлеровой характеристикой, равной -3.//Известия высших учебных заведений, сер. Математика, 6, 1966, С.50-53.

15. Стрингхем В. И. Правильные фигуры в n-мерном пространстве. // УМН, 1944, № 10. С. 22–33.

REFERENCES

1. Subbotin V. I. 2003, "Strongly symmetric polyhedra" , *Zapiski nauchnych seminarov POMI*, vol.299, pp.314-325.

2. Ziegler G. M. 2014, *The theory of polyhedra* , MCNMO, Moskow.

3. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.

4. Zalgaller V. A. 1967, Convex polyhedra with regular faces, *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, vol. 2, 220 p.

5. Subbotin V. I. "On Completely symmetrical polyhedra" , *Materiali Megdunarudnoy conferencii po diskretnoy geometrii i eyo prilogeniyam, posviash. 70-letiju prof. S.S.Ryshkova (Proc. Int. Conf. on discrete geometry and its applications)*, Moskow, 2001, pp. 88-89.

6. Subbotin V. I. "The enumeration of polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation" , *Trudy megdunarodnoy shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyti N.V.Efimova (Proc. Int. School-Seminar on Geometry and Analysis)* , Rostov-on-Don, 2002, pp.77-78.

7. Subbotin V. I. 2015, "Some generalizations strongly symmetric polyhedra" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol.16, no.2. pp. 222-230.

8. Subbotin V. I. "Characterization of polyhedral partitioning a space" , *Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations* , Kiev, 2003, p.46.

9. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija.* [*Polyhedra. Graph. Optimization*] Nauka, Moskow.

10. Subbotin V. I. "Polyhedra with the maximum number of asymmetrical faces" , *Materialy megdunarodnoy konferencii "Metricheskaja geometriya poverchnostey i mnogogrannikov" , posvjachennoi 100-letiyu N.V.Efimova (Proc. Int. Conf."Metric geometry of surfaces and polyhedra")* , Moskow, 2010, pp.60-61.

11. Subbotin V. I. "On symmetric polyhedra with asymmetrical faces" *Materialy megdunarodnogo seminara "Diskretnaja matematika i ejo prilogeniya posvjachennogo 80-letiyu O. B. Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications")*, Moskow, 2012, pp.398-400.

12. Timofeenko A. V. 2011, "On convex polyhedra with equiangular and parquet faces" , *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no.2, pp. 118–126.

13. Efremovich V. A. 1947, "Three-dimensional regular polyhedra" , *Uspechi matematicheskih nauk*, vol.2, no. 5, p.197.

14. Grek A. S. 1966, "Regular polyhedra on a closed surface with the Euler characteristic equal to -3@ , *Izvestiya vischih uchebnyh zavedeniy, ser. Matematika*, vol.6, pp.50-53.

15. Stringham W. I. 1944, "Regular figures in n-dimensional space" , *Uspechi matematicheskih nauk*, no.10, pp. 22–33.

ЮРГПУ(НПИ)

Поступило 1.09.2016 г.
Принято в печать 12.12.2016 г.