

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-124-131

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД В НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ
С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)

Аннотация

Рассматривается класс рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, которые определяют функции, регулярные в правой полуплоскости комплексной плоскости, и для которых существует последовательность полиномов Дирихле, равномерно сходящаяся к таким функциям в любом прямоугольнике, лежащем в критической полосе. Такие полиномы Дирихле получили в работе название аппроксимационных полиномов Дирихле.

Изучаются свойства аппроксимационных полиномов, в частности, для рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами, то есть конечнозначными числовыми характерами, отличными от нуля для почти всех простых чисел, сумматорная функция которых ограничена.

Эти исследования представляют интерес в связи с задачей аналитического продолжения таких рядов Дирихле на комплексную плоскость, что, в свою очередь, связано с решением известной гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что любой обобщенный характер является характером Дирихле.

Ключевые слова: ряд Дирихле, сумматорная функция коэффициентов, обобщенный характер, характер Дирихле, аппроксимационные полиномы.

Библиография: 15 наименований.

APPROXIMATION APPROACH IN CERTAIN PROBLEMS
OF THE THEORY OF DIRICLET SERIES WITH
MULTIPLICATIVE COEFFICIENTS

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva (Saratov)

Abstract

In this paper we consider a class of Dirichlet series with multiplicative coefficients which define functions holomorphic in the right half of the complex plane, and for which there are sequences of Dirichlet polynomials that converge uniformly to these functions in any rectangle within the critical strip. We call such polynomials approximating Dirichlet polynomials.

We study the properties of the approximating polynomials, in particular, for those Dirichlet series, whose coefficients are determined by nonprincipal generalized characters, i.e. finite-valued numerical characters which do not vanish on almost all prime numbers and whose summatory function is bounded.

These developments are interesting in connection with the problem of the analytical continuation of such Dirichlet series to the entire complex plane, which in turn is tied with the solution of a well-known Chudakov hypothesis about every generalized character being a Dirichlet character.

Key words: Dirichlet series, summatory function of coefficients, generalized character, Dirichlet character, approximating polynomials

Bibliography: 15 items.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399)

1. Введение

Рассмотрим ряд Дирихле с мультипликативными коэффициентами

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

и соответствующий (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)x^n. \quad (2)$$

Как следует из работы [1], при выполнении следующих условий:

1. сумматорная функция коэффициентов ограничена:

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1);$$

2. существует односторонний предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \alpha_0$$

3. для любого натурального k существует x_0 , $0 < x_0 < 1$, такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < x_0 \leq x < 1$, имеет место оценка

$$|g(x) - \alpha_0| \leq \frac{C}{|\ln^k(1-x)|}, \quad (3)$$

где константа C не зависит от x ,

функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), аналитически продолжима регулярным образом в полуплоскость $\sigma > 0$ и является непрерывной в широком смысле во всех точках мнимой оси. Кроме того, существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, обладающих следующими свойствами:

1. в полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty$, $|t| \leq T$, где T — некоторая положительная константа, последовательность полиномов равномерно сходится к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1);
2. для любого $\sigma_0 > 0$ существует n_0 , что в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty$, $|t| \leq T$ для всех $n \geq n_0$ имеет место оценка

$$|f(s) - Q_n(s)| \leq \frac{C}{(n+1)} \sigma_0,$$

где константа C зависит только от величины T .

3. для любого $\sigma_0 \geq 0$ существует n_0 такое, что при $n \geq n_0$ нормы полиномов Дирихле $Q_n(s)$ ограничены в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty$, $|t| \leq T$ константой, зависящей только от T .

В дальнейшем такие полиномы будем называть аппроксимационными полиномами Дирихле ряда Дирихле (1).

Как показано в [2], для рядов Дирихле (1), коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами, существует последовательность аппроксимационных полиномов Дирихле $Q_n(s)$ с указанными выше свойствами.

В данной работе изучаются свойства аппроксимационных полиномов Дирихле для рядов Дирихле (1), а также обсуждаются их возможные приложения к некоторым задачам теории L -функций Дирихле.

2. Явный вид аппроксимационных полиномов Дирихле для определенных классов рядов Дирихле

Отметим, что как следует из [1-2], существуют различные последовательности аппроксимационных полиномов ряда Дирихле (1), и каждый раз встает задача построения аппроксимационных полиномов наиболее "простого" вида.

Для рядов Дирихле (1), коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характеристиками, имеет место следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *Для рядов Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, последовательность частичных сумм этого ряда*

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{h(k)}{k^s} \quad (4)$$

является последовательностью аппроксимационных полиномов Дирихле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим известное интегральное представление функции $f(s)$ в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 0$

$$f(s) = s \int_1^\infty \frac{S(u)}{u^{s+1}} du,$$

где $S(u) = \sum_{n \leq u} h(n)$, и соответствующее интегральное представление для полинома Дирихле (4)

$$Q_n(s) = s \int_1^\infty \frac{\hat{S}(u)}{u^{s+1}} du,$$

где $\hat{S}$ — сумматорная функция последовательности $h(1), h(2), \dots, h(n), 0, 0, \dots, 0, \dots$

При $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ и $|t| \leq T$ имеет место оценка:

$$\begin{aligned} |f(s) - Q_n(s)| &= |s| \left| \int_1^\infty \frac{S(u) - \hat{S}(u)}{u^{s+1}} du \right| \leq C \int_{n+1}^\infty \frac{|S(u) - \hat{S}(u)|}{u^{\sigma+1}} du \leq \\ &\leq \frac{C_1}{\sigma(n+1)^{\sigma_0}} \leq C_2 \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу ограниченности функции $f(s)$ в области $0 < \sigma < \infty$, $|t| \leq T$ константой, зависящей только от T , см. [1-2], и в силу оценки (5) нормы полиномов $Q_n(s)$ при $n \geq n_0$, где n_0 определяется величиной σ_0 , будут ограничены в совокупности в прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$ константой, зависящей только от величины T , что и завершает доказательство теоремы 1.

□

В случае, когда $h(n)$ — неглавный характер Дирихле, имеет место следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дан ряд Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный характер Дирихле. Тогда для аппроксимационных полиномов Дирихле (4) имеют место оценки:*

1. *в любом прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$, для всех n*

$$|Q_n(s)| < C,$$

где константа C зависит только от T ;

2. в любом прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1$, $|t| \leq T$ имеет место оценка

$$|f(s) - Q_n(s)| \leq \frac{C}{(n+1)^\sigma},$$

где константа C зависит только от T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [5] показано, что при любом t имеет место оценка

$$S_t(n) = \sum_{n \leq x} h(n)n^{-it} = O(1). \quad (6)$$

В работе [6] показано, что в оценке (6) для всех $|t| \leq T$ константа в символе " O " зависит только от величины T .

Пусть $s = \sigma + it$. Запишем полином вида (4) в интегральной форме.

$$Q_n(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)n^{-it}}{n^\sigma} = \sigma \int_1^{\infty} \frac{\hat{S}_t(u)}{u^{\sigma+1}} du,$$

где

$$\hat{S}_t(u) = \begin{cases} S_t(u), & u < n+1 \\ S_t(n), & u \geq n+1. \end{cases}$$

Отсюда, в силу (6), получаем оценку вида:

$$|Q_n(\sigma + it)| < C,$$

где константа C не зависит от σ .

Далее, для всех n :

$$|f(s) - Q_n(s)| = \sigma \left| \int_1^{\infty} \frac{S(u) - \hat{S}_t(u)}{u^{\sigma+1}} du \right| \leq \frac{C}{|n+1|^\sigma}, \quad (7)$$

где константа C не зависит от величины σ . $\square$

3. К задаче описания области значений ряда Дирихле и аппроксимационных полиномов Дирихле в полуплоскости $\sigma > 1$

Рассмотрим ряд Дирихле (1)

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, и последовательность аппроксимационных полиномов Дирихле (4)

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{h(k)}{k^s}.$$

Докажем ряд утверждений относительно значений ряда Дирихле (1) и полиномов Дирихле (4) в полуплоскости $\sigma > 1$, точнее, в окрестности прямой $\sigma = 1$: $1 < \sigma < 1 + \delta$.

ЛЕММА 1. Ряд Дирихле (1) не равен нулю ни в одной точке полосы $1 < \sigma < 1 + \delta$.

Доказательство леммы 1 проводится так же, как и в случае L -функций Дирихле (см. [7]). В результате при любом $\sigma_0 > 1$ получается оценка вида

$$\frac{1}{|f(\sigma + it)|} < C,$$

где константа C зависит только от величины σ_0 .

ЛЕММА 2. *Функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), не ограничена в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию вида

$$\ln f(s) = - \sum_p \ln \left(1 - \frac{h(p)}{p^s}\right), \quad \sigma > 1. \quad (8)$$

В силу леммы 1 функция (8) является аналитической в полуплоскости $\sigma > 1$.

Рассуждения, почти дословно повторяющие рассуждения, приведенные в [8] на стр. 296–297, основанные на одной теореме Бора о суммировании ряда выпуклых кривых, позволяют для значений функции (8) получить следующее утверждение: множество значений функции (8) в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$ содержит любую конечную область комплексной плоскости. Как следствие этого утверждения получаем, что множество значений ряда Дирихле (1) в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$ содержит круг любого радиуса (за исключением нуля), что и завершает доказательство леммы 2. $\square$

ЛЕММА 3. *Для любой последовательности различных аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$ нормы этих полиномов не ограничены в совокупности единой константой в полосе $1 < \sigma < 1 + \delta$.*

Утверждение леммы 3 является следствием леммы 2.

ЛЕММА 4. *Для любого $\sigma_0 > 1$ найдется n_0 такое, что полиномы Дирихле $Q_n(s)$, $n \geq n_0$, не равны нулю в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.*

Утверждение леммы 4 является следствием леммы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого числа $w_0 \neq 0$ существует такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$: $w_0 = Q_n(s_n)$, где $s_n = \sigma_n + it_n$, $1 < \sigma_n < 1 + \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства теоремы лежит известный результат Пикара. Приведем здесь формулировку теоремы Пикара в том виде, в котором она приведена в [8] на стр. 288.

ТЕОРЕМА 4 (Пикара). *Если функция $f(s)$ регулярна в круге $|s - s_0| < r$ и не принимает там значений 0 и 1, а $|f(s_0)| \leq \alpha$, то $|f(s)| \leq A(\alpha, \theta)$ в круге $|s - s_0| \leq \theta r$, $0 < \theta < 1$.*

Нужно отметить, что константа $A(\alpha, \theta)$ определяется только параметрами α и θ для любой функции $f(s)$, удовлетворяющей условию теоремы.

Доказательство теоремы 3 будем проводить от противного. Предположим, что существует такая последовательность полиномов $Q_{n_k}(s)$, что $w_0 \neq Q_{n_k}(s)$ для всех s , лежащих в полосе $1 < \sigma_n < 1 + \delta$.

В силу леммы 4 многочлены Дирихле $Q_{n_k}(s)$ при $n_k \geq n_0$ не имеют нулей при $\sigma > \sigma_0 > 1$.

Рассмотрим функцию

$$g_{n_k}(s) = \frac{Q_{n_k}(s) - w_0}{w_0}$$

и окружности радиусов $\frac{\delta}{2}$ и $\frac{\delta}{4}$ с центрами в одной точке

$$s_0 = 1 + \frac{1}{4}\delta + \frac{\sigma_0}{2} + iT.$$

Тогда верно неравенство

$$|g_{n_k}(s_0)| \leq \frac{\zeta(1 + \frac{\delta}{4}) + |w_0|}{|w_0|},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Обозначим правую часть последнего неравенства α .

Внутри кругов, ограниченных окружностями, рассмотренными выше, функция $g_{n_k}(s)$ не равна нулю и единице. Следовательно, по теореме Пикара

$$|g_{n_k}(s)| < A(\alpha).$$

Отсюда получаем

$$|Q_{n_k}(s)| \leq A(w_0, \alpha) \text{ для } 1 < \sigma < 1 + \frac{\delta}{2}, T > 1,$$

для всех полиномов Дирихле при $n \geq n_0$, где n_0 определяется величиной σ_0 , что противоречит лемме 3. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Отметим, что полученные здесь результаты относительно свойств аппроксимационных полиномов Дирихле предполагается использовать в дальнейших работах авторов, посвященных задаче аналитического продолжения рядов Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, на комплексную плоскость.

С этой задачей связано окончательное решение гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что любой обобщенный характер является характером Дирихле (см. [1-2]). Эта гипотеза решена только в случае главных обобщенных характеров (см. [9]). Для неглавных обобщенных характеров проблема остается открытой. На связь между решением задачи об аналитическом продолжении рядов Дирихле (1) в случае неглавных обобщенных характеров и окончательным решением гипотезы Н. Г. Чудакова указывает следующий результат, полученный в работе [10]: если ряд Дирихле (1), где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, аналитически продолжим на комплексную плоскость, и функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), удовлетворяет следующему условию роста модуля

$$|f(s)| \leq Ce^{|s| \ln |s| + A|s|},$$

где A — некоторая положительная константа, то $h(n)$ — неглавный характер Дирихле.

Отметим, что аппроксимационный подход использовался авторами и ранее при решении отдельных вопросов теории L-функций [11-15]. Но в этих работах, в отличие от данной статьи, аппроксимационные полиномы строились для рядов Дирихле, коэффициенты которых определялись характерами Дирихле.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, вып. 2, С. 162–169.
2. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, вып. 3, С. 115–124.

3. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2, С. 133–136.
4. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщенном характере. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №4, С. 1137–1138.
5. Чудаков Н. Г., Бредихин Б. М. Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп. — УМН., 1956, Т. 9, №2, С. 347–360.
6. Матвеев В. А., Матвеева О. А. О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2012, Т. 13, вып. 2, С. 106–116.
7. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983.
8. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: И. Л., 1953.
9. Глазков В. В. Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел // Исследования по теории чисел: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1968, Т. 2, С. 3–40.
10. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т. 36, №6, С. 805–812.
11. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2010, Т. 11, вып. 1, С. 188–198.
12. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости Белгородского государственного университета — Белгород: изд-во БелГУ, 2011, вып. 24, С. 47–54.
13. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, С. 80–84.
14. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 2, С. 117–121.
15. Матвеева О. А. Почти периодические функции и плотностные теоремы для рядов Дирихле с периодическими коэффициентами // Материалы XII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения— Тула, 2014, С. 238–239.

REFERENCES

1. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "On the boundary behavior of a class of Dirichlet series" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 17, issue 2, pp. 162–169
2. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "On the boundary behavior of a class of Dirichlet series with multiplicative coefficients" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 17, issue 3, pp. 115–124
3. Chudakov N. G., Linnik U. V. "On a class of completely multiplicative functions" *DAN SSSR*, 1950, vol. 74, issue 2, pp. 133–136.

4. Chudakov N. G., Rodosskij K. A. "On a generalized character" *DAN SSSR*, 1950, vol.74, issue 4, pp. 1137–1138.
5. Chudakov N. G., Bredichin B. M. "Usage of Parseval's equation for estimating summation functions of characters of numerical semigroups" *UMN.*, 1956, vol.9, issue 2, pp. 347–360.
6. Matveev V. A., Matveeva O. A. "On a behavior of the Dirichlet series with finitely valued coefficients and bounded summatory function in the critical strip" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2016, vol. 13, issue 2, pp. 106–116
7. Karatsuba A. A. "Basics of analytic number theory". "Nauka Moscow, 1983
8. Titchmarsh E. K., "Riemann zeta-function theory" I.L. Moscow, 1953
9. Glazkov V. V. "Issledovanija po teorii chisel: Mezhdunarodnaja sb. nauch. tr.", publ. SSU, 1968, vol. 2, pp. 3–40
10. Kuznetsov V. N. "Analogue of the Szego theorem for a class of Dirichlet series" *Math. issues*, 1984, vol. 36, № 16, pp. 805–812
11. Kuznetsov V. N., Matveeva O. A. "Extended Riemann Hypothesis and zeros of functions defined by Dirichlet series with periodic coefficients" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2010, vol. 11, issue 1, pp. 188–198
12. Korotkov A. E., Matveeva O. A. "On a numerical algorithm for determining zeros of entire functions defined by Dirichlet series with periodic coefficients" *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, Belgorod, publ BelGU, 2011, issue 24, pp. 47–54
13. Matveeva O. A. "Approximation polynomials and the behavior of the Dirichlet L-functions on the critical band" *Izvestija Saratovskogo un-ta. Serija «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, 2013, vol. 13, issue 4, pp. 80–84
14. Matveeva O. A. "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, 2013, vol. 14, issue 2, pp. 117–121
15. Matveeva O. A. "Almost periodic functions and density theorems for Dirichlet series with periodic coefficients" *Materialy XII Mezhdunarodnoj konferencii "Algebra i teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija"*, Tula, 2014, pp. 238–239

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поступило 20.09.2016 г.

Принято в печать 12.12.2016 г.