ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 4

УДК 539.3+514.4 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-110-123

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ И ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ МЕТОДА БУБНОВА–ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В. Н. Кузнецов, Т. А. Кузнецова, Л. В. Бессонов (г. Саратов)

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы, связанные со скоростью сходимости метода Бубнова–Галёркина при численном расчёте напряжённо-деформированного состояния геометрически нелинейных оболочек в динамическом случае. Для решения этих вопросов привлекается аппарат сильно непрерывных ограниченных полугрупп операторов. В теории краевых задач методы функциональных полугрупп операторов эффективно применяются с 60-х годов XX-века. Это работы Э. Хилля, Р. Филлипса, С. Г. Крейна, С. Мизохата и других авторов. Так, применяя аппарат сильно непрерывных полугрупп операторов, С. Г. Крейн в конце 60-х годов по-новому доказал теоремы существования и единственности решений линейных уравнений механики. В 2000 году В. Н. Кузнецов и Т. А. Кузнецова впервые применили аппарат ограниченных полугрупп операторов для исследования решений линейных уравнений пологих оболочек, что позволило решить задачу о гладкости решений систем линейных уравнений оболочек. В это же время В. Н. Кузнецов и Т. А. Кузнецова предложили так называемый метод линейной аппроксимации по отдельным параметрам, который позволил решить задачу о гладкости решения уже нелинейных уравнений пластин и оболочек. Это дало возможность определиться со скоростью сходимости метода Бубнова — Галёркина при численном решении нелинейных краевых задач для геометрически нелинейных оболочек в области устойчивости по параметрам.
В данной работе приводится результат о скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина в случае кусочно-гладкой границы нелинейной оболочки.

Ключевые слова: ограниченные полугруппы операторов, геометрически нелиненые оболочки, метод линейной аппроксимации по отдельным параметрам, порядок скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина.

Библиография: 19 названий.

LIMITED OPERATOR SEMIGROUPS AND ISSUES OF THE CONVERGENCE OF THE BUBNOV–GALERKIN METHOD FOR ONE CLASS OF SHALLOW SHELLS NONLINEAR EQUATIONS

V. N. Kuznetsov, T. A. Kuznetsova, L. V. Bessonov (Saratov)

Abstract

This paper discusses issues related to the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method in numerical calculation of stress-strain state of geometrically nonlinear shells in the dynamic case. To address these issues involved the unit strongly continuous semigroups of limited operators. Methods of functional semigroups of operators was applied effectively in the theory of boundary value problems since the 60s XX-th century. It should be noted author E. Hill, R. Phillips, S. G. Krein, S. Mizohata and others. So, using the methods of strongly continuous semigroups of operators S. G. Krein proved a new theorem on the existence and uniqueness of solutions of linear equations of mechanics in late 60s. In 2000, V. N. Kuznetsov and T. A. Kuznetsova first used the methods limited semigroups of operators to solution of linear equations of shallow shells, which solved the problem of smoothness of solutions of linear systems of equations of shells. At the same time V. N. Kuznetsov and T. A. Kuznetsova have developed a method called a linear approximation in separated parameters, which allow to solve the problem of smoothness of solutions of nonlinear equations of the theory of plates and shells. This made it possible to determine the speed of convergence of the Bubnov–Galerkin method the numerical solution of nonlinear boundary value problems for the geometrically nonlinear shells in the area of sustainability in the parameters.

In this paper, we complete the proof of the result of the rate of convergence of the Bubnov–Galerkin method in the case of an arbitrary configuration shell borders.

Keywords: limited semigroup, geometrically nonlinear shell, the method of linear approximation on separated parameters, the order of convergence of the Bubnov — Galerkin method rate.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Пусть $\{V(t), t \geq 0\}$ — сильно непрерывная ограниченная полугруппа операторов (С.Н.О.П.О.), действующая в банаховом пространстве, порождающий оператор которой A имеет полную систему собственных функций с собственными значениями λ_n. Известно [1-2], что в это случае имеют место прямые и обратные теоремы приближения по собственным подпространствам, аналогичные классическим теоремам, но выраженные в терминах порождающего оператора. Рассмотрим ещё одно приложение ограниченных полугрупп операторов, теперь в теории краевых задач.

Рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha\Delta^2 w + \phi_1(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_2(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ \qquad\qquad +2\phi_3(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \phi_4(x,y,t) + q, t \in [0;T], \\ \\ w(x,y,0) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = w_1, \\ w|_\Gamma = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial \overline{\eta}}\right|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\phi_i(x,y,t)$ — некоторые непрерывные в области $\Omega \times [0;T]$ функции, а Ω — ограниченная область с границей Γ, представляющей собою кусочно-гладкую кривую.

Под решением этой задачи понимается любая функция $w(x,y,t)$, удовлетворяющая уравнению, начальным и граничным условиям (1) из пространства $L^\infty((0;T), H^2(\Omega))$, где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева.

Рассмотрим операторы вида

$$A(t)w = \alpha\Delta^2 w - \phi_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\phi_3\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2}$$

Пусть Γ — кусочно-гладкая граница. Известно [3], что оператор Δ^2 в случае наших граничных условий является положительно определённым самосопряжённым оператором. Известно также [4], что опреаторы $A(t)$ вида (2) будут положительно определёнными самосопряжёнными операторами при выполнении условий

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0, \\ |\phi_i(x,y,t)| < C, i = 1,2,3, \end{cases} \tag{3}$$

где C — некоторая положительная константа. Как показано в [2] операторы $i\Delta$ и $A^{1/2}(t)$ являются подобными, порождают эквивалентные ограниченные полугруппы операторов и константа эквивалентности не зависит от t. Этот факт позволяет доказать (см. [5]), что задача Коши (1) при сделанных выше предположениях имеет единственное решение $w(x,y,t)$, принадлежащее пространству $L^\infty((0;T), H^2(\Omega))$, где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева. Более того, если начальные функции $w_0 \in D(\Delta^{2k})$ и $w_1 \in D(\Delta^{2k-1})$, а функции $\phi_i(x,y,t) \in D(\Delta^{2k-1})$ при любом $t \in [0;T]$, то решение задачи Коши принадлежит области определения оператора Δ^{2k} при любом $t \in [0;T]$.

Отметим, что при доказательстве последнего утверждения, т.е. гладкости решения задачи Коши (1) существенную роль играет тот факт, что оператор $A(t)$ вида (2) порождает ограниченную полугруппу операторов.

Остановимся более подробно на результатах работы [5]. В [5] рассмастривается класс нелинейных моделей оболочек, отражающих геометрическую нелинейность оболочек и удовлетворяющих следующим ограничениям:

- любая неизвестная фукнция, входящая в ураснения системы, однозначно выражается через функцию прогиба w;
- область Ω, определяющая серединную поверхность оболочки, является ограниченной областью с кусочно гладкой границей;
- граничные условия рассматриваются в форме Неймана.

К этому классу относятся известные модели Кирхгофа и Тимошенко (как в смешанной форме, так и заданные в перемещениях) и некоторые другие модели. Для исследования решений моделей этого класса в работе [5] разработан так называемый метод линейной аппроксимации по отдельным параметрам, который позволяет строить последовательность функций $\{w_k\}$, являющихся решением линейных операторных уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha_1 A w + -L_k w + f_n, t \in [0;T], \\ \\ w(x,y,0) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = w_1, \\ w|_\Gamma = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial \overline{\eta}}\right|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $A = \Delta^2$ либо $A = -\Delta$, и где

$$L_k w = \phi_{1,k}(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi_{2,k}(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\phi_{3,k}(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где последовательность непрерывных в области $\Omega \times [0;T]$ функций $\phi_{i,n}(x,y,t), i = 1,2,3,$ f_n получена в результате применения метода В. В. Петрова [6] — метода последовательного возмущения параметров — к соответствующей нелинейной модели.

Как показано в [5], последовательность функций $\{w_k\}$ сходится в пространстве

$$L^\infty((0;T), H^2(\Omega)),$$

где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева, к функции прогиба w исходной модели оболочки.

Более того, свойства единственности и гладкости решений операторных уравнений (4) переносится на решение соответствующей исходной задачи.

Таким образом, в случае, когда операторы вида

$$A_n = \alpha_1 A - L_n, \tag{5}$$

являются положительно определенными при любом $t \in [0;T]$, соответствующая нелинейная модель имеет решение того же порядка гладкости, что и начальные функции w_0, w_1 и нагрузка q.

Гладкость решений модельной задачи гарантирует определённый порядок скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина. Доказательства этого факта приведено в [5] на примере нелинейной модели Кармана для прямоугольной в плане оболочечной конструкции. В более поздних работах [6-10] также обсуждались вопросы гладкости решений нелинейных задач и впопросы сходимости метода Бубнова–Галёркина.

В данной работе на примере модели Кармана докажем результат о порядке скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина в случае кусочно гладкой границы оболочки Ω.

2. Вопросы сходимости метода Бубнова–Галёркина при решении линейных операторных уравнений

Запишем последовательность операторных уравнений (4) в случае нелинейной модели Кармана.

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L_n(w) + f_n + q, t \in [0;T], \\ \\ w(x,y,0) = w_0, \frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = w_1, \\ w|_\Gamma = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial \overline{\eta}}\right|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$L_n(w) = \frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F_n}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$f_n = \Delta_k F_n + q$, и $\{F_n\}$ — последовательность функций, полученная каким-либо методом, сходящаяся в пространстве $L^\infty((0;T), H^2(\Omega))$ к функции усилий F.

Решение методом Бубнова–Галёркина уравнения (4) заключается в определении последовательности функций

$$w_{n,N}(t,x,y) = \sum_{k=1}^{N} \beta_{k,n}(t)\phi_k, \tag{7}$$

сходящейся к решению w_n, где $\{\phi_k\}$ — система собственных функций оператора Δ^2, а коэффициенты $\beta_{k,n}(t)$ находятся из условий:

1. $\left(\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_{n,N}}{\partial t^2}, \phi_r\right) + (D\Delta w_{n,N} + L_n(w_{n,N}), \phi_r) = (f_n, \phi_r), r = 1, \ldots, N;$

2. $w_{n,N}(0,\bullet) = w_{0,N}, \frac{\partial w_{n,N}}{\partial t}(0,\bullet) = w_{1,N},$

где

$$w_{0,N} \to w_0,\ w_{1,N} \to w_1,\ \text{при } N \to \infty.$$

Относительно гладкости функций w_n, полученных в результате решения линейных операторных уравнений (6) методом Бубнова—Галёркина, имеет место следующее утверждение, доказанное в [5].

Теорема 1.*Предположим, что*

1. *Функции* $\frac{\partial^2 F_n}{\partial x_i \partial y_j}$ *непрерывны во времени.*
2. *Оператор* $A_n = D\Delta^2 - L_n$ *является положительно определённым.*
3. *При любом* $t \in [0;T]$ *функции* w_0, w_1, q *принадлежат области определения оператора* Δ^{2r}, *где действие оператора Лапласа рассматривается в подпространстве* $H_0^2(\Omega)$.

Тогда для любого $t \in [0;T]$ *решение* w_n *задачи* (6) *принадлежит области определения оператора* Δ^{2r}.

Согласно [5], в случае, когда нагрузка q и начальные условия w_0, w_1 задачи (1) таковы, что при любом n для операторного уравнения (6) выполняются условия теоремы 1, решение (w, F) задачи (1) является гладким, т.е.

$$w \in L^\infty((0;T), D(\Delta^{2r})), F \in L^\infty((0;T), D(\Delta^{2r}))$$

Докажем следующее утверждением.

Лемма 1.*Пусть линейный симметрический оператор* A *имеет полную ортонормированную систему* $\{u_n\}$ *собственных функций с собственными значениями* $\{\lambda_n\}$:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

Тогда оператор A *является положительно определённым тогда и только тогда, когда* $\lambda_1 > 0$.

Доказательство. Известно [11], что положительно опредённый симметрический оператор с дискретным спектром имеет в качестве системы собственных векторов ортонормированную систему функций с положительными собственными значениями.

Обратно, пусть $\lambda_1 > 0$. Рассмотрим

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k.$$

Тогда

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} (Au, u_k) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u, Au_k) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, u_k) u_k.$$

Отсюда получим

$$(Au, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, u_k)^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k)^2 = \lambda_1 ||u||^2.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему относительно порядка скорости сходимости метода Бубнова–Галеркина при тех же предположениях, что и в теореме 1. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.*Скорость сходимости последовательности функций* $\{w_{n,N}\}$ *вида* (7) *к решению* w_n *операторного уравнения* (6)*в пространстве* $L^\infty((0;T), H_0^2(\Omega))$ *имеет порядок* $O\left(\frac{1}{N^{2r-1}}\right)$.

Доказательство. Обозначим через A_n линейный оператор вида

$$A_n = D\Delta^2 - L_n \tag{8}$$

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов $\beta_{k,n}(t)$ в разложении (7)

$$\frac{\gamma}{g}\beta''_{n,s} + \sum_{k=1}^{N} a_{k,s}\beta_{k,n} = b_{n,s},\ \ s = 1,\dots,N, \tag{9}$$

где $a_{k,s} = (A_n\phi_k, \phi_s)$, A_n — оператор вида (8), $b_{n,s} = (f_n, \phi_s)$. При этом

$$\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{N} \beta_{k,n}(0)\phi_k \to w_0,\ \ N \to \infty, \\ \sum_{k=1}^{N} \beta'_{k,n}(0)\phi_k \to w_1,\ \ N \to \infty, \end{array} \tag{10}$$

Для решения уравнения (6) рассмотрим ряд Фурье

$$w_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k}(t)\phi_k \tag{11}$$

и систему N уравнений

$$\left(\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}, \phi_s\right) + (A_n w_n, \phi_s) = (f_n, \phi_s),\ \ s = 1,\dots,N, \tag{12}$$

для нахождения коэффициентов $\alpha_{k,n}(t)$ разложения (11).

Запишем систему уравнений (12) в виде

$$\frac{\gamma}{g}\alpha''_{n,s} + \sum_{k=1}^{N} a_{k,s}\alpha + k, n = b_{n,s} - \left(A_n\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k\right), \phi_s\right),\ \ s = 1,\dots,N, \tag{13}$$

Вычтем из (9) систему уравнений (13) и обозначим

$$y_{n,s} = \beta_{n,s} - \alpha_{n,s}. \tag{14}$$

Тогда получим

$$\frac{\gamma}{g}y''_{n,s} + \sum_{k=1}^{N} a_{k,s}y_{k,n} = c_{n,N,s},\ \ s = 1,\dots,N, \tag{15}$$

где

$$c_{n,N,s} = \left(A_n\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_s\right)\right).$$

Учитывая тот факт, что в пространстве функций $H_0^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ нормы $||A_n w||_{L_2(\Omega)}$ и $||\Delta^2 w||_{L_2(\Omega)}$ эквивалентны и что при любом $t \in [0;T]$ по теореме 1

$$\left|\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k\right|\right|_{L_2(\Omega)} = O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$$

получаем оценку

$$|c_{n,N,s}| = \left|\left(A_n\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_{k,n}\phi_k\right), \phi_s\right)\right| \le \frac{c_1}{N^{2r-2}}, \tag{16}$$

где константа c_1 зависит только от величины r.

В силу (10), (11), (14) начальные условия для системы (15) можно считать нулевыми, т.е.

$$y_{n,s}(0) = 0,\ y'_{n,s}(0) = 0.$$

Запишем систему (14) в матричной форме:

$$\frac{\gamma}{g} Y''_n + MY_n = C_n, \tag{17}$$

где

$$Y''_n = \begin{bmatrix} y''_{n,1} \\ y''_{n,2} \\ \dots \\ y''_{n,N} \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} c_{n,N,1} \\ c_{n,N,2} \\ \dots \\ c_{n,N,N} \end{bmatrix}, Y_n = \begin{bmatrix} y_{n,1} \\ y_{n,2} \\ \dots \\ y_{n,N} \end{bmatrix},$$
$$M = ((A_n\phi_k, \phi_s))_{k=1,\dots,N}^{s=1,\dots,N}. \tag{18}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы M

$$\begin{vmatrix} (A_n\phi_1, \phi_1) - \lambda & (A_n\phi_2, \phi_1) & \dots & (A_n\phi_N, \phi_1) \\ (A_n\phi_1, \phi_2) & (A_n\phi_2, \phi_2) - \lambda & \dots & (A_n\phi_N, \phi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_n\phi_1, \phi_N) & (A_n\phi_2, \phi_N) & \dots & (A_n\phi_N, \phi_N) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Так как оператор A_n — положительно определённый, а $\{\phi_k\}$ образует ортогональный базис, то как показано в [11], все корни уравнения (19) являются положительными числами. Таким оборазом, при любом $t \in [0;T]$ все собственные числа матрицы M вида (18) являются положительными. Как показано в [11], в этом случае при любом $t \in [0;T]$ имеет место неравенство

$$(MX, X) \geq c||X||, \tag{20}$$

где константа c не зависит от N, а зависит только от минимального собственного значения опреатора A_n.

Умножим скалярно уравнение (17) на столбец Y_n. Тогда с учётом того, что

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} Y_n, Y_n\right) = \left(\frac{dY_n}{dt}, \frac{dY_n}{dt}\right) = ||Y_n||^2,$$

получаем

$$\frac{\gamma}{g} ||Y_n||^2 + (MY_n, Y_n) = (C_n, Y_n),$$

Далее из условий (20) и (16) следует

$$||Y_n||^2 \leq c||C_n|| \leq \frac{c_1}{N^{2r-3}}.$$

Отсюда для всех $k = 1, \dots, N$ получаем оценки

$$||Y_n||_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c_2}{N^{r-3/2}}, \tag{21}$$

где константа c_2 не зависит от N, а зависит только от величины r и минимального собственного значения оператора A_n.

Из оценок (21) следует, что для всех $k = 1, \dots, N$

$$\beta_{k,N}(t) \to \alpha_{n,k}(t) \text{ при } N \to \infty$$

и порядок скорости сходимости последовательности $\{\beta_{k,N}(t)\}$ равен $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$.

В силу (9) и (13) функции $\beta_{k,N}(t)$ и $\alpha_k(t)$ являются дважды дифференцируеми. Следовательно, сходимость $\beta_{k,N}(t) \to \alpha_k(t)$ является равномерной. Отсюда в силу равенства Парсеваля величина $||w_{n,N} - S_n||_{L^2(\Omega)}$, где S_n — частичная сумма ряда Фурье (11), имеет для всех $t \in [0;T]$ порядок скорости сходимости равный $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$.

Тем самым теорема доказана.

3. Вопросы скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина при численном расчёте напряжённо-деформированного состояния нелинейной оболочки

Рассмотрим вопросы скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина для нелинейных моделей оболочек. Приведём рассуждения для нелинейной модели Кармана. Отметим, что аналогичные рассуждения проходят для весьма широкого класса нелинейных уравнений. Запишем геометрически нелинейную модель оболочки с кусочно гладкой границей — модель Кармана, где функции прогиба и усилий удовлетворяют краевым условиям в форме Неймана.

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L(w,F) + \Delta_k F + q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w) - \Delta_k F, \end{cases} \tag{22}$$

где функции прогиба и усилий удовлетворяют краевым и начальным условия:

$$\begin{cases} w|_\Gamma = \left.\frac{\partial w}{\partial \overline{\eta}}\right|_\Gamma = 0, \\ F|_\Gamma = \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{\eta}}\right|_\Gamma = 0, \\ w(x,y,t) = w_0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = w_1. \end{cases} \tag{23}$$

Будем предполагать, что решение задачи (22)–(23) рассматривается в области однозначности изменения параметров и на конечном временном интервале $t \in (0;T)$ в пространстве $L^\infty((0;T), H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$.

В данном случае имеет место следующая теорема.

Теорема 3.*Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда скорость сходимости последовательности функций $\{w_N^*, F_N^*\}$, полученных в результате применения метода Бубнова–Галеркина к системе нелинейных уравнений* (1)*, к решению этой системы* (w,F) *в пространстве* $L^\infty((0;T), H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega))$ *имеет порядок* $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$.

Доказательство. Запишем системы равенств для решения (w,F) задачи (22)–(23) и для приближённого решения $\{(w_N^*, F_N^*)\}$:

$$\begin{cases} \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w + L(w,F) + \Delta_k F + q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w) - \Delta_k w, \end{cases} \tag{24}$$

и

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_N^*}{\partial t^2} = -D\Delta^2 w_N^* + L(w_N^*, F_N^*) + \Delta_k F_N^* + q + \sum_{n>N}\alpha_n(t)\phi_n, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F_N^* = -\frac{1}{2}L(w_N^*, w_N^*) - \Delta_k w_N^* + \sum_{n>N}\beta_n(t)\phi_n, \end{cases} \tag{25}$$

где $\sum_{n>N}\alpha_n(t)\phi_n$ — разложение в ряд Фурье функции

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_N^*}{\partial t^2} - \left(-D\Delta^2 w_N^* + L(w_N^*, F_N^*) + \Delta_k F_N^* + q\right).$$

Вычтем из системы (24) систему равенств (25), тогда получим

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w-w_N^*) = -D\Delta^2(w-w_N^*) + (L(w,F) - L(w_N^*,F_N^*)) + \Delta_k(F-F_N^*)- \\ \qquad -\sum_{n>N}\alpha_n(t)\phi_n, \\ \frac{1}{E}\Delta^2(F-F_N^*) = -\frac{1}{2}(L(w,w) - L(w_N^*,w_N^*)) - \Delta_k(w-w_N^*) - \sum_{n>N}\beta_n(t)\phi_n, \end{cases} \tag{26}$$

Применим к системе (26) рассуждения, которые использовались в [5, гл. II, §2.2] при доказательстве сходимости метода последовательных нагружений в динамическом случае, а именно: умножим первое равенство системы (26) скалярно на функцию $\frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)$, продифференцируем второе равенство по переменной t и умножим скалярно на функцию $(F-F_N^*)$. Далее сложим полученные равенства. В результате имеем:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma}{2g}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{D}{2}\left\|\Delta(w-w_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2E}\left\|\Delta(F-\right.\right. \\ \left.\left.-F_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) = \left(L(w,F) - L(w_N^*,F_N^*), \frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)\right) - \\ \left(L(w,\frac{\partial}{\partial t}w) - L(w_N^*,\frac{\partial}{\partial t}w_N^*), F-F_N^*\right) + \\ + \left(\sum_{n>N}\gamma(t)\phi_n, F-F_N^*\right). \end{gathered} \tag{27}$$

Преобразуем равенство (27), воспользовавшись следующими тождествами:

$$\begin{gathered} L(w,F) = L(w_N^*,F_N^*) = L(F,w-w_N^*) + L(F-F_N^*,w_N^*), \\ L(w,\frac{\partial w}{\partial t}) - L(w_N^*,\frac{\partial w_N^*}{\partial t}) = L(w-w_N^*,\frac{\partial w}{\partial t}) - L(w_N^*,\frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)), \\ \left(L(F,w-w_N^*),\frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(L(F,w-w_N^*),w-w_N^*)- \\ -\frac{1}{2}\left(L(w-w_N^*,w-w_N^*),\frac{\partial}{\partial t}F\right). \end{gathered}$$

В результате приходим к следующему неравенству, имеющему место при любом $t \in [0;T]$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\gamma}{2g}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\left\|\Delta(w-w_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \right.\right. \\ \left.\left.-|(L(F,w-w_N^*),w-w_N^*)|\right) + \frac{1}{2E}\|\Delta(F-F_N^*)\|^2_{L_2(\Omega)}\right] \le \\ \le \frac{1}{2}\left|\left(L(w-w_N^*,w-w_N^*),\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right| + \left|\left(L(w-w_N^*,F-F_N^*),\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right| + \\ + \left|\left(\sum_{n>N}\gamma_n(t)\phi_n, F-F_N^*\right)\right|. \end{gathered}$$

Воспользуемся теперь известными фактами [12]:

$$|(f,\phi)| \le \|f\|_{L_1(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

и

$$\|L(u,v)\|_{L_1(\Omega)} \le c_1\|u\|_{H^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

где $H^2(\Omega)$ — пространство Соболева.

На основании этих фактов из последнего неравенства следует:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\gamma}{2g}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(w-w_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)}-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\left\|\Delta(w-w_N^*)\right\|^2_{L_2(\Omega)}-\right.\right.\\ \left.\left.-|(L(F,w-w_N^*),w-w_N^*)|\right)+\frac{1}{2E}\|\Delta(F-F_N^*)\|^2_{L_2(\Omega)}\right]\le\\ \le c_1\|w-w_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}\cdot\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+c_2\|w-w_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}\cdot\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\\ +c_2\|F-F_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}\cdot\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\left\|\sum_{n>N}\gamma_n(t)\phi_n\right\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|F-F_N^*\|_{H^2(\Omega)}.\end{gathered} \tag{28}$$

Далее, в силу того, что мы рассматриваем случай однозначности решения модельной задачи, оператор $D\Delta^2\bullet-L(F,\bullet)$ является положительно определённым в пространстве $H_2^0(\Omega)\subset L_2(\Omega)$. Тогда [5, гл. II, §2.2] имеем:

$$\frac{D}{2}\|\Delta(w-w_N^*)\|^2_{L_2(\Omega)}-|(L(F,w-w_N^*),w-w_N^*)|\ge c^3\|\Delta(w-w_N^*)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Известно, что для $V\in H_2^0(\Omega)$ нормы $\|\Delta V\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|\Delta V\|_{H^2(\Omega)}$ эквиваленты, поэтому из неравества (28) следует неравенство:

$$\begin{gathered}c_4\|\Delta(w-w_N^*)\|^2_{H^2(\Omega)}+c_5\|\Delta(F-F_N^*)\|^2_{H^2(\Omega)}\le\\ \le c_1\int_0^l\|w-w_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega)}dS+\\ +c_2\int_0^l\|w-w_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega)}dS+\\ +c_2\int_0^l\|F-F_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^\infty(\Omega)}dS+\\ +\int_0^l\left\|\sum_{n>N}\gamma_n(t)\phi_n\right\|_{L_2(\Omega)}\|F-F_N^*\|^2_{H^2(\Omega)}dS+\\ .\end{gathered} \tag{29}$$

В силу теоремы 1 функции w_N^*, F_N^* принадлежат области определения оператора Δ^{2r+2}. Отсюда в силу теоремы 2 порядок сходимости частичных сумм рядов Фурье для функций

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_N^*}{\partial t^2}-\left(-D\Delta^2 w_N^*+L(w_N^*,F_N^*)+\Delta_k F_N^*+q\right),$$

и

$$\frac{1}{E}\Delta^2F_N^*-\left(-\frac{1}{2}L(w_N^*,w_N^*)-\Delta_kF_N^*\right),$$

равен $O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right)$. Следовательно,

$$\left\|\sum_{n>N}\gamma_n(t)\phi_n\right\|=O\left(\frac{1}{N^{2r}}\right),\ \text{при } t\in[0;T]. \tag{30}$$

Из равеств (29) и (30) получаем, что при малых значениях t_1 для всех $t\in[0;t_1]$

$$\|w-w_N^*\|_{H^2(\Omega)}=O\left(\frac{1}{N^2r}\right),\ \|F-F_N^*\|_{H^2(\Omega)}=O\left(\frac{1}{N^2r}\right). \tag{31}$$

Из равенства (29) следует, что неравенство (31) имеет место на интервале $(0;t_3)$, в случае малости величины t_3-t_2. Таким образом (31) имеет место для всех $t\in[0;T]$.

Тем самым теорема доказана.

4. Замечание

В теореме 3 получена оценка скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина в случае, когда в качестве ортонормированной системы функций рассматриваются собственные функции оператора Δ^2. Можно показать, что аналогичные оценки имеют место в случае ортогональной системы функций, удовлетворяющих граничным условиям модельной задачи. Такую систему функций можно построить, когда граница области Ω является кусочно-алгебраической, т.е. $\sigma\Omega = \Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$, где Γ_i определена алгебраическими уравнениями $\mu_i(x, y) = 0$, $i = 1, \ldots, L$. Введём вспомогательную фукнцию

$$\gamma(x, y) = \prod_{i=1}^{L} \mu_i(x, y).$$

Затем определим систему функций

$$\mathcal{P} = \{p_{i,j}(x, y) : p_{i,j}(x, y) = \gamma^2(x, y) x^i y^j\}, \qquad i \in \mathbb{N}_+, \qquad j \in \mathbb{N}_+.$$

Система $\mathcal{P}$ является полной системой функций [13]. Проведём ортогонализацию и нормирование построенной таким образом системы функций $\mathcal{P}$, используя процесс Гильберта–Шмидта. Таким образом, получим полную ортонормированную систему функций, которую будем использовать для поиска требуемого решения в виде разложения по этой системе методом Бубнова–Галёркина.

В работах [14–19] был разработан численный алгоритм построения ортогональной системы функций, удовлетворяющих граничным условиям, отвечающим жесткому закреплению краёв оболочки для оболочек с кусочно-алгебраическими границами, приведены примеры численного расчёта напряжённо-деформированного состояния оболочек методом Бубнова–Галёркина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терёхин А. П. Полгруппы операторов и смешанные свойства элементов банахова пространства, Мат. заметки, 16:1 (1974), С. 107–115

2. Кузнецова Т. А. Отыскание полгруппы операторов целого экспотенциального типа на заданных подпространствах : дис. . . . к-та физ.-мат. наук. Саратов, 1980. 82 с.

3. Соболев В. И. О собственных элементах некоторых нелинейных операторов // ДАН, 1941, т.31, С. 734–736.

4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М. : Издательство технико-теоретической литературы, 1967.

5. Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций : дис. . . . д-ра техн. наук. Саратов, 2000.

6. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 118 с.

7. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. Операторные методы в нелинейной динамике // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 70–80.

8. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. и др. Операторный подход к задаче статической потери устойчивости оболочечных конструкций // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 59–70.

9. Кузнецов Т. А., Баев К. А., Чумакова С. В. Метод фиктивных областей в теории оболочечных конструкций и его численная реализация // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 4. С. 55–59.

10. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Чумакова С. В. О численной реализации метода последовательных нагружений при расчете геометрически нелинейных оболочек // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6. С. 27–43.

11. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 104 с.

12. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М. : Наука, 1966. — 280 с.

13. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. М. : Физматлит, 1962. — 710 с.

14. Бессонов Л. В. Численная реализация алгоритма спектрального критерия локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 7. С. 3–9.

15. Бессонов Л. В. Геометрические параметры и точки локальной потери устойчивости цилиндрической оболочки//Студенческая наука: перекрёстки теории и практики. Материалы I Внутривузовской научно-практической конференции студентов и аспирантов. Саратов. 2013. С. 20–23

16. Бессонов Л. В. Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т.15. вып.1. С. 74–79. DOI 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

17. Бессонов Л. В. Об операторном подходе при расчёте напряжённо-деформированного состояния оболочечных конструкций // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань. 2015. С. 467–469.

18. Бессонов Л. В. Численная реализация спектрального критерия определения точек локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), Москва, 2015. С. 223–225.

19. Bessonov L. V. Numerical Realization of The Method of Subsequent Parameters Perturbation for Calculating a Stress-Strain State of The Shell // Applied Mechanics and Materials. 2015. T. 799–800. C. 656–659.

REFERENCES

1. Terekhin A. P. Polgruppy operatorov i smeshannye svoistva elementov banakhova prostranstva, Mat. zametki, 16:1 (1974), S. 107–115

2. Kuznetsova T. A. Otyskanie polgruppy operatorov tselogo ekspotentsial'nogo tipa na zadannykh podprostranstvakh : dis. ... k-ta fiz.-mat. nauk. Saratov, 1980. 82 s.

3. Sobolev V. I. O sobstvennykh elementakh nekotorykh nelineinykh operatorov // DAN, 1941, t.31, S. 734–736.

4. Mikhlin S. G. Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike. M. : Izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1967.

5. Kuznetsov V. N. Metod posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov v prilozhenii k raschetu dinamicheskoi ustoichivosti tonkostennykh obolochechnykh konstruktsii : dis. … d-ra tekhn. nauk. Saratov, 2000.

6. Petrov V. V. Metod posledovatel'nykh nagruzhenii v nelineinoi teorii plastin i obolochek. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 1975. 118 s.

7. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. Operatornye metody v nelineinoi dinamike // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2003. Vyp. 1. S. 70–80.

8. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. i dr. Operatornyi podkhod k zadache staticheskoi poteri ustoichivosti obolochechnykh konstruktsii // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2003. Vyp. 1. S. 59–70.

9. Kuznetsov T. A., Baev K. A., Chumakova S. V. Metod fiktivnykh oblastei v teorii obolochechnykh konstruktsii i ego chislennaia realizatsiia // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2007. Vyp. 4. S. 55–59.

10. Kuznetsov V. N., Kuznetsova T. A., Chumakova S. V. O chislennoi realizatsii metoda posledovatel'nykh nagruzhenii pri raschete geometricheski nelineinykh obolochek // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2010. Vyp. 6. S. 27–43.

11. Lions Zh. L. Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach. M. : Mir, 1972. 104 s.

12. Mikhlin S. G. Chislennaia realizatsiia variatsionnykh metodov. M. : Nauka, 1966. — 280 s.

13. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Priblizhennye metody vysshego analiza. M. : Fizmatlit, 1962. — 710 s.

14. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia algoritma spektral'nogo kriteriia lokal'noi poteri ustoichivosti obolochechnoi konstruktsii // Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam : mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2012. Vyp. 7. S. 3–9.

15. Bessonov L. V. Geometricheskie parametry i tochki lokal'noi poteri ustoichivosti tsilindricheskoi obolochki//Studencheskaia nauka: perekrestki teorii i praktiki. Materialy I Vnutrivuzovskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i aspirantov. Saratov. 2013. S. 20–23

16. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia metoda posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov pri raschete napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia obolochechnoi konstruktsii v sluchae zhestkogo zakrepleniia kraev obolochki // Izv. Sarat. un-ta Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. T.15. vyp.1. S. 74–79. DOI 10.18500/1816-9791-2015-15-1-74-79

17. Bessonov L. V. Ob operatornom podkhode pri raschete napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia obolochechnykh konstruktsii // KhI Vserossiiskii s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki. Kazan'. 2015. S. 467–469.

18. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia spektral'nogo kriteriia opredeleniia tochek lokal'noi poteri ustoichivosti obolochechnoi konstruktsii // Materialy XIX Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnym sistemam (VMSPPS'2015), Moskva, 2015. S. 223–225.

19. Bessonov L. V. Numerical Realization of The Method of Subsequent Parameters Perturbation for Calculating a Stress-Strain State of The Shell // Applied Mechanics and Materials. 2015. T. 799–800. S. 656–659.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поступило 16.09.2016 г.
Принято в печать 12.12.2016 г.