ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 4.

УДК 512.533.52 + 512.579 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-65-78

ИНЪЕКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПОЛИГОНЫ НАД ВПОЛНЕ 0-ПРОСТОЙ ПОЛУГРУППОЙ

И. Б. Кожухов (г. Москва), А. О. Петриков (г. Москва)

Аннотация

Гомологическая теория колец и модулей является одним из важных направлений алгебры. Она позволила ответить на многие вопросы теории колец. Наряду с этим и под большим влиянием теории колец стала развиваться гомологическая теория универсальных алгебр и, в частности, полугрупп и полигонов над ними. В этой теории исследуются понятия инъективного и проективного полигонов над полугруппами, понятия инъективной оболочки и проективного накрытия. Как и в случае колец и модулей, инъективная оболочка существует у всякого полигона, а проективное накрытие не у всякого. В 1967 году П. Бертьём доказал существование инъективных оболочек произвольного полигона над полугруппой (без предположения о наличии в полугруппе единицы). Моноиды (т.е. полугруппы с единицей), над которыми любой полигон имеет проективное накрытие, изучал Дж. Исбелл. Гомологическую теорию моноидов развивал Л. А. Скорняков. Многие результаты этой теории вошли в известную монографию М. Кильпа, У. Кнауэра и А. В. Михалёва.

Для полугрупп сравнительно простого строения результаты гомологической теории могут быть существенно уточнены. Так, в 2012 году Г. Могаддаси описал инъективные полигоны и построил инъективные накрытия полигонов над полугруппой левых нулей в предположении сепарабельности полигона. И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина описали инъективные и проективные полигоны над группами и полугруппами правых нулей, построили инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этими полугруппами. Для полигонов над полугруппой левых нулей было снято условие сепарабельности полигонов.

Важным классом полугрупп, включающим в себя группы, полугруппы левых и правых нулей, прямоугольные связки, является класс вполне простых полугрупп, а также ещё более широкий класс вполне 0-простых полугрупп. В 2000 году А. Ю. Авдеев и И. Б. Кожухов описали все полигоны над вполне простыми и полигоны с нулём над вполне 0-простыми полугруппами. Это дало возможность дальнейшего исследования полигонов над этими полугруппами. И. Б. Кожухов и А. О. Петриков описали инъективные и проективные полигоны над вполне простыми полугруппами, тем самым обобщив результаты работ И. Б. Кожухова и А. Р. Халиуллиной, а также работы Г. Могаддаси. Были построены также инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этими полугруппами.

В данной работе вышеупомянутые результаты о полигонах над вполне простыми полугруппами обобщаются на полигоны с нулём над вполне 0-простыми полугруппами. А именно, находятся необходимые и достаточные условия инъективности и проективности полигона с нулём над произвольной вполне 0-простой полугруппой, строятся инъективные оболочки и проективные накрытия произвольных полигонов с нулём над этими полугруппами. В частности, оказывается, что проективный полигон над произвольной вполне 0-простой полугруппой – это в точности 0-копроизведение свободного полигона и полигонов, изоморфных 0-минимальному правому идеалу полугруппы (рассматриваемому как правый полигон).

Ключевые слова: полигон над полугруппой, инъективный полигон, проективный полигон, вполне 0-простая полугруппа, инъективная оболочка, проективное накрытие.

Библиография: 15 названий.

INJECTIVE AND PROJECTIVE ACTS OVER A COMPLETELY 0-SIMPLE SEMIGROUP

I. B. Kozhukhov (Moscow), A. O. Petrikov (Moscow)

Аннотация

The homological theory of rings and modules is an important branch of algebra. It provided answers to numerous questions of the theory of rings. Along with the homological theory, another theory started to develop, also under significant influence of the theory of rings, which is the homological theory of universal algebras, and, in particular, of semigroups and acts over them. This theory analyses such notions as injective and projective acts over semigroups, injective hulls and projective covers. As in the case of rings and modules, the injective hull exists for every act, while the projective cover sometimes does not. In 1967 P. Berthiaume proved the existence of injective hulls of an arbitrary act over a semigroup (without the assumption of the presence of an identity in the semigroup). J. Isbell studied monoids (i.e. semigroups with an identity) over which every act has a projective cover. L. A. Skornyakov developed a homological theory of monoids. Many results of that theory were mentioned in the known monograph by M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev.

For semigroups of a relatively simple structure the results of the homological theory can be significantly refined. For example, in 2012 G. Moghaddasi described injective acts and built injective hulls of acts over a left zero semigroup assuming the separability of the act. I. B. Kozhukhov and A. P. Haliullina described injective and projective acts over groups and right zero semigroups, built injective hulls and projective covers of acts over such semigroups. For acts over a left zero semigroup the condition of separability of acts was removed.

An important class of semigroups containing groups, left and right zero semigroups, rectangular bands is the class of completely simple semigroups, as well as the broader class of completely 0-simple semigroups. In 2000 A. Yu. Avdeyev and I. B. Kozhukhov described all acts over completely simple semigroups and acts with zero over completely 0-simple semigroups. It triggered further reasearch of acts over such semigroups. I. B. Kozhuhov and A. O. Petrikov described injective and projective acts over completely simple semigroups, thereby generalising the results of I. B. Kozhuhov and A. R. Khaliullina, and also the work of G. Mogaddasi. They built injective hulls and projective covers of acts over such semigroups.

In this paper the above-mentioned results concerning acts over completely simple semigroups were generalized to acts with zero over completely 0-simple semigroups. In particular, the necessary and sufficient conditions of injectivity and projectivity of an act with zero over an arbitrary completely 0-simple semigroup were found, injective hulls and projective covers of arbitrary acts with zero over such semigroups were built. It was established that a projective act over an arbitrary completely 0-simple semigroup is exactly a 0-coproduct of a free act and acts isomorphic to a 0-minimal right ideal of the semigroup (considered as a right act).

Key words: Act over semigroup, injective act, projective act, completely 0-simple semigroups, injective hull, projective cover.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Гомологическая теория – важное направление общей алгебры, а в теории колец и модулей она занимает одно из центральных мест. Под большим влиянием теории колец и модулей создавалась гомологическая теория полугрупп и полигонов над ними. Целый спектр вопросов этой теории освещён в статье [1] и монографии [2].

Инъективности и проективности полигонов над полугруппами посвящены главы III и IV уже упоминавшейся монографии [2]. Бертьём в [3] доказал существование инъективных оболочек произвольного полигона над полугруппой (без предположении о наличии в полугруппе единицы). Проективное накрытие, как и в случае модулей над кольцами, существует не у всякого полигона. Моноиды, над которыми любой полигон имеет проективное накрытие, изучал Исбелл (см. [2, гл. III, теорема 17.26]). Для полугрупп сравнительно простого строения могут быть описаны все инъективные и проективные полигоны над ними, а также построены инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов. В работах [4] и [5] Могаддаси описал инъективные полигоны (в предположении сепарабельности полигона) и построил проективные накрытия полигонов над полугруппой левых нулей. В работе [6] были построены инъективные оболочки полигонов над полурешётками групп. В [7], [8], [9], [10] И. Б. Кожухов и А. Р. Халиуллина описали инъективные и проективные полигоны над группами и полугруппами правых нулей, построили инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этими полугруппами. Для полигонов над полугруппой левых нулей было снято поставленное в [5] условие сепарабельности полигонов. Следует отметить, что основным средством для исследований в [9] послужило полученное в [11] описание полигонов над вполне простыми и вполне 0-простыми полугруппами. В работе [12] результаты из [9] были обобщены на полигоны над вполне простыми полугруппами.

Также отметим, что полигон над полугруппой является алгебраическим выражением автомата [13].

Для полугруппы S с нулём естественно рассматривать полигоны X с нулём такие, что $0s = x0 = 0$ при всех $s \in S$, $x \in X$. Цель настоящей работы — описать инъективные и проективные полигоны с нулём над вполне 0-простой полугруппой $\mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, построить инъективные оболочки и проективные накрытия произвольных полигонов с нулём над этой полугруппой.

2. Основные понятия. Предварительные результаты

Полигоном над полугруппой S (или S-полигоном) называется множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, s, $t \in S$. Полигон над полугруппой является алгебраическим выражением понятия автомата (см. [14]). При этом X — множество состояний автомата, а S — полугруппа входных сигналов. Кроме того, полигон над полугруппой — это унарная алгебра; операциями являются умножения на элементы полугруппы. Понятие подполигона, гомоморфизма и другие понятия универсальной алгебра имеют в нашей работе обычный смысл.

Вполне 0-простая полугруппа S — это полугруппа с нулём, идеалами которой являются лишь $\{0\}$ и S, имеющая ненулевой примитивный идемпотент (т.е. минимальный относительно естественного порядка на множестве идемпотентов: $e \le f \Leftrightarrow ef = fe = e$). Хорошо известная теорема Сушкевича — Риса утверждает (см. [15, теорема 3.5]), что вполне 0-простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ над группой с нулем G^0 с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda\in\Lambda, i\in I}$, где $p_{\lambda i} \in G^0$, причём в каждой строке и в каждом столбце матрицы P обязаны присутствовать ненулевые элементы (см. [15, гл. 3]).

Полигон X над полугруппой S называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $\alpha : M \to N$ полигонов над S и любого гомоморфизма $\varphi : M \to X$ существует гомоморфизм ψ такой, что $\alpha\psi = \varphi$ (см. рис. 1; мы здесь и далее умножаем отображения слева направо).

Полигон X *проективен* (см. рис. 2), если для любого сюръективного гомоморфизма $\alpha : M \to N$ S-полигонов и гомоморфизма $\varphi : X \to N$, существует гомоморфизм $\psi : X \to M$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$.

Инъективной оболочкой полигона X называется минимальный инъективный полигон, содержащий X. *Проективное накрытие* полигона X — это проективный полигон $P(X)$ такой, что существует сюръективный гомоморфизм $P(X) \xrightarrow{\beta} X$, но для любого собственного подпо-

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & N \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Рис. 1: Инъективный полигон

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] & & N \\ & X \arrow[ul, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 2: Проективный полигон

лигона $P_1 \subset P(X)$ ограничение $\beta|_{P_1}$ не является сюръективным.

Отметим, что в данной работе рассматриваются лишь полигоны с нулём над полугруппой с нулём, поэтому в только что приведённых определениях все полигоны являются полигонами с нулём. Нетрудно видеть, что гомоморфизмы таких полигонов переводят нуль в нуль.

Пусть G — группа, H — её подгруппа, не обязательно нормальная. Через G/H мы будем обозначать множество правых смежных классов Hg, где $g \in G$. Нетрудно проверить, что Hg является полигоном над G относительно действия $Hg \cdot g' = Hgg'$. Оказывается, G/H — это общий вид любого унитарного циклического полигона над группой G. Впрочем, этот факт нам далее не понадобится.

Пусть S — полугруппа с нулём и X — полигон с нулём над S. Будем говорить, что X является 0-копроизведением своих подполигонов X_i $(i \in I)$, если $X = \bigcup\{X_i | i \in I\}$, и $X_i \cap X_j = \{0\}$ при $i \neq j$. Этот факт мы будем записывать так: $X = \coprod\limits_{i \in I}^0 X_i$.

Приведём теорему из [11], описывающую все полигоны с нулем над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$.

Теорема 1. *[11, теорема 4]. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, — вполне 0-простая полугруппа, X — множество, содержащее элемент 0, $Q^0 = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma} (G/H_\gamma) \sqcup \{0\}$ (G — группа, $(H_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — семейство её подгрупп). Пусть для каждого $i \in I$ задано отображение $\pi_i : X \to Q^0$, а для каждого $\lambda \in \Lambda$ — отображение $\kappa_\lambda : Q^0 \to X$, причём $0\pi_i = 0$, $0\kappa_\lambda = 0$, $q\kappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ при $q \in Q^0$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Положим $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda$, $x \cdot 0 = 0$ для всех $x \in X$. Тогда X будет являться полигоном с нулём над полугруппой S и наоборот, всякий полигон с нулём над S изоморфен полигону, построенному таким способом.*

Рассмотрим произвольный полигон X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Для $\gamma \in \Gamma$ положим $Q_\gamma = (G/H_\gamma) \cup \{0\}$. Тогда, очевидно, $Q^0 = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma} Q_\gamma$. Для $q \in Q^0$ положим $X_q = \{q\kappa_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, для $\gamma \in \Gamma$ полагаем $X^{(\gamma)} = \bigcup\{X_q | q \in Q_\gamma\}$.

Лемма 1. *$X^{(\gamma)}$ — подполигон полигона X.*

Доказательство. Пусть $x \in X^{(\gamma)}$, $s \in S$. Если $s = 0$, то $xs = 0 \in X^{(\gamma)}$. Пусть $s = (g)_{i\lambda}$. Так как $x \in X^{(\gamma)}$, то $x = q\kappa_\mu$ при некоторых $q \in Q_\gamma$, $\mu \in \Lambda$. Имеем: $xs = q\kappa_\mu \cdot (g)_{i\lambda} = (q\kappa_\mu\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (q \cdot p_{\mu i} \cdot g)\kappa_\lambda \subseteq Q_\gamma\kappa_\lambda \subseteq X^{(\gamma)}$. □

Лемма 2. *$X^{(\alpha)} \cap X^{(\beta)} = \{0\}$ при $\alpha \neq \beta$.*

Доказательство. Пусть $x \in X^{(\alpha)} \cap X^{(\beta)}$. Тогда $x = q_1\kappa_\mu = q_2\kappa_\nu$ при некоторых $q_1 \in Q_\alpha$, $q_2 \in Q_\beta$, μ, $\nu \in \Lambda$. Умножив на такое π_i, что $p_{\mu i} \neq 0$, получим: $q_1\kappa_\mu\pi_i = q_2\kappa_\nu\pi_i$, т.е. $q_1 \cdot p_{\mu i} = q_2 \cdot p_{\nu i}$. Отсюда $q_1 = q_2 p_{\nu i} p_{\mu i}^{-1} \in Q_\beta$. Следовательно, $q_1 \in Q_\alpha \cap Q_\beta = \{0\}$, а значит, $x = q_1\kappa_\mu = 0$. $\square$

Лемма 3. $XS = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 X^{(\gamma)}$.

Доказательство. Ввиду леммы 2 достаточно доказать, что $XS = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X^{(\gamma)}$. Пусть $x \in XS$. Если $x = 0$, то $x \in X^{(\gamma)}$ при всех γ. Пусть $x \neq 0$. Тогда $x = x' \cdot (g)_{i\lambda}$ при некоторых $x' \in X$, $(g)_{i\lambda} \in S \setminus \{0\}$. Имеем: $x = (x'\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda \in Q^0\kappa_\lambda \subseteq X^{(\gamma)}$, если $x'\pi_i \in Q_\gamma$. Наоборот, пусть $x \in X^{(\gamma)}$. Тогда $x = q\kappa_\lambda$ при некоторых $q \in Q^{(\gamma)}$, $\lambda \in \Lambda$. Найдём $i \in I$ такое, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда $x \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1})\kappa_\lambda = (q\kappa_\lambda\pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1})\kappa_\lambda = (q \cdot p_{\lambda i} \cdot p_{\lambda i}^{-1})\kappa_\lambda = q\kappa_\lambda = x$, т.е. $x \in XS$. $\square$

Лемма 4. $zS = X^{(\gamma)}$ *для всех* $z \in X^{(\gamma)} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $zS \subseteq X^{(\gamma)}$. Пусть $z' \in X^{(\gamma)}$. Если $z' = 0$, то $z' \in zS$. Пусть $z' \neq 0$. Имеем: $z = q_1\kappa_\lambda$, $z' = q_2\kappa_m u$ при некоторых q_1, $q_2 \in Q_\gamma \setminus \{0\}$, λ, $\mu \in \Lambda$. Тогда $q_1 = q_2 \cdot g$ при некотором $g \in G$. Нам осталось доказать разрешимость уравнения $z' \cdot (h)_{j\nu} = z$ относительно h, j, ν. Преобразуем это уравнение: $q_2\kappa_m u \cdot (h_{j\nu}) = q_1\kappa_\lambda$, или $(q_2\kappa_\mu\pi_j \cdot h)\kappa_\nu = (q_2 \cdot g)\kappa_\lambda$, или $(q_2\kappa_\mu\pi_j \cdot h)\kappa_\nu = (q_2 \cdot g)\kappa_\lambda$. Возьмём любое $j \in I$, для которого $p_{\mu j} \neq 0$, положим $\nu = \lambda$, $g = p_{\mu j}h$. Тогда требуемое равенство выполняется. $\square$

Из лемм 3 и 4 мы получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Положим $A = X \setminus XS$. Тогда $X = A \cup \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 x_\gamma S$, причём $x_\gamma \in x_\gamma S$ при всех $\gamma \in \Gamma$ и $xS = x_\gamma S$ при $x \in x_\gamma S \setminus \{0\}$.*

3. Инъективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой

В дальнейшем всюду S будет обозначать вполне 0-простую полугруппу $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, а X — полигон с нулём над S. Для элемента $x \in X$ определим отображение $\omega_x : I \to Q^0$ формулой $i\omega_x = x\pi_i$.

Теорема 2. *Полигон X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ является инъективным в том и только том случае, если для любого отображения $\omega : I \to Q^0$ существует элемент $x \in X$ такой, что $\omega = \omega_x$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\omega : I \to Q^0$ — произвольное отображение. Добавим к полигону X элемент b и определим умножение его на элементы из S следующим образом: $b \cdot 0 = 0$, $b \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda$. Проверим, что тогда множество $X \cup \{b\}$ будет S-полигоном. Действительно,

$$(b\cdot(g)_{i\lambda})\cdot(h)_{j\mu} = (i\omega\cdot g)\kappa_\lambda\cdot(h)_{j\mu} = ((i\omega\cdot g)\kappa_\lambda\pi_j\cdot h)\kappa_\mu = (i\omega\cdot g\cdot p_{\lambda j}\cdot h)\kappa_\mu = b\cdot(gp_{\lambda j}h)_{i\mu} = b\cdot((g)_{i_\lambda}\cdot(h)_{j\mu}).$$

Естественное вложение $\alpha : X \to X \cup \{b\}$, очевидно, является инъективным гомоморфизмом полигонов. Так как X инъективен, то существует гомоморфизм $\varphi : X \cup \{b\} \to X$ такой, что $\alpha\psi = 1_X$. Пусть $x = b\psi$. Возьмём любое $i \in I$ и подберём $\lambda \in \Lambda$ так, чтобы $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда для любого $g \in G$ будем иметь $b \cdot (g)_{i\lambda} \in X$, поэтому $(b \cdot (g)_{i\lambda})\psi = b \cdot (g)_{i\lambda}$. Отсюда получаем: $(i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = b \cdot (g)_{i\lambda} = (b \cdot (g)_{i\lambda})\psi = b\psi \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega_x \cdot g)\kappa_\lambda$. Так как κ_λ инъективно, то $i\omega \cdot g = i\omega_x \cdot g$, а значит, $i\omega = i\omega_x$. Ввиду произвольности элемента i получаем: $\omega = \omega_x$.

Достаточность. Очевидно, достаточно доказать, что для любого полигона T' и его подполигона $T \subseteq T'$ всякий гомоморфизм $\varphi : T \to X$ продолжается до гомоморфизма $\varphi' : T' \to X$. Полигон T представим в виде $T' = B' \cup \coprod\limits_{\delta\in\Delta}^{0} U^{(\delta)}$, где $B = T\setminus TS$, а T' в виде $T' = B' \cup \coprod\limits_{\delta'\in\Delta'}^{0} U'^{(\delta')}$, где $B' = T'\setminus T'S$. При этом $uS = U^{(\delta)}$ для любого $u \in U^{(\delta)}\setminus\{0\}$ и $u'S = U'^{(\delta')}$ при $u' \in U'^{(\delta')}\setminus\{0\}$. Кроме того, $u \in uS$, $u' \in u'S$. Если $U^{(\delta)} \cap U'^{(\delta')} \neq 0$ для каких-либо $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta'$, то $U^{(\delta)} = U'^{(\delta')}$, так как $U^{(\delta)} = uS = U'^{(\delta')}$ для $u \in (U^{(\delta)} \cap U'^{(\delta')}) \setminus \{0\}$. Следовательно, мы можем считать, что $\Delta \subseteq \Delta'$ и $T' = B' \cup (\coprod\limits_{\delta\in\Delta}^{0} U^{(\delta)} \sqcup^{0} \coprod\limits_{\delta'\in\Delta'\setminus\Delta}^{0} U^{(\delta')})$.

Напомним, что $\coprod\limits_{\delta\in\Delta}^{0} U^{(\delta)} = TS$, $\coprod\limits_{\delta'\in\Delta'}^{0} U^{(\delta')} = T'S$. Докажем, что $B \subseteq B'$. Пусть $b \in B$, но $b \notin B'$. Тогда $b \in T'S$. Следовательно, $b = \omega s$ при некоторых $\omega \in T'$, $s \in S$. Если $b \in TS$, то $b \notin B$ — противоречие. Следовательно, $b \in T'S \setminus TS$. Так как $0 \in TS$, то $b \neq 0$, поэтому $s \neq 0$. Это влечёт существование элемента $s' \in S$ такого, что $ss' = s$. Отсюда получаем: $b = \omega s = \omega ss' = bs' \in TS$ — противоречие.

Определим гомоморфизм $\varphi' : T' \to X$, продолжающий φ. Пусть $y \in T'$. Если $y \in T$, то полагаем $y\varphi' = y\varphi$. Пусть $y \in T' \setminus T$. Если $y \in T'S \setminus TS$, то полагаем $y\varphi' = 0$. Таким образом, $y\varphi' = y\varphi$ при $y \in \coprod\limits_{\delta\in\Delta}^{0} U^{(\delta)}$ и $y\varphi' = 0$ при $y \in \coprod\limits_{\delta'\in\Delta'\setminus\Delta}^{0} U^{(\delta')}$. Осталось определить $y\varphi'$ для $y \in B'\setminus B$.

Зафиксируем элемент $y \in B' \setminus B$ и построим по нему отображение $\omega : I \to Q^0$. Возьмём $i \in I$. Найдём λ такое, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Рассмотрим произведение $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Если $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \notin T$, то полагаем $i\omega = 0$. Если $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \in T$, то положим $i\omega = u\varphi\pi_i$. Проверим корректность определения $i\omega$, т.е. независимость от выбора λ. Пусть $p_{\mu i} \neq 0$. Тогда $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}$ и $(p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$, поэтому $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in T \Leftrightarrow y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \in T$. Пусть $y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = u \in T$, $y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = v \in T$. Тогда

$$\begin{aligned} v\varphi\pi_i &= (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi\pi_i = (y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi\pi_i = ((y \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\pi_i = \\ &= (u\varphi \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\pi_i = (u\varphi\pi_i \cdot p_{\mu i}^{-1})\kappa_\mu\pi_i = u\varphi\pi_i \cdot p_{\mu i}^{-1} \cdot p_{\mu i} = u\varphi\pi_i. \end{aligned}$$

Отображение $\omega : I \to Q^0$ построено.

По условию для этого отображения ω найдется элемент $x \in X$ такой, что $\omega = \omega_x$. Положим $y\varphi' = x$.

Проверим, что $\varphi' : T' \to X$ — гомоморфизм. Пусть $y \in T'$, $s \in S$. Если $y \in T$, то также $ys \in T$, и мы получаем: $(ys)\varphi' = (ys)\varphi = y\varphi \cdot s = y'\varphi \cdot s$. Пусть $y \in T' \setminus T$. При $s = 0$ равенство $(ys)\varphi' = y\varphi' \cdot s$ очевидно, поэтому будем считать, что $s = (g)_{i\lambda}$. Найдем μ, для которого $p_{\mu i} \neq 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $y \in T'S$. Так как $y \notin T$, то $y \notin TS$, поэтому $y \in U^{(\delta')}$ при некотором $\delta' \in \Delta' \setminus \Delta$. Но в этом случае также $ys \in U^{(\delta')}$, а значит, $y\varphi' = (ys)\varphi' = 0$. Отсюда $(ys)\varphi' = y\varphi' \cdot s$.

Осталось рассмотреть случай, когда $y \notin T'S$. Тогда $y \in B' \setminus B$. Ранее мы доказывали, что для этого y можно построить отображение $\omega : I \to Q^0$ и при некотором $x \in X$ мы будем иметь $\omega = \omega_x$; кроме того, $y\psi' = x$, $y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = u \in T$ и $u\varphi\pi_i = i\omega$.

Если $u \in T$, то также $y \cdot (g)_{i\lambda} = y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (g)_{i\lambda} \in T$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} (y \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' &= (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}) \cdot (g)_{i\lambda})\varphi = (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}\varphi) \cdot (g)_{i\lambda} = u\varphi \cdot (g)_{i\lambda} = \\ &= (u\varphi\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega_x \cdot g)\kappa_\lambda = x \cdot (g)_{i\lambda} = y\varphi' \cdot (g)_{i\lambda}. \end{aligned}$$

Наконец, пусть $u \notin T$. Тогда $u \in T'S \setminus TS$, а значит, $u \in U^{(\delta')}$ при некотором $\delta' \in \Delta' \setminus \Delta$. Но в этом случае также $us \in U^{(\delta')}$. Следовательно, $u\varphi' = (us)\varphi' = 0$, откуда

$$(y \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (us)\varphi' = 0$$

и

$$y\varphi' \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_{\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega_x \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = 0,$$

так как $i\omega = 0$ ввиду того, что $y \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \notin T$. $\square$

Теперь построим инъективную оболочку произвольного полигона с нулём над вполне 0-простой полугруппой.

Теорема 3. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Представим X в виде $X = A \cup AS \cup \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^{0} z_\gamma S$. Для каждого $x \in X$ определим отображение $\omega_x : I \to Q^0$ по правилу $i\omega_x = x\pi_i$. Пусть Ω – множество отображений $\omega : I \to Q^0$ таких, что $\omega \neq \omega_x$ ни при каком $x \in X$. Для каждого $\omega \in \Omega$ добавим к полигону X элемент a_ω и определим действие на него элементов полугруппы S следующим образом: $a_\omega \cdot 0 = 0$, $a_\omega \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda$. Тогда $E(X) = X \cup \{a_\omega | \omega \in \Omega\}$ является полигоном с нулём над полугруппой S и $E(X)$ — инъективная оболочка полигона X.*

Доказательство. Очевидно ввиду теоремы 2. $\square$

Замечание 1. *Теоремы 2 и 3 аналогичны теоремам 6 и 7 из [12], однако, для вполне 0-простых полугрупп рассуждения более сложные.*

4. Проективные полигоны над вполне 0-простой полугруппой

Следующее утверждение является аналогом предложения 17.1 из [2], фактически перенося утверждение с обычных полигонов на полигоны с нулём.

Лемма 5. *0-копроизведение $X = \coprod\limits_{i\in I}^{0} X_i$ полигонов с нулём над полугруппой с нулём S является проективным полигоном в том и только том случае, если все X_i проективны.*

Доказательство. Определим отображения $\xi_i : X_i \to X$, $\eta_i : X \to X_i$, полагая $x\xi_i = x$, $x\eta_i = \begin{cases} x, & \text{если } x \in X_i \\ 0, & \text{если } x \notin X_i \end{cases}$. Очевидно, ξ_i и η_i — гомоморфизмы полигонов, причём $\xi_i\eta_i = 1_{X_i}$ при всех $i \in X$. Поэтому, если X проективен, то все X_i проективны.

Осталось доказать обратное утверждение: что если все X_i проективны, то X проективен. Пусть $\alpha : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм полигонов с нулём A, B над полугруппой S и $\varphi : X \to B$ — произвольный гомоморфизм (см. рис. 3).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] & & B \\
& X \arrow[ul, dotted, "\psi"'] \arrow[ur, "\varphi"'] & \\
X_i \arrow[uu, "\psi_i"] \arrow[ur, "\xi_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3: Проективные полигоны X_i

Требуется найти гомоморфизм $\psi : X \to A$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$. Так как каждое X_i является проективным полигоном, то существует гомоморфизм $\psi_i : X_i \to A$ такой, что $\psi_i\alpha = \xi_i\varphi$. Положим теперь $x\psi = x\psi_i$ при $x \in X_i$. Так как $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$, то мы действительно получим отображение $\psi : X \to A$. Проверим, что ψ — гомоморфизм. Пусть $s \in S$, $x \in X$. Если $x = 0$, то равенство $(xs)\psi = x\psi \cdot s$ очевидно. Пусть $x \neq 0$. Тогда $x \in X_i \setminus \{0\}$ при некотором $i \in I$. Кроме того, $xs \in X_i$, поэтому $(xs)\psi = (xs)\psi_i = x\psi_i = x\psi_i \cdot s = x\psi \cdot s$. Осталось проверить, что $\psi\alpha = \varphi$. Пусть $x \in X$. Тогда $x \in X_i$ при некотором $i \in I$, и мы имеем $x\psi\alpha = x\psi_i\alpha = x\xi_i\varphi = x\varphi$, то есть $\psi\alpha = \varphi$. □

Для дальнейшего нам понадобится ещё одно представление произвольного полигона с нулем над полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$.

Предложение 2. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = (XS \setminus AS) \cup \{0\}$. Тогда:*

(i) $A \cup AS$ — подполигон;

(ii) Z — подполигон, причем $Z = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 z_\gamma S$ для некоторых $z_\gamma \in Z \setminus \{0\}$;

(iii) $X = (A \cup AS) \sqcup^0 \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 z_\gamma S$.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно. Пусть $z \in Z$, $s \in S$. Если $zs = 0$, то $zs \in Z$. Пусть теперь $zs \neq 0$. Тогда $z \neq 0$, поэтому $z \in XS \setminus AS$. Если $zs \in AS$, то $zs = at$ при некоторых $a \in A$, $t \in S$. Так как $z \in XS$, то $z = xu$, при некотором $u \in S$. Так как $xus = zs \neq 0$, то $us \neq 0$, поэтому u и us лежат в одном $\mathcal{R}$-классе полугруппы S. Следовательно, $uss' = u$ при некотором $s'S$. Отсюда получаем: $z = xu = xuss' = zss' = ats' \in AS$, что противоречит выбору элемента z. Таким образом, $zs \in XS \setminus AS$, а значит, Z — подполигон.

Введём на множестве $Z \setminus \{0\} = XS \setminus AS$ отношение $\sim$, полагая $z \sim z' \Leftrightarrow z' \in zS$. Проверим, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Пусть $z' = zs$. Так как $z \in XS$, то $z = xt$ при некоторых $x \in X$, $t \in S$. Имеем: $z' = zs = xts$, следовательно, $ts \neq 0$, а значит, $tss' = t$ при некотором $s' \in S$. Это влечет, что $z's' = zss' = xtss' = xt = z$. Тем самым доказана симметричность отношения $\sim$. Далее, так как $t \in S$, то $tt' = t$ при некотором $t' \in S$. Отсюда $zt' = xtt' = xt = z$, что доказывает рефлективность отношения $\sim$. Транзитивность этого отношения очевидна. Таким образом, $\sim$ — отношение эквивалентности.

Так как $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве $XS \setminus AS$, то это множество разбивается на классы эквивалентности: $XS \setminus AS = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma$. Выберем в каждом классе K_γ по одному представителю z_γ. Тогда получим: $z_\gamma S = K_\gamma \cup \{0\}$. Отсюда видно, что $Z = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 z_\gamma S$. Тем самым доказано (ii). Наконец, так как $Z \cap (A \cup AS) = \{0\}$, то мы имеем разложение $X = (A \cup AS) \sqcup^0 Z$, откуда следует (iii). □

Для полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и $i \in I$ положим $R_i = \{0\} \cup \{(g)_{i\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, R_i — правый идеал полугруппы S и одновременно правый S-модуль с нулем.

Напомним, что правый идеал R полугруппы S с нулём называется 0-простым, если он не содержит правых идеалов, отличных от 0 и R. Полигон Y с нулём над полугруппой S с нулём называется 0-простым, если он не содержит подполигонов, отличных от 0 и Y.

Очевидно, R_i — 0-простой правый идеал полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ и одновременно 0-простой подполигон полигона S_S. Кроме того, $rS = R_i$ для любого $r \in R_i \setminus \{0\}$. Также ясно, что имеет место разложение полигона S_S в 0-копроизведение полигонов: $S = \coprod\limits_{i\in I}^0 R_i$.

Лемма 6. *Для полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ имеет место изоморфизм S-полигонов: $R_i \cong R_j$ при любых i, $j \in I$.*

Доказательство. Возьмем какое-либо $\lambda \in \Lambda$ и положим $u_i = (e)_{i\lambda}$, $u_j = (e)_{j\lambda}$. Тогда $u_iS = R_i$, $u_jS = R_j$. Определим отображение $\varphi : R_i \to R_j$ по формуле $(u_is)\varphi = u_js$ $(s \in S)$. Докажем корректность этого определения. Очевидно, $(u_i, u_j) \in \mathcal{L}$, поэтому $u_i = t_1u_j$, $u_j = t_2u_i$

при некоторых t_1, $t_2 \in S$. Отсюда видно, что $u_i s = u_i t \Leftrightarrow u_j s = u_j t$ при всех s, $t \in S$. Это доказывает, что φ определено корректно и является взаимно однозначным отображением R_i на R_j. Нетрудно проверить, что φ — гомоморфизм S-полигонов. Следовательно, $R_i \cong R_j$. $\square$

Замечание 2. *Как полугруппы R_i и R_j могут не быть изоморфны. Необходимое и достаточное условие их изоморфизма дает следующее утверждение.*

Предложение 3. *Полугруппы R_i и R_j изоморфны в том и только том случае, если выполнено условие $|\{\lambda|p_{\lambda i} \neq 0\}| = |\{\lambda|p_{\lambda j} \neq 0\}|$.*

Доказательство. Хорошо известно, что идемпотенты полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ — это в точности элементы вида $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$ для $p_{\lambda i} \neq 0$. Таким образом, множество $\Lambda_i = \{\lambda|p_{\lambda i} \neq 0\}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством идемпотентов полугруппы R_i.

Докажем *необходимость* условия предложения. Если полугруппы R_i и R_j изоморфны, то мощность множества идемпотентов у них одна и та же. Следовательно, $|\Lambda_i| = |\Lambda_j|$.

Теперь докажем *достаточность*. Пусть $|\Lambda_i| = |\Lambda_j|$. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ такое, что $\Lambda_i \varphi = \Lambda_j$. Построим отображение $\Phi : R_i \to R_j$, полагая $0\Phi = 0$, $(g)_{i\lambda}\Phi = (gp_{\lambda i}p_{\lambda\varphi,j}^{-1})_{j,\lambda\varphi}$ при $p_{\lambda i} \neq 0$, $(g)_{i\lambda}\Phi = (g)_{j,\lambda\varphi}$ при $p_{\lambda i} = 0$. Нетрудно проверить, что Φ — изоморфизм полугрупп R_i и R_j. $\square$

Лемма 7. $R_i = \{0\} \cup \{(g)_{i\lambda}|g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ — *проективный полигон над полугруппой* $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$.

Доказательство. Найдём элемент $r \in R$ такой, что $r = r^2 \neq 0$. Тогда $R_i = rS$. Пусть $\alpha : M \to N$ — сюръективный гомоморфизм S-полигонов и $\varphi : R_i \to N$ — произвольный гомоморфизм. Пусть $r\varphi = n$. Так как α сюръективно, то $m\alpha = n$ при некотором $m \in M$. Определим отображение $\psi : R_i \to M$ по правилу $(rs)\psi = mrs$. Очевидно, ψ определено корректно и является гомоморфизмом. Имеем: $(rs)\psi\alpha = (mrs)\alpha = m\alpha \cdot rs = n \cdot rs = r\varphi \cdot rs = (r \cdot rs)\varphi = (rs)\varphi$. Следовательно, $\psi\alpha = \varphi$. Таким образом, R_i проективен. $\square$

Лемма 8. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \backslash XS$ и $z \in XS \backslash AS$. Полигон zS проективен в том и только том случае, если для любых $i \in I$, λ, $\mu \in \Lambda$, g, $h \in G$ имеет место импликация $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \Rightarrow g = h \wedge \lambda = \mu$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть zS проективен. Так как $z \in XS$, то $z = xt$ при некотором $t \in S$. Далее, существует $r \in S$ такое, что $tr = t$. Отсюда $zr = z$. Следовательно, $r \neq 0$. Очевидно, $r \in R_i \setminus \{0\}$ при некотором $i \in I$, а значит, $R_i = rS$. Построим отображение $\varphi : R_i \to zS$ по правилу $(rs)\varphi = zs$. Это правило корректно, так как, если $rs = r'$, то $zrs = zrs'$, т.е. $zs = zs'$. Очевидно, φ — гомоморфизм. Так как полигон zS проективен, то существует гомоморфизм ψ такой, что $\psi\varphi = 1_{zS}$. Отсюда видно, что ψ инъективен.

Пусть $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0$. Так как ψ инъективен, то $(z \cdot (g)_{i\lambda})\psi = (z \cdot (h)_{i\mu})\psi \neq 0$. Если $z\psi = ru$, то мы имеем $ru \cdot (g)_{i\lambda} = ru \cdot (h)_{i\mu} \neq 0$. Так как $ru \neq 0$, то $ru = (c)_{k\nu}$ при некоторых $c \in G$, $k \in I$, $\nu \in \Lambda$. Но $(c)_{k\nu} \cdot (g)_{i\lambda} = (c)_{k\nu} \cdot (h)_{i\mu} \neq 0$ влечёт равенства $g = h$, $\lambda = \mu$.

Достаточность. Пусть выполнена импликация $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \Rightarrow g = h \wedge \lambda = \mu$. Так как $z \in XS \setminus AS$, то $z = xt$ при некоторых $x \in X$, $t \in S$. Так как $z \notin AS$, то $z \neq 0$, а значит, $t \neq 0$. Поэтому $tt' = t$ при некотором $t' \in S \setminus \{0\}$. Имеем: $zt' = xtt' = xt = z$. Так как $t' \neq 0$, то $t' = (c)_{k\nu}$ при некоторых $c \in G$, $k \in I$, $\nu \in \Lambda$. Итак, $z \cdot (c)_{k\nu} = z$.

Построим отображение $\varphi : R_k \to zS$, полагая $((c)_{k\nu}s)\varphi = zs$ при $s \in S$. Если $(c)_{k\nu}s = (c)_{k\nu}t$ при каких-либо s, $t \in S$, то $(c)_{k\nu}s = (c)_{k\nu}t$, т.е. $zs = zt$, что доказывает корректность определения φ. То, что φ — гомоморфизм, очевидно. Докажем, что φ взаимно однозначно. Нам достаточно доказать лишь инъективность отображения φ. Пусть $zs = zt \neq 0$. Тогда $z(c)_{k\nu}s = z(c)_{k\nu}t \neq 0$. Это означает, что $(c)_{k\nu}s$, $(c)_{k\nu} \in R_k \setminus \{0\}$. То есть $(c)_{k\nu}s = (g)_{k\lambda}$,

$(c)_{k\nu}t = (h)_{k\mu}$. Имеем: $z \cdot (g)_{k\lambda} = z \cdot (h)_{k\mu} \neq 0$. Отсюда по условию леммы $g = h$, $\lambda = \mu$. Таким образом, $(c)_{k\nu}s = (c)_{k\nu}t$. Пусть $zs = 0$. Если $(c)_{k\nu}s \neq 0$, то $(c)_{k\nu}s \in R_k \setminus \{0\}$. Тогда $(c)_{k\nu}ss' = (c)_{k\nu}$ при некотором $s' \in S$, и мы получим: $z = z(c)_{k\nu} = z(c)_{k\nu}ss' = zss' = 0$ — противоречие. Таким образом, $(c)_{k\nu}s \neq 0$. Мы доказали, что ψ инъективно. Следовательно, ψ — изоморфизм. Мы имеем: $zS \cong R_k$ (как S-полигоны). По лемме 7 R_k — проективный полигон. Следовательно, полигон zS также проективен. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 4. *Пусть X — полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = (XS \setminus AS) \cup \{0\}$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются условия:*

(i) для любых a, $b \in A$ и s, $t \in S$ имеет место импликация

$$as = bt \Rightarrow ((s = t = 0) \vee (a = b) \wedge (s = t));$$

(ii) для любого $z \in Z \setminus \{0\}$ любых $i \in I$, λ, $\mu \in \Lambda$, g, $h \in G$ имеет место импликация

$$z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \neq 0 \Rightarrow ((g = h) \wedge (\lambda = \mu)).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть X проективен. Тогда, согласно предложению 2 (iii) и лемме 5 полигон $A \cup AS$ также проективен. Возьмем какое-либо множество U, находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством A. Можно считать, что $U = \{u_a | a \in A\}$ и соответствие $a \mapsto u_a$ взаимно однозначно. Пусть $F(U)$ — свободный полигон с нулём с множеством свободных образующих U, т.е. $F(U)$ — множество формальных выражений вида u_a, $u_a s$, 0 (где $u_a \in U$, $s \in S \setminus \{0\}$). Отображение $u_a \mapsto a$ для $a \in A$ продолжается до гомоморфизма $\alpha : F(U) \to A \cup AS$. Так как $A \cup AS$ — проективный полигон и α — сюръективный гомоморфизм, то существует гомоморфизм $\psi : A \cup AS$ такой, что $\psi\alpha = 1_{A \cup AS}$ (см. рис. 4). Имеем: $a\psi\alpha = a$ для любого $a \in A$. Так как $a \notin XS$, то $a\psi \notin F(U)S$. Это означает, что $a\psi \in U$.

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[rr, "\alpha"] & & A \cup AS \\
& A \cup AS \arrow[ul, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "1_{A \cup AS}"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 4: Проективный полигон $A \cup AS$

То есть $a\psi = u_{a\xi}$ для некоторого отображения $\xi : A \to A$. Так как отображение ψ инъективно, то ξ также инъективно. Пусть $as = bt$ для некоторых a, $b \in A$, s, $t \in S$. Тогда $(as)\psi = (bt)\psi$, а значит, $u_{a\xi}s = u_{b\xi}t$. Так как $F(U)$ — свободный полигон с нулём, то такое равенство возможно лишь в следующих случаях: а) $s = t = 0$, б) $s = t \neq 0$, $a\xi = b\xi$. В случае б) получаем ввиду инъективности ξ, что $a = b$. Тем самым доказано (i).

Лемма 5 и предложение 2 показывают, что Z — проективный модуль, а так как $Z = \coprod^0_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma S$, то $z_\gamma S$ также проективны. Пусть $z \in Z \setminus \{0\}$. Тогда $z \in z_\gamma S \setminus \{0\}$ при некотором γ. Нетрудно видеть, что тогда $zS = z_\gamma S$. Таким образом, полигон zS — проективный. По лемме 8 мы получаем теперь условие (ii).

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия (i) и (ii). Условие (i) показывает, что полигон $A \cup AS$ является свободным полигоном с нулём с множеством свободных образующих

A. Каждое $z_\gamma S$ является проективным S-полигоном ввиду (ii) и леммы 8. По лемме 5 мы получаем теперь, что X — проективный полигон. $\square$

Следствие 1. *Полигон с нулём X над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ проективен в том и только том случае, если X изоморфен 0-копроизведению свободного полигона и полигонов R_i. (При этом количество свободных образующих и количество полигонов R_i в 0-копроизведении могут быть рапвны 0).*

Только что доказанная теорема 4 является обобщением теоремы 13 из [12], в которой описаны проективные полигоны (не обязательно имеющие нуль) над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Вначале установим связь между проективностью полигонов над полугруппами и полигонов с нулём над полугруппами с нулём. Пусть X — полигон над полугруппой S. (Полугруппа S произвольная, необязательно вполне простая или вполне 0-простая). Положим $X^0 = X \cup \{0\}$, $S^0 = S \cup \{0\}$ и потребуем выполнения равенств $x \cdot 0 = 0 \cdot s = 0 \cdot 0 = 0$ ($x \in X$, $s \in S$). Тогда X^0 будет полигоном с нулём над полугруппой с нулём S^0.

Лемма 9. *Полигон X над полугруппой S проективен в том и только том случае, если полигон с нулём X^0 над полугруппой с нулём S^0 является проективным.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что X проективен. Пусть M, N — полигоны с нулём над полугруппой S^0, $\alpha : M \to N$ — сюръективный гомоморфизм и $\varphi : X^0 \to N$ — произвольный гомоморфизм (см. рис. 5).

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] & & N \\ & X^0 \arrow[ul, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 5: Проективный полигон X^0

Надо найти $\psi : X^0 \to M$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$. Пусть $\varphi' = \varphi|_X$. Полигоны с нулём M и N будем рассматривать как полигоны над S. Так как X проективен, то существует гомоморфизм $\psi' : X \to M$ такой, что $\psi'\alpha = \varphi'$. Продолжим гомоморфизм $\psi' : X \to M$ до гомоморфизма $\psi : X^0 \to M$, полагая $0\psi = 0$. Тогда получим, что ψ — гомоморфизм полигонов с нулём и $\psi\alpha = \varphi$. Следовательно, X^0 проективен.

Достаточность. Предположим, что X^0 проективен. Пусть M, N — полигоны над S, $\alpha : M \to N$ — сюръективный гомоморфизм и $\varphi : X \to N$ — произвольный гомоморфизм. Для полигонов с нулём рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\alpha^0 : M^0 \to N^0$ и гомоморфизм $\varphi^0 : X^0 \to N^0$ (считаем, что $0\alpha^0 = 0\varphi^0 = 0$). Так как X^0 — проективный полигон с нулём, то существует гомоморфизм $\psi^0 : X^0 \to M^0$ полигонов с нулём такой, что $\psi^0\alpha^0 = \varphi^0$. Пусть $\psi = \psi^0|_X$ — ограничение ψ^0 на X. Проверим, что $X\psi$ не содержит 0 полигона M^0. Действительно, если $x \neq 0$ и $x\psi^0 = 0$, то $x\varphi^0 = x\psi^0\alpha^0 = 0$, что невозможно. Таким образом, ψ является гомоморфизмом $X \to M$, и мы имеем $\psi\alpha = \varphi$. Это доказывает проективность полигона X. $\square$

Теперь теорема 13 из [12] может рассматриваться как следствие теоремы 4 и леммы 9 настоящей работы.

Теорема 5. *([12], теорема 13). Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus AS$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются условия:*

(i) для любых a, $b \in A$ и s, $t \in S$ имеет место импликация $as = bt \Rightarrow a = b \wedge s = t$;

(ii) для любых $z \in Z$, $i \in I$, g, $h \in G$, λ, $\mu \in \Lambda$ имеет место импликация

$$z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu} \Rightarrow g = h \wedge \lambda = \mu.$$

В заключение построим проективное накрытие произвольного полигона X с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Пусть X — такой полигон. Ранее мы видели, что $X = (A \cup AS) \sqcup^0 \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 z_\gamma S$, где $z_\gamma \in XS \setminus AS$. Пусть $U = \{u_a | a \in A\}$ — множество, находящееся во взаимно однозначном соответствии $a \mapsto u_a$ с множеством A. Обозначим через $F(U)$ свободный полигон с нулём над S, т.е. множество формальных выражений вида u_a, $u_a s$ $(a \in A,\ s \in S \setminus \{0\})$, 0. Напомним, что $R_i = \{(g)_{i\lambda} | g \in G, \lambda \in \Lambda\}$ для $i \in I$.

Теорема 6. *Пусть X — произвольный полигон с нулём над вполне 0-простой полугруппой $S = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, P)$. Тогда полигон $P(X) = F(U) \sqcup^0 \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma}^0 R_i$ вместе с гомоморфизмом $u_a s \mapsto as$ ($s \in S^1$, где $S^1 = S \cup \{1\}$), $r_\gamma s \mapsto z_\gamma s$ ($s \in S$, $r_\gamma \in R_i$ — такой элемент, что $z_\gamma r_\gamma = z_\gamma$) задают проективное накрытие полигона X.*

Доказательство. Тот факт, что полигон $P(X)$ проективен, показывает следствие из теоремы 4. Найдём элементы r_γ. Возьмём элемент z_γ. Используя условие $z_\gamma \in XS$, мы ранее показывали, что $z_\gamma \cdot s = z_\gamma$ при некотором $s \in S \setminus \{0\}$. Пусть $s = (g)_{j\lambda}$. Найдём такое $i \in I$, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда $(g)_{j\lambda} \cdot (p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda} = (g)_{j\lambda}$, поэтому $z_\gamma \cdot (p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda} = z_\gamma$. Полагаем $r_\gamma = (p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda}$. Отображение $\beta : P(X) \to X$ теперь выглядит так: $0\beta = 0$, $(u_a s)\beta = as$ $(s \in S^1)$, $r_\gamma s = z_\gamma s$ $(s \in S)$. Докажем корректность определения отображения β. Пусть $r_\gamma s = r_\gamma t$. Тогда $z_\gamma \cdot r_\gamma s = z_\gamma \cdot r_\gamma t$, а значит, $z_\gamma s = z_\gamma t$. Тот факт, что β — гомоморфизм, проверяется непосредственно. Осталось проверить, что β — минимальный сюръективный гомоморфизм. Пусть P_1 — подполигон полигона $P(X)$ и $P_1 \neq P(X)$. Если $U \nsubseteq P_1$, то при некотором $a \in A$ мы имеем $u_a \notin P_1$. Проверим, что тогда $a \notin P_1\beta$. Действительно, если $a = y\beta$ при некотором $y \in P_1$, то так как $a \notin XS$, то $y \notin P(X)S$, поэтому $y = u_b$ при некотором $b \in A$. Таким образом, $a = u_b\beta = b$. Следовательно, $y = u_a$, т.е. $u_a \in P_1$ — противоречие. Нами доказано, что $U \subseteq P_1$.

Возьмём любое $\gamma \in \Gamma$. Так как $\beta|_{P_1}$ сюръективно, то $z_\gamma = y\beta$ при некотором $y \in (R_i)_\gamma \cap P_1$; здесь $(R_i)_\gamma$ — экземпляр полигона R_i, который имеет номер γ $(\gamma \in \Gamma)$. Имеем: $y = r_\gamma s$ при некотором $s \in S$. Так как $z_\gamma \neq 0$, то $y \neq 0$, поэтому $ys' = r_\gamma$ при подходящем $s' \in S$. Таким образом, $r_\gamma \in P_1 s' \subseteq P_1$. Итак, $r_\gamma S \subseteq P_1$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Ранее мы видели, что $U \subseteq P_1$, а значит, $U \cup US \subseteq P_1$. В результате получаем $P(X) \subseteq P_1$. Это противоречит тому, что P_1 — собственный подполигон полигона $P(X)$. $\square$

5. Заключение

В данной работе получено полное описание инъективных и проективных полигонов с нулём над вполне 0-простой полугруппой, построены инъективные оболочки и проективные накрытия произвольных полигонов с нулём над вполне 0-простой полугруппой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скорняков Л. А. Гомологическая классификация моноидов // Сиб. мат. журн., 1969. Т. 10, No. 5. С. 1139–1143.

2. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories // Berlin: Walter de Gruyter, 2000. 529 p.

3. Berthiaume P. The injective envelope of S-sets // Canad. Math. Bull., 1967. Vol. 10. P. 261-273.

4. Ebrahimi M., Mahmoudi M., Moghaddasi Gh. Injective hulls of acts over left zero semigroups // Semigroup Forum, 2007. Vol. 75, No. 1. P. 212-220.

5. Moghaddasi Gh. On injective and subdirectly irreducibleS-acts over left zero semigroups // Turk J. Math., 2012. Vol. 36. P. 359-365.

6. Kim J. P. Injective hulls of S-systems over a Clifford semigroup / J. P. Kim, Y. S. Park // Semigroup Forum, 1991. Vol. 43. No. 1. P. 19—24.

7. Халиуллина А. Р. Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей. // Чебыш. сборник, 2013. Т. 13., Вып. 4. С. 142-146.

8. Халиуллина А. Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей // Дальневост. матем. журн., 2015. Т. 15., No. 1. С. 102-120.

9. Кожухов И. Б., Халиуллина А.Р. Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами // Электронные информационные системы, 2014. Т. 2., No. 2. С. 45-56.

10. Кожухов И. Б, Халиуллина А.Р. О решётках конгруэнций полигонов над прямоугольными связками // Сб. научн. трудов МИЭТ, посв. 70-летию А.С. Поспелова. М., МИЭТ, 2016. Т. 2., No. 2. С. 75-82.

11. Avdeyev A. Yu, Kozhukhov I.B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica, 2000. V. 14., No. 4. С. 523-531.

12. Кожухов И. Б Петриков А.О. Инъективность и проективность полигонов над вполне простыми полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика (в печати).

13. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. // М.: Мир, 1985. 439 с.

14. Плоткин Б. И, Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов // Москва: Высш. шк., 1994. 192 с.

15. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп // Москва: Мир, 1972. Т. 1, 2.

REFERENCES

1. Skornyakov, L. A. 1969, "A homological classification of monoids" , Syberian mat. zhurnal, vol. 10, no. 5, pp. 1139–1143.

2. Kilp, M., Knauer, U. & Mikhalev, A. V. 2000, "Monoids, acts and categories" , Berlin, Walter de Gruyter, 529 pp.

3. Berthiaume, P. 1967, "The injective envelope of S-sets" , Canad. Math. Bull., vol. 10, pp. 261-273.

4. Ebrahimi, M., Mahmoudi, M. M. & Moghaddasi A. Gh. 2007 "Injective hulls of acts over left zero semigroups" , Semigroup Forum, vol. 75, no. 1, pp. 212-220.

5. Moghaddasi, Gh. 2012, "On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups" , Turk J. Math., vol. 36, pp. 359-365.

6. Kim, J. P. & Park, Y. S. 1991, "Injective Hulls of S-systems over a Clifford Semigroup" , Semigroup Forum, vol. 43, no. 1, pp. 19—24.

7. Haliullina, A. R. 2013, "Congruences of acts over right zero semigroups", Chebysh. sbornik, vol. 13, issue 4, pp. 142-146.

8. Khaliullina, A. R. 2015, "Conditions of the modularity of the lattice of a congruence act over a left and right zero semigroup", Dalnevostochniy mat. zhurnal, vol. 15, no. 1 pp. 102-120.

9. Kozhuhov, I.B. & Haliullina, A. R. 2014, "Injectivity and projectivity acts over singular semigroups", Elektronnye informatsionnye sistemy (Electronic Information Systems), vol. 2, no. 2, pp. 45-56.

10. Kozhukhov, I.B. & Haliullina, A. R. 2016, "Considering lattices of congruences of acts over rectangular bands", Sbornik naychnih trudov MIET, posvyashenniy 70-letiyu A. S. Pospelova, Moscow , vol. 2, no. 2, pp. 75-82.

11. Avdeyev, A. Yu. & Kozhukhov, I. B. 2000, "Acts over completely 0-simple semigroups", Acta Cybernetica, vol. 14, no. 4, pp. 523-531.

12. Kozhukhov, I.B. & Petrikov, A.O. 2016, "Injectivity and projectivity of acts over completely simple semigroups", Fundamentalnaya i prikladnaya matemetika (Fundamental and Applied Mathematics), (in publishing).

13. Lalleman, G. 1985, "Semigroups and combinatorial applications", Moscow, Mir, pp. 439.

14. Plotkin, B. I., Gringlaz, L. Ya. & Gvaramiya, A. A. 1994, "Elements of an algebraic theory of automata", Moscow, Vysshaya shkola, 192 pp.

15. Clifford, A. & Preston, G. 1972, "The Algebraic Theory of Semigroups", Moscow, Mir, vol. 1, pp. 283.

Национальный исследовательский университет "МИЭТ"

Поступило 06.10.2016 г.
Принято в печать 12.12.2016 г.