ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 4

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-51-56

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ Н. П. РОМАНОВА ЕГО АДДИТИВНОЙ ТЕОРЕМЫ И ЕЕ АНАЛОГАХ[1]

А. Н. Васильев (г. Астана)

Аннотация

В работе описывается техника, придуманная Н. П. Романовым для доказательства его теоремы о том, что нижняя асимптотическая плотность суммы множества простых и множества степеней фиксированного натурального числа положительна, которая также позволяет заменить в этой теореме второе множество другим — с похожими распределением и арифметикой. Описываются условия на второе множество, достаточные для получения аналога теоремы, и приводится пример множества с похожим распределением, но с другой арифметикой, для которого эти достаточные условия не выполняются. Доказывается, что для указанного множества аналог теоремы Романова неверен.

Ключевые слова: теорема Романова, сумма множеств, тригонометрические суммы.

Библиография: 9 названий.

ROMANOFF ADDITIVE THEOREM'S PROOF AND ITS ANALOGUES

A. N. Vassilyev (Astana)

Abstract

In paper we describe the way N. P. Romanoff proved his additive theorem and sufficient conditions to obtain its analogues for sets with similar distribution and arithmetic. Also the example of set with similar distribution but with different arithmetic is given. We prove that the Romanoff theorem's analogue for this set is incorrect.

Keywords: Romanoff theorem, sumset, exponential sums.

Bibliography: 9 titles.

1. Введение

Рассмотрим возрастающую последовательность натуральных чисел $(u_m)_{m=1}^{\infty}$, у которой функция распределения $U(x) = \#\{m : u_m \leqslant x\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)}{\log x} = A > 0. \tag{1}$$

Условие возрастания можно, без ущерба для дальнейших выкладок, заменить на более слабое, но для удобства изложения мы его оставим. Согласно асимптотическому закону, $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ при $x \to \infty$. Через p будем обозначать произвольное простое число. Тогда

[1]Работа автора поддержана грантом ГФ4-0816 Комитета науки МОН РК "Проблемы теории приближений и смежные вопросы".

$\#\{(p, u_m) : p \leqslant \frac{x}{2}, u_m \leqslant \frac{x}{2}\} \gg x$ (здесь и далее x — достаточно большое вещественное число), откуда для количества представлений $r(n) = r(n; (u_m)_{m=1}^{\infty}) = \#\{(p, u_m) : n = p + u_m\}$ следует соотношение

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) \gg x. \tag{2}$$

В 1934 г. появилась статья Н. П. Романова [1], в которой была разработана техника, позволившая для широкого класса последовательностей получить теоремы о положительной нижней асимптотической плотности суммы $\mathcal{P} + \mathcal{U}$, где $\mathcal{P}$ — множество простых чисел, а $\mathcal{U}$ — множество всех членов последовательности $(u_m)_{m=1}^{\infty}$, т. е. результаты типа

$$\sum_{n \leqslant x} sgn(r(n)) \gg x. \tag{3}$$

Последовательностью, которую рассматривал сам Романов, была $u_m = a^m$, где $a \geqslant 2$ — фиксированное натуральное число. Ключевым моментом его доказательства было получение оценки

$$\sum_{n \leqslant x} r^2(n) \ll x, \tag{4}$$

откуда, согласно неравенству Коши–Буняковского–Шварца, с учетом (2) немедленно следует требуемое:

$$\sum_{n \leqslant x} sgn(r(n)) \geqslant \left(\sum_{n \leqslant x} r(n)\right)^2 \left(\sum_{n \leqslant x} r^2(n)\right)^{-1} \gg x.$$

В свою очередь, оценка (4) в его подходе базируется на следующем результате, который доказывается методами решета [2]: для четного ненулевого числа b справедливо соотношение

$$\#\{p : p \leqslant x, |p + b| \in \mathcal{P}\} \ll \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p|b} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_i(k; d) = \alpha_i(k; d; (u_m)_{m=1}^{\infty}) = \frac{1}{k} \#\{m : u_m \equiv i \pmod{d}, m \leqslant k\},$$

$$h(x) = h(x; (u_m)_{m=1}^{\infty}) = \sum_{d \leqslant x} \left(\frac{\mu^2(d)}{d} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\alpha_i(U(x); d; (u_m)_{m=1}^{\infty})\right)^2\right).$$

Сформулируем теперь утверждение (похожая теорема в явном виде имеется в [3]), следующее из выкладок доказательства Романова, которое позволяет получать аналоги его теоремы для различных последовательностей:

Теорема. *Если для последовательности $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ с функцией распределения, удовлетворяющей (1), справедливо соотношение*

$$h(x; (u_m)_{m=1}^{\infty}) \ll 1, \tag{5}$$

то для нее выполняется аналог теоремы Романова, а именно, оценка (3).

В 1951 г. П. Эрдеш [4] заменил в теореме Романова $u_m = a^m$ на $u_m = f(a^m)$, где f — многочлен с целыми коэффициентами. Позже, уже в 2010 г. К. С. Э. Ли [5] был получен ее аналог для последовательности Фибоначчи (автором [6] было представлено другое доказательство этого факта), а в 2013 г. вышли статьи К. Балло и Ф. Лучи [7], а также А. Дубицкаса [3], содержащие ее обобщения для случая линейной рекурренты (в [3] порядок рекурренты был равен двум). Все эти результаты опирались на описанный выше подход Романова. Создается впечатление, что условие (1) является определяющим. Однако, это не так. Источник таких аналогов — похожая арифметика указанных последовательностей, в частности, тот факт, что они периодичны по произвольному модулю (разумеется, одного этого наблюдения недостаточно). Благодаря этому для всех этих последовательностей справедливо условие (5).

2. Последовательность центральных биномиальных коэффициентов

Здесь будет приведен пример последовательности, для которой выполняется условие (1), но не выполняются условия (3) и (5). Действительно, рассмотрим последовательность центральных биномиальных коэффициентов:

$$u_m = \binom{2m}{m}.$$

По формуле Стирлинга имеем: $\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$ при $m \to \infty$, поэтому условие (1) выполнено. Но, как показывает следующая лемма (похожая на нее по содержанию имеется в [8]), эта последовательность непериодична по простому модулю, причем имеет место заметная асимметрия в распределении остатков ее членов по простому модулю.

Лемма. *Пусть p — нечетное простое число, $u_m = \binom{2m}{m}$ и $t = \lfloor \frac{\log k}{\log p} \rfloor$. Тогда*

$$\alpha_0\left(k; p; (u_m)_{m=1}^{\infty}\right) \geqslant 1 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right)^t.$$

В частности, если $p \leqslant \sqrt{k}$, то

$$\alpha_0\left(k; p; (u_m)_{m=1}^{\infty}\right) \geqslant \frac{1}{9}.$$

Замечание. *Из леммы вытекает оценка снизу для среднего квадратического тригонометрических сумм по центральным биномиальным коэффициентам при $p \leqslant \sqrt{k}$:*

$$\sqrt{\frac{1}{p}\sum_{a=1}^{p} \Big| \sum_{m=1}^{k} e^{2\pi i \frac{a u_m}{p}} \Big|^2} \geqslant \frac{k}{9}$$

Доказательство. Любое натуральное число $1 \leqslant m \leqslant k$ имеет запись $\overline{a_t a_{t-1} \ldots a_0}$ в p-ичной системе счисления (первые несколько цифр могут быть нулями). По теореме Куммера [9], показатель степени p в разложении $\binom{2m}{m}$ равен количеству переносов при сложении в p-ичной системе счисления числа m с самим собой. Поэтому $p \nmid \binom{2m}{m}$ тогда, и только тогда, когда все $a_i \leqslant \frac{p-1}{2}$. Также ясно, что $a_t \leqslant \frac{k}{p^t}$. Отсюда следует, что чисел $1 \leqslant m \leqslant k$, для которых $p \nmid \binom{2m}{m}$, не более

$$\left(1 + \frac{k}{p^t}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)^t \leqslant 2k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right)^t.$$

Таким образом,

$$\alpha_0\left(k; p; (u_m)_{m=1}^{\infty}\right) \geqslant 1 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right)^t.$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем теорему о невыполнении достаточного условия (5) для нашей последовательности.

Теорема 1. *Для последовательности центральных биномиальных коэффициентов* $u_m = \binom{2m}{m}$ *выполняется условие (1), но не выполняется условие (5), а именно,*

$$h\left(x; (u_m)_{m=1}^{\infty}\right) \gg \log\log\log x.$$

Доказательство. Применяя лемму, получаем:

$$h\left(x\right) = \sum_{d \leqslant x} \left(\frac{\mu^2\left(d\right)}{d} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\alpha_i\left(U\left(x\right); d\right)\right)^2 \right) \geqslant \sum_{3 \leqslant p \leqslant \sqrt{U(x)}} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\alpha_i\left(U\left(x\right); p\right)\right)^2 \right)$$

$$\geqslant \sum_{3 \leqslant p \leqslant \sqrt{U(x)}} \left(\frac{1}{p} \left(\alpha_0\left(U\left(x\right); p\right)\right)^2 \right) \geqslant \frac{1}{81} \sum_{3 \leqslant p \leqslant \sqrt{U(x)}} \frac{1}{p} \gg \log\log\sqrt{U\left(x\right)} \gg \log\log\log x,$$

что и требовалось.

В следующей теореме показывается, что для последовательности центральных биномиальных коэффициентов аналог теоремы Романова неверен.

Теорема 2. *Для последовательности* $u_m = \binom{2m}{m}$ *при* $x \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{n \leqslant x} sgn\left(r\left(n; (u_m)_{m=1}^{\infty}\right)\right) = o\left(x\right).$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть p_i — i-ое по счету простое число, s — некоторое натуральное число. Введем обозначения:

$$\nu_1 = \#\{n : n \leqslant x, n = p + u_m, p \leqslant p_s\},$$

$$\nu_2 = \#\{n : n \leqslant x, n = p + u_m, p > p_s, (p_1 p_2 ... p_s) \mid u_m\},$$

$$\nu_2 = \#\{n : n \leqslant x, n = p + u_m, p > p_s, (p_1 p_2 ... p_s) \nmid u_m\}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n \leqslant x} sgn\left(r\left(n; (u_m)_{m=1}^{\infty}\right)\right) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3.$$

Так как $u_m \geqslant 2^m$, то

$$\nu_1 \leqslant \frac{s}{\log 2} \log x.$$

Ясно, что среди любых $p_1 p_2 ... p_s$ последовательных натуральных чисел существует не более $\varphi\left(p_1 p_2 ... p_s\right)$ чисел n, представимых в виде $n = p + u_m$, где $p > p_s$ и $(p_1 p_2 ... p_s) \mid u_m$, поскольку каждое такое n взаимно просто с $p_1 p_2 ... p_s$. Отсюда

$$\nu_2 \leqslant x \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) + p_1 p_2 ... p_s.$$

Введем новое обозначение:

$$\nu_{3,i} = \#\{n : n \leqslant x, n = p + u_m, p > p_s, p_i \nmid u_m\}.$$

Тогда

$$\nu_3 \leqslant \sum_{i=1}^{s} \nu_{3,i}.$$

Все центральные биномиальные коэффициенты четны, поэтому $\nu_{3,1} = 0$. Для $2 \leqslant i \leqslant s$, согласно лемме, индексов $m \leqslant U(x)$, для которых $p_i \nmid u_m$, не более

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2p_i}\right)^{\left\lfloor\frac{\log U(x)}{\log p_i}\right\rfloor} U(x) \leqslant 2\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\log U(x)}{\log p_i}-1} U(x) =$$
$$= \frac{8}{3}(U(x))^{1-\frac{\log\frac{4}{3}}{\log p_i}} \leqslant \frac{8}{3}(U(x))^{1-\frac{\log\frac{4}{3}}{\log p_s}} \leqslant \frac{8}{3\log 2}(\log x)^{1-\frac{\log\frac{4}{3}}{\log p_s}}.$$

Поскольку при достаточно больших x ($x \geqslant x_0$) справедлива оценка $\pi(x) \leqslant 2\frac{x}{\log x}$, для $2 \leqslant i \leqslant s$ получаем: $\nu_{3,i} \leqslant \frac{16}{3\log 2}x(\log x)^{-\frac{\log\frac{4}{3}}{\log p_s}}$. Отсюда

$$\nu_3 \leqslant \frac{16}{3\log 2}(s-1)\,x(\log x)^{-\frac{\log\frac{4}{3}}{\log p_s}}.$$

Выберем теперь $s = s(\varepsilon)$ таким образом, чтобы

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_s}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Это можно сделать, поскольку соответствующее бесконечное произведение, как известно, расходится к нулю. Далее возьмем такое $X(\varepsilon) > x_0$, чтобы при $x > X(\varepsilon)$ одновременно выполнялись следующие неравенства:

$$\frac{s}{\log 2}\log x \leqslant \frac{\varepsilon}{4}x,$$
$$p_1 p_2 ... p_s \leqslant \frac{\varepsilon}{4}x,$$
$$\frac{16}{3\log 2}(s-1)(\log x)^{-\frac{\log\frac{4}{3}}{\log p_s}} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда при $x > X(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\sum_{n\leqslant x} sgn\left(r\left(n;(u_m)_{m=1}^{\infty}\right)\right) = \nu_1+\nu_2+\nu_3 \leqslant \varepsilon x.$$

Теорема доказана.

3. Заключение

Используя полученные в статье результаты, нетрудно показать, что последовательность, полученная объединением последовательности степеней двойки и последовательности центральных биномиальных коэффициентов в одну, удовлетворяет условию (3), но не удовлетворяет условию (5), что означает, что достаточное условие (5) не является необходимым.

В заключение, автор благодарит академика РАН Конягина С. В. за очень плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов Н. П. О двух теоремах аддитивной теории чисел // Матем. сб. Т.40 №4, 1933. С.514–520.

2. Brun, V. ‘Le crible d’Eratosthene et le theoreme de Goldbach // C. R. Acad. Sci. Paris., Vol. 168, 1919 pp. 544–546.

3. Dubickas, A. Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences // Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol. 29, pp. 2251–2260.

4. Erdos, P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff // J. Chinese Math 1951 pp. 409–421.

5. Enoch Lee, K. S. On the sum of a prime and a Fibonacci number // Int. J. Number Theory, Vol. 6, 2010 pp. 1669–1676.

6. Vasil'ev A. N. Rational trigonometric sums for fibonacci sequences and an analogue of romanoff's theorem // Doklady Mathematics. 2014. Vol. 89, no. 3. P. 349–350.

7. Ballot, C., Luca, F. On the sumset of the primes and a linear recurrence // Acta Arithmetica, Vol. 161, 2013 pp. 33–46.

8. Pomerance, C. Divisors of the Middle Binomial Coefficient // American Mathematical Monthly, Vol. 122, 2015 pp. 636–644.

9. Kummer E. Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen // Journal für die reine und angewandte Mathemati, Vol. 44, 1852 pp. 93–146.

REFERENCES

1. Romanoff, N. P. 1934, „Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie", *Math. Ann.*, Vol. 57, pp. 668–678.

2. Brun, V. 1919, „Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach" *C. R. Acad. Sci. Paris.*, Vol. 168, pp. 544–546.

3. Dubickas, A. 2013, „Sums of Primes and Quadratic Linear Recurrence Sequences", *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Vol. 29, pp. 2251–2260.

4. Erdös, P. 1951, „On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff", *J. Chinese Math. Soc.*, pp. 409–421.

5. Enoch Lee, K. S. 2010, „On the sum of a prime and a Fibonacci number", *Int. J. Number Theory*, Vol. 6, pp. 1669–1676.

6. Vasil'ev, A. N. 2014, „Rational trigonometric sums for Fibonacci sequences and an analogue of Romanoff's theorem", *Doklady Mathematics*, Vol. 89, pp. 349–350.

7. Ballot, C., Luca, F. 2013, „On the sumset of the primes and a linear recurrence", *Acta Arithmetica*, Vol. 161, pp. 33–46.

8. Pomerance, C. 2015, „Divisors of the Middle Binomial Coefficient", *American Mathematical Monthly*, Vol. 122, pp. 636–644.

9. Kummer E. 1852, „Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 44, pp. 93–146.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал

Получено 15.05.2016 г.
Принято в печать 12.12.2016 г.