ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 4

УДК 519.4 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-23-50

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ В ГРУППАХ КОКСТЕРА[1]

В. Н. Безверхний (г. Москва), Н. Б. Безверхняя (г. Москва),
И. В. Добрынина (г. Тула), О. В. Инченко (г. Тула), А. Е. Устян (г. Тула)

Аннотация

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп, поставленными М. Дэном, являются проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Среди работ, связанных с исследованием проблем М. Дэна, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблем равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также неразрешимость проблемы изоморфизма групп. В связи с этим основные алгоритмические проблемы и их различные обобщения изучаются в определенных классах групп.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером: всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера, а всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

В алгебраическом аспекте группы Кокстера изучаются с работ Ж. Титса, которым решена проблема равенства слов в произвольных группах Кокстера.

В данной статье рассматриваются известные результаты, полученные в решении алгоритмических проблем в группах Кокстера, основной же целью работы является анализ результатов по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученных членами Тульской алгебраической школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп" под руководством В. Н. Безверхнего. Дан обзор утверждений и теорем, доказанных авторами статьи для различных классов групп Кокстера: групп Кокстера большого и экстрабольшого типов, групп Кокстера с древесной структурой, групп Кокстера с n-угольной структурой.

Приводятся основные подходы и методы доказательства, среди которых метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним, в части, введения R-сокращений, специальных R-сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод типов, введенный В. Н. Безверхним, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп.

Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n-угольной структурой.

Ключевые слова: группа Кокстера, алгоритмические проблемы, диаграммы.

Библиография: 30 названий.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-41-03222 р_центр_а).

ON ALGORITHMIC PROBLEMS IN COXETER GROUPS

V. N. Bezverkhnii (Moscow), N. B. Bezverkhnyaya (Moscow), I. V. Dobrynina (Tula), O. V. Inchenko (Tula), A. E. Ustyan (Tula)

Abstract

The main algorithmic problems of group theory posed by M. Dehn are the problem of words, the problem of the conjugation of words for finitely presented groups, and the group's isomorphism problem.

Among the works related to the study of the M. Dehn's problems, the most outstanding ones are the work of P. S. Novikov who proved the undecidability of the problem of words and the conjugacy problem for finitely presented groups as well as the undecidability of the problem of isomorphism of groups. In this regard, the main algorithmic problems and their various generalizations are studied in certain classes of groups.

Coxeter groups were introduced by H. S. M. Coxeter: every reflection group is a Coxeter group if its generating elements are reflections with respect to hyperplanes limiting its fundamental polyhedron. H. S. M. Coxeter listed all the reflection groups in three-dimensional Euclidean space and proved that they are all Coxeter groups and every finite Coxeter group is isomorphic to some reflection group in the three-dimensional Euclidean space which elements have a common fixed point.

In an algebraic aspect Coxeter groups are studied starting with works by J. Tits who solved the problem of words in certain Coxeter groups.

The article describes the known results obtained in solving algorithmic problems in Coxeter groups; the main purpose of the paper is to analyze of the results of solving algorithmic problems in Coxeter groups that were obtained by members of the Tula algebraic school 'Algorithmic problems of theory of the groups and semigroups ' under the supervision of V. N. Bezverkhnii.

It reviews assertions and theorems proved by the authors of the article for the various classes of Coxeter groups: Coxeter groups of large and extra-large types, Coxeter groups with a tree-structure, and Coxeter groups with n-angled structure.

The basic approaches and methods of evidence among which the method of diagrams worked out by van Kampen, reopened by R. Lindon and refined by V. N. Bezverkhnii concerning the introduction of R-cancellations, special R-cancellations, special ring cancellations as well as method of graphs, method of types worked out by V. N. Bezverkhnii, method of special set of words designed by V. N. Bezverkhnii on the basis of the generalization of Nielsen method for free construction of groups.

Classes of group considered in the article include all Coxeter groups which may be represented as generalized tree structures of Coxeter groups formed from Coxeter groups with tree structure with replacing some vertices of the corresponding tree-graph by Coxeter groups of large or extra-large types as well as Coxeter groups with n-angled structure.

Keywords: Coxeter group, algorithmic problems, diagrams.

Bibliography: 30 titles.

1. Введение 1

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп, поставленными М. Дэном, являются проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах и проблема изоморфизма групп.

Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения одного из активно развивающихся направлений современной математики — комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг и статей, посвященных данной теме, достаточно назвать монографии В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитера, а также Р. Линдона и П. Шуппа.

Среди работ, связанных с исследованием проблем М. Дэна, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблем равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

С. И. Адяном определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства β, представляющего собой объединение нетривиального наследственного и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством β. Из этого результата следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Сюда относятся, в частности, такие проблемы, как распознавание нильпотентности, конечности, простоты, свободы или единичности группы, включая и основные проблемы комбинаторной теории групп.

Обобщением проблемы сопряженности слов являются проблемы сопряженности подгрупп и обобщенной сопряженности слов.

Впервые проблема сопряженности подгрупп рассматривалась В. Н. Ремесленниковым, доказавшим ее положительное решение в классе конечно порожденных нильпотентных групп.

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$.

Существование такого алгоритма для некоторого класса конечно определенных групп позволяет для любого автоморфизма $\varphi \in Aut\, G$ определить, является ли он внутренним. С описанием множества решений данной системы связана проблема построения централизатора конечно порожденной подгруппы. Проблемы сопряженности подгрупп и обобщенной сопряженности слов для различных групп рассматривались в работах М. Д. Гриндлингера, В. Н. Безверхнего и других.

К центральной теме комбинаторной теории групп относится также изучение различных свойств подгрупп данных групп.

Группа G, заданная системой образующих a_i, $i \in J$, и системой определяющих соотношений $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i, j \in J$, m_{ij} – элемент симметрической матрицы Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, соответствующей данной группе, то есть матрицы, в которой $m_{ii} = 1$, $m_{ij} = m_{ji} \geqslant 2$ для $i \neq j$, называется группой Кокстера. Из этого определения получаем $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$. В дальнейшем будем полагать $J = \{\overline{1, n}\}$.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером [1]: всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера, а всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

В алгебраическом аспекте группы Кокстера изучаются с работ Ж. Титса [2], которым решена проблема равенства слов в произвольных группах Кокстера.

П. Шуппом [3] показана неразрешимость проблемы вхождения в группах Кокстера.

К. Аппелем и П. Шуппом [4] определены классы групп Кокстера и Артина большого и экстрабольшого типов и в группах экстрабольшого типа решены проблемы равенства и сопряженности слов.

В группах Артина большого типа независимо К. Аппелем и В. Н. Безверхним [5] доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов.

Так как группы Кокстера экстрабольшого типа являются гиперболическими, то из результатов И. Г. Лысенка следует разрешимость в них проблем вхождения в циклическую подгруппу и извлечения корня.

Для групп Кокстера экстрабольшого типа с $m_{ij} \geq 3k+1$ И. Каповичем и П. Шуппом [6] доказано, что всякая k-порожденная подгруппа без кручения является свободной.

В данной статье рассматриваются результаты по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученные членами Тульской алгебраической школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп" под руководством В. Н. Безверхнего.

2. Группы Кокстера большого типа

Пусть G — группа Кокстера с копредставлением $G =< a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1,n} >$, где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1,n}\, m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$.

Если $m_{ij} \geq 3$, $i \neq j$, то G называется группой Кокстера большого типа.

Если $m_{ij} > 3$, $i \neq j$, то G называется группой Кокстера экстрабольшого типа.

Как замечено выше, группы Кокстера экстрабольшого типа являются гиперболическими.

Покажем, что в общем случае группы Кокстера большого типа не являются гиперболическими группами. Рассмотрим группу $G =< a, b, c;\ aba = bab,\ aca = cac,\ bcb = cbc,\ a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ c^2 = 1 >$. Данная группа содержит свободную абелеву подгруппу $< (abc)^2, (bac)^2; (abc)^2(bac)^2 = (bac)^2(abc)^2 >$, а потому не может быть гиперболической.

Будем рассматривать проблему сопряженности слов, следуя работе [7].

Для решения данной проблемы описываются диаграммы над группой Кокстера большого типа G, заданной системой образующих $a_1, \ldots, a_n$ и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in \overline{1,n}$, $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i, j \in \overline{1,n}$, m_{ij} – элемент матрицы Кокстера (m_{ij}), $i, j \in \overline{1,n}$, соответствующей данной группе, причем $m_{ij} \geqslant 3$ для $i \neq j$.

Пусть $F = \prod_{i=1}^{n} *(F_i =< a_i; a_i^2 >)$ — свободное произведение циклических групп порядка 2, $R = \bigcup_{i,j \in J} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F, R_{ij} — множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в двупорожденной группе Кокстера большого типа G_{ij}.

Пусть w — нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное единице в группе Кокстера большого типа G, то есть $w \in < R >^F$, где $< R >^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F. Тогда из теоремы Ван-Кампена следует, что существует связная односвязная диаграмма M группы Кокстера с граничной меткой w, областями которой являются R_{ij}-диаграммы.

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. При этом возможно, что метка границы полученой области равна единице в свободном произведении F. Тогда, удалив эту область, склеиваем её границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице, и получаем, что каждая приведенная связная односвязная R-диаграмма M группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$.

Обозначим через ∂M граничный цикл M.

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \bigcap \partial D \neq \emptyset$. Символом $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, символом $d(D)$ — число всех ребер в граничном цикле D.

Будем говорить, что $\partial D \bigcap \partial M$ есть последовательная часть M, если $\partial D \bigcap \partial M$ — объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M.

Граничную область D R-диаграммы M назовем простой, если $\partial D \bigcap \partial M$ есть последовательная часть M.

Определение 1. *Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < 3$.*

Далее используем понятия и преобразования диаграмм, введенные В. Н. Безверхним.

Определение 2. *Пусть M — приведенная связная, односвязная R-диаграмма группы Кокстера большого типа. Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n \geqslant 2$, образует полосу в M, если:*

1) $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial D_i \bigcap \partial M$ — последовательная часть M;

2) $\forall i$, $1 \leqslant i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;

3) $i(D_1) = i(D_n) = 3$ и $\forall j$, $1 < j < n$, $i(D_j) = 4$.

Лемма 1. *Если M — связная односвязная диаграмма группы Кокстера большого типа, не содержащая деновской области, то она содержит по крайней мере три непересекающиеся полосы.*

Определение 3. *Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.*

Лемма 2. *Пусть M — приведенная связная диаграмма M группы Кокстера большого типа, содержащая $(s-i)$-области, тогда $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(\delta)$ содержат одну букву.*

Определение 4. *Удаление деновской области диаграммы M, то есть удаление ее граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R-сокращением.*

Определение 5. *Пусть Π — полоса диаграммы M, $\partial M = \gamma \bigcup (\partial\Pi \bigcap \partial M)$, а*

$$\gamma_1 = \partial\Pi \setminus (\partial\Pi \bigcap \partial M).$$

Замену диаграммы M на диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, в результате чего граничный цикл M преобразуется в граничный цикл $\partial M_1 = \gamma\gamma_1$, назовем специальным R-сокращением или $\overline{R}$-сокращением. Если M не содержит полос, то назовем M специально R - приведенной или $\overline{R}$-приведенной.

Определение 6. *Слово $w \in G$, G – группа Кокстера большого типа, назовем R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| \leqslant 2$.*

Назовем w циклически R-приведенным, если все его циклические перестановки являются R - приведенными словами.

Определение 7. *R-приведенное слово w группы Кокстера большого типа G назовем специально R-приводимым или $\overline{R}$-приводимым, если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $t = 1$ и $t = n$ $|d_1| = |b_1| = |d_2| = |d_n| = |b_n| = = |d_{n+1}| = 1$ и для t, $1 < t < n$, $|d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|b_t| = 2$.*

Лемма 3. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w R-приведенным.*

Лемма 4. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R-приведенного слова w из группы Кокстера большого типа выяснить, является ли w специально R-приведенным.*

Аналогично рассматриваются кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа.

Рассмотрим кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа, не содержащие $(s-i)$-областей и, следовательно, удовлетворяющие условию $C(6)$.

Определение 8. *Кольцевую связную приведенную однослойную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа, метки которой $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ приведены в F, $\varphi(\sigma)$ — R-приведено и специально R-приведено, назовем особо специальной R-диаграммой, если в M существует одна область D такая, что $|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))| = 3$, а для остальных областей D' $|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \sigma))| = 4$. Слово $\varphi(\tau)$ является циклически R-приведенным и циклически специально R-приведенным. Замену слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.*

Лемма 5. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R-приведенного, циклически специально R-приведенного слова w из группы Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R-сокращение.*

Определение 9. *Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Кокстера большого типа обладает свойством s, если w циклически R-несократимо, циклически специально R-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.*

Кольцевую связную приведенную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ назовем простой, если $|M| \geqslant 1$ и $\sigma \bigcap \tau \neq \emptyset$; M назовем вырожденной, если $|M| = 0$, где $|M|$ — число областей диаграммы M.

Определение 10. *Кольцевая связная приведенная R-диаграмма M с граничными циклами σ, τ называется n-слойной, $n \geqslant 1$, если после последовательного удаления граничных слоев получим вырожденную кольцевую R-диаграмму и называется $C-n$-слойной, если в результате удаления указанных выше граничных слоев получим простую кольцевую R-диаграмму.*

Далее рассматриваются кольцевые связные приведенные R-диаграммы M сопряженности слов групп Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ, у которых не каждая граничная область является простой. При этом кольцевая R-диаграмма M может быть одного из следующих видов:

1^0. $\sigma \bigcap \tau = \emptyset$, каждая область $D \in M$ граничная, $\partial D \bigcap \partial M$ — несвязное множество, $i(D) = 2$.

2^0. $\sigma \bigcap \tau \neq \emptyset$.

3^0. $\sigma \bigcap \tau = \emptyset$, существует область D, $i(D) > 2$, $\partial D \bigcap \partial M$ — несвязное множество.

Следующие преобразования укорачивают длину циклического слова w:

π_1) циклическое сокращение w в свободном произведении F;

π_2) циклическое R-сокращение в G;

π_3) циклическое специальное R-сокращение в G;

π_4) кольцевое специальное R-сокращение в G;

π_5) переход от w к сопряженному слову u, $|u| < |w|$, с помощью кольцевой диаграммы вида 1^0;

π_6) то же, что π_5), но с помощью кольцевой диаграммы вида 2^0;

π_7) то же, что π_5), но с помощью кольцевой диаграммы вида 3^0.

Слово w, полученное из v применением к нему преобразований $\pi_1) - \pi_7)$ в G, назовем тупиковым для v, если оно инвариантно относительно этих преобразований.

Лемма 6. *Для любого слова $v \in G$ можно эффективно построить соответствующее ему тупиковое слово w.*

Лемма 7. *Пусть $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, v обладает свойством s и w — тупиковое для v слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |w|$, не сопряжено с v.*

Лемма 8. *Пусть M — связная приведенная минимальная R - диаграмма группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s. Тогда если $\varphi(\sigma) = x$, то $\varphi(\tau) = y$, где $x, y \in \{a_1, \dots, a_n\}$, $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — множество образующих группы G.*

Кольцевую связную приведенную R-диаграмму M сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$, где σ, τ – соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, назовем минимальной, если не существует кольцевой R-диаграммы M_0 с теми же граничными метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$, имеющей меньшее число областей.

Лемма 9. *Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R-диаграмма группы G Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ. Пусть $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Если M — n-слойная либо C — n-слойная диаграмма с $n > 1$, то для любой области $D \subset M$ выполняется $d(D) = 6$.*

Определение 11. *Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A, определяемая матрицей Кокстера M_A. Тогда подгруппа G_j, порожденная множеством $A_j \subset A$, есть группа Кокстера большого типа, определяемая матрицей Кокстера M_j, полученной из M_A удалением строк и столбцов, именованных образующими из $A \setminus A_j$. Данная подгруппа G_j является параболической.*

Лемма 10. *Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R-диаграмма вида $C(6)$ с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа G. Пусть $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ обладают свойством s, $\varphi(\sigma)$ — слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j, $A_j \subset A$, A — множество образующих G, $\varphi(\sigma)$ не является образующим из A_j. Тогда $\varphi(\tau) \in G_j$ и слова $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ сопряжены в G_j.*

Следствие 1. *Пусть u, $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, A — множество образующих G, u, v обладают свойством s и существует $z \in G$ такое, что $z^{-1}uz = v$. Тогда, если слово u есть слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j, $A_j \subset A$, u не является образующим из A_j, то $v \in G_j$ и существует $z' \in G_j$, $z' = z$ в G, такое, что ${z'}^{-1}uz' = v$.*

Следствие 2. *Пусть G — группа Кокстера большого типа на образующих A, G_j — параболическая подгруппа G на множестве образующих $A_j \subset A$, слово u обладает свойством s, $u \in G_j$ и не является образующим из A_j, тогда $N_G(u) = N_{G_j}(u)$.*

Лемма 11. *Пусть M — кольцевая связная приведенная минимальная R-диаграмма группы Кокстера большого типа G с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s. Тогда если M содержит $(s{-}i)$-область, то все области M являются $(s{-}i)$-областями.*

Лемма 12. *Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A. Если $v_0 \in G$, $v_0 \neq 1$ в G и v_0 — R-приведенное, специально R-приведенное слово, равное слову из параболической подгруппы G_j с образующими A_j, $A_j \subset A$, то v_0 — слово на образующих A_j.*

Теорема 1. *В группе Кокстера большого типа разрешима проблема вхождения в параболическую подгруппу.*

Определение 12. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли такой элемент $h \in G$, что $h^{-1}w_1h = w_2$.*

Теорема 2. *В группе Кокстера большого типа разрешима проблема сопряженности слов.*

Далее рассмотрим проблему обобщенной сопряженности слов, решение которой описано в работе [8].

Определение 13. *В группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$.*

Теорема 3. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера большого типа G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.*

Централизатор элемента в группах Кокстера большого типа, в общем случае, не является циклической подгруппой.

Теорема 4. *В группе Кокстера большого типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 5. *Пусть G — группа Кокстера большого типа и $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ — слова из G. Если F — какое-то решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_iz = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H)\cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ — централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, является множеством всех решений системы.*

Теорема 6. *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из группы Кокстера большого типа G выписать образующие их нормализатора.*

В следующей теореме описываются элементы конечного порядка в группах Кокстера большого типа.

Теорема 7. *[9] Слово w группы Кокстера большого типа G имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом*

$$w' \in G_{ab} =< a, b; (ab)^{m_{ab}}, a^2, b^2 > .$$

Рассмотрим алгоритмическую разрешимость проблем вхождения в циклическую подгруппу и извлечения корня в группах Кокстера большого типа, следуя [10].

Теорема 8. *Пусть слово $w \in G$ имеет бесконечный порядок. Тогда любая степень слова, сопряженного w или w^2 в группе G, циклически R и специально R-несократима.*

Пусть в группе Кокстера большого типа G $w^n = v$. Тогда $(w^2)^n = v^2$. Заменим w^2 на сопряженное с ним циклически R-несократимое и специально R-несократимое слово w_0. Получим $w_0^n = z^{-1}v^2z$. Заменим $z^{-1}v^2z$ равным ему в группе G R-несократимым и специально R-несократимым словом v_0. Тогда существует приведенная связная односвязная R-диаграмма M такая, что $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = w_0^n v_0^{-1}$, где γ, δ гомеоморфны отрезку.

Связная односвязная диаграмма M называется диском, если ее граничный цикл ∂M — простая замкнутая кривая.

Будем считать, что M — диск, $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w_0^n$ и $\varphi(\delta) = v_0$, $\gamma \cap \delta = \{A, B\}$ — две вершины.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть M — приведенная диаграмма, являющаяся диском, $\partial M = \gamma \cup \delta$, где $\varphi(\gamma)$ и $\varphi(\delta)$ — R-несократимые и специально R-несократимые слова, $\gamma \cap \delta = \{A, B\}$. Тогда число областей, граничащих с γ и δ, одинаково.*

Пусть M — связная односвязная приведенная диаграмма, $\partial M = \gamma \cup \delta$, пусть $\varphi(\gamma) = w_0^n$, $\varphi(\delta) = v_0$ и r_0 — самое длинное слово из R. Тогда $n < 4|v_0||r_0|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема корня, если существует алгоритм, позволяющий для любого слова $w \in G$ установить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$ и $x \in G$ такие, что $x^n = w$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *В группе Кокстера большого типа G разрешима проблема корня.*

Кроме того, в [11] изучается проблема слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ таких, что $w \notin < v >$, установить, существует ли целое число n такое, что слова w^n, v сопряжены в группе G.*

ТЕОРЕМА 10. *В группе Кокстера большого типа G разрешима проблема слабой степенной сопряженности слов.*

3. Группы Кокстера экстрабольшого типа

В этом разделе проанализируем работы [12]- [13].

Перейдем к рассмотрению диаграмм над группами Кокстера экстрабольшого типа, которые строятся так же, как и диаграммы над группами Кокстера большого типа. Каждая приведенная связная односвязная R-диаграмма M группы Кокстера экстрабольшого типа удовлетворяет условию $C(8)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. *Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. *Пусть M_1 — приведенная связная, односвязная поддиаграмма R - диаграммы M группы Кокстера экстрабольшого типа с границей $\partial M_1 = e_1 \gamma e_2 \delta$, где e_1 — ребро AB, γ – путь BC, e_2 — ребро CD, δ — путь DA. Тогда последовательность областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ из M_1 $(e_1 \in D_1, e_2 \in D_n), n \geqslant 2$, образует полосу в M, если:*

1) $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\quad \partial D_i \bigcap \gamma, \partial D_i \bigcap \delta$ – последовательная часть M_1;

2) $\forall i,\ 1 \leqslant i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;

3) $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \cap \delta| + 2, |\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \cap \delta| + 2$ и $|\partial D_j \cap \gamma| = |\partial D_j \cap \delta|, 2 \leqslant j < n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Слово $w \in G$, G – группа Кокстера экстрабольшого типа, назовем R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| < |s|$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *R-приведенное слово w группы Кокстера экстрабольшого типа G назовем специально R-приводимым или $\overline{R}$-приводимым, если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots$*

s_n, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $t = 1$ и $t = n$ $\quad |d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|s_t| = |b_t| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $|d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|b_t| = |s_t|$.

Лемма 13. *Пусть M — приведенная связная односвязная R - диаграмма над группой Кокстера экстрабольшого типа; σ — граничный цикл M, слово $\varphi(\sigma)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимо. Тогда M является однослойной.*

Лемма 14. *Пусть M — приведенная связная кольцевая диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ над группой Кокстера экстрабольшого типа, не содержащая $(s-i)$-областей; σ, τ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимы. Тогда M является однослойной.*

Определение 20. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^m сопряжены в группе G.*

Теорема 11. *В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Определение 21. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения циклических подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, пусто или нет пересечение циклических подгрупп, порожденных в G данными словами.*

Теорема 12. *В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема пересечения циклических подгрупп. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.*

Теорема 13. *Если E и C — элементы бесконечного порядка группы Кокстера экстрабольшого типа G, не являющиеся степенями одного и того же слова, то существует натуральное число γ такое, для E^γ и C не выполняется нетривиальное тождество.*

4. Группы Кокстера с древесной структурой

Конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G = \langle a_1, ...a_n; (a_i)^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n}\rangle$$

имеет древесную структуру, если граф Γ группы G - дерево. В графе $\overline{T}$ конечно порожденной группы Кокстера всегда можно выделить максимальный дерево-граф T, который соответствует группе, имеющей древесную структуру, для которой группа Кокстера с графом $\overline{T}$ является гомоморфным образом. Поэтому естественно рассматривать решение основных алгоритмических проблем для групп этого класса.

Построение и преобразования диаграмм над группами Кокстера с древесной структурой, происходит также как и для групп Кокстера большого типа.

Диаграмму, полученную в результате преобразований, назовем *приведенной*. Областями диаграммы являются $2k$-угольники с граничными метками из R_{ij}.

Определение 22. *Точку, разделяющую ребра области с разными метками и имеющую в диаграмме степень не менее 3 назовем особой.*

Определение 23. *Область D назовем деновской, если $i(D) < \frac{1}{2}d(D)$, где $i(D)$ — число внутренних ребер, $d(D)$ — число ребер в граничном цикле для D.*

Понятие $(s-i)$-области определяется также как и для групп Кокстера большого типа.

Лемма 15. *Пусть связная односвязная приведенная диаграмма M над R не содержит $(s-i)$-областей, тогда особая точка не может быть внутренней точкой диаграммы M.*

Следствие 4. *Связная односвязная диаграмма M является однослойной.*

Далее рассмотрим кольцевые диаграммы сопряженности слов. Из леммы 15 получаем следствие.

Следствие 5. *Связная кольцевая приведенная диаграмма M, не содержащая $(s-i)$-областей, над группой G является однослойной.*

Лемма 16. *Если связная кольцевая диаграмма M над группой G с граничными циклами α и β, где $\phi(\alpha)$ и $\phi(\beta)$ циклически и R несократимые слова, тогда если M содержит хотя бы одну $(s-i)$-область, то все области данной диаграммы будут являться $(s-i)$-областями.*

Лемма 17. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой и пусть w — циклически R приведенное слово в G, $|w|>1$, сопряженное в G с некоторым элементом $v \in G_{ij}$. Тогда $w \in G_{ij}$ и сопряжено с v в подгруппе G_{ij}.*

Лемма 18. *Пусть слова v и w сопряжены в группе G. Тогда, если $|w|=1$ и v циклически и R несократимо в G, то $|v|=1$.*

Теорема 14. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой. Слова v и w, длина каждого из которых равна единице в группе Кокстера G, сопряжены тогда и только тогда, когда существует ломанная, состоящая из ребер дерева-графа Γ, которая соединяет вершины соответствующие данным образующим группы, и каждому из ребер выделенного пути соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера.*

Из структуры кольцевых диаграмм следует

Теорема 15. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

Определение 24. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ образует полосу в R-приведенной диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \bigcup \delta$, где γ есть путь AB, δ — AA_1B_1B, если*

1. *$\forall i,\ i=\overline{1,n-1}\ \partial D_i \bigcap \partial D_{i+1} = e$, где e – ребро ;*
2. *$\forall i,\ i=\overline{1,n}\ \partial D_i \bigcap \gamma = \gamma_i$,где γ_i — связный путь, причем $|\gamma_i| \geqslant 1$*
3. *$|\partial D_1 \bigcap \gamma| = |\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \bigcap \gamma)|$ и $|\partial D_n \bigcap \gamma| = |\partial D_n \backslash (\partial D_n \bigcap \gamma)|$;*
4. *$\forall j,\ j=\overline{2,n-1}\, |\partial D_j \bigcap \gamma| + 2 = |\partial D_j \backslash (\partial D_j \bigcap \gamma)|$.*

Пусть связная односвязная диаграмма M над R содержит полосу Π. Удаление из диаграммы M пути $\partial\Pi \bigcap \gamma$ назовем $\overline{R}$-сокращением.

Определение 25. *Слово u называется R и $\overline{R}$ - несократимым, если любая его циклическая перестановка u^* не содержит R и $\overline{R}$ -сокращения.*

Лемма 19. *Пусть M связная односвязная диаграмма над R и $\partial M = \gamma \bigcup \delta$. И пусть $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\delta)$ — не являются R-сократимыми словами. Тогда существует алгоритм, позволяющий определить, является ли одно из этих слов $\overline{R}$-сократимым.*

Лемма 20. *Пусть w — циклически R и $\overline{R}$ -несократимое слово в группе Кокстера G; $w^n \overset{G}{=} 1$ тогда и только тогда, когда $w \in G_{ij}$.*

Таким образом, все элементы конечного порядка группы G принадлежат подгруппам вида $G_{ij} = \left\langle a_i, a_j;\ a_i^2, a_j^2, R_{ij} \right\rangle$, где R_{ij} — все циклически несократимые слова равные единице в G_{ij}.

Переход с помощью сопряжения от слова большей длины к слову меньшей длины назовем кольцевым сокращением.

Определение 26. *Циклически R и $\overline{R}$ - несократимое слово w назовем тупиковым, если к нему не применимо кольцевое сокращение.*

Лемма 21. *Пусть w и v тупиковые слова из группы G и пусть w и v сопряжены в G. Тогда $|w| = |v|$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $|u| < |w|$ не сопряжено с v.*

Проблема вхождения в параболическую подгруппу является частным случаем проблемы вхождения, то есть существования алгоритма, позволяющего для данной конечно определенной группы G и данной в ней конечной системы элементов A решить, принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G к подгруппе, порожденной множеством A.

Используя метод диаграмм, получена

Лемма 22. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, с множеством образующих A, $|A| < \infty$. И пусть $w \in G$, w — R и $\overline{R}$- несократимое слово не равное единице в G. Слово w равно некоторому слову $v \in G_j$, где G_j — параболическая подгруппа группы G с множеством образующих A_j, $A_j \subset A$. Тогда w — слово на образующих A_j*

Лемма 23. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, с множеством образующих A, $|A| < \infty$. И пусть $w \in G$, w — циклически несократимое тупиковое слово не равное единице в G. Слово w сопряжено некоторому слову $v \in G_j$. Тогда w, z — слова на образующих A_j*

В работе [14] дано описание структуры централизатора элементов конечного порядка группы Кокстера с древесной структурой:

Лемма 24. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, w циклически R-несократимое слово в G, $w \in G_{ij}$, $|w| > 1$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$, $m_{ij} = 2$. Тогда централизатор элемента w есть группа G_{ij} .*

Лемма 25. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, w циклически R-несократимое слово в G, $w \in G_{ij}$, $|w| > 1$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$, $m_{ij} > 2$. Тогда централизатор элемента w есть циклическая группа конечного порядка, порожденная элементом длины два.*

Определение 27. *Ребро e_i дерева-графа Γ назовем замыкающим ребром пути, если ему соответствует четное число Кокстера.*

Теорема 16. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, слово w такое, что $|w| = 1$. Тогда централизатор элемента w есть подгруппа вида*

$$C(w) = \langle \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, .., \widetilde{z}_s; \widetilde{z}_r{}^2, w^2, r = \overline{1, s} \rangle,$$

где $\widetilde{z}_r$ — циклически сократимое слово вида $\widetilde{z}_r = z_1 z_2 .. z_{t-1} z_0 z_{t-1}^{-1} .. z_2^{-1} z_1^{-1}$, подслова z_l принадлежат подгруппам вида G_{ij}. Подслово z_0 соответствует замыкающему ребру и $|z_l| = m_{ij} - 1$, $l = \overline{0, t-1}$.

Обозначим через $C_w(w)$ подгруппу, полученную из $C(w)$ вычеркиванием из множества порождающих слов элемента w.

Лемма 26. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой, слово w такое, что $|w| = 1$. $C(w)$ — централизатор элемента w. Тогда группа $C_w(w)$ является свободным произведением циклических групп порядка два и $C(w) = \langle w, w^2 \rangle \times C_w(w)$.*

Теорема 17. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера с древесной структурой G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм выписывающий образующие централизатора.*

Далее рассмотрим проблему обобщенной сопряженности слов, решенную в [15].

Теорема 18. *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 19. *Пусть G — группа Кокстера с древесной структурой и $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ — множества слов из G. Если F — какое-то решение системы $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$, то множество слов $C_G(H) \cdot F$, где $C_G(H)$ — централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$ является множеством всех решений системы.*

Представим группу Кокстера с древесной структурой G в виде древесного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединеных по конечным циклическим подгруппам. Для этого от графа T группы G перейдем к графу $\widetilde{T}$ следующим образом: вершинам некоторого ребра $\overline{e}$ графа $\widetilde{T}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$ и $G_{jk} = \langle a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$ — циклическую подгруппу $\langle a_j; a_j^2 \rangle$.

Группа G удовлетворяет условию максимальности, если всякая возрастающая последовательность ее подгрупп $H_1 \leq H_2 \leq ..$ стабилизируется, то есть существует натуральное число n такое, что для любого N, $N > n$, $H_N = H_{N+1} = ...$

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп, если для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G и любых слов $w_1, w_2 \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \bigcap w_2 H_2$.

В. Н. Безверхним в [16] был получен следующий результат

Теорема 20. *Пусть G древесное произведение групп*

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{n} *G_s;\ rel\, G_1, .., rel\, G_s;\ \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \right\rangle,$$

объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G$ и $U_{ji} < G$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов φ_{ij}: $\varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы проблемы:

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;*
3. *существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,*

то в группе G разрешима проблема вхождения.

Группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде древесного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам удовлетворяет условиям данной теоремы. Таким образом, в данном классе групп разрешима проблема вхождения.

Будем говорить, что группа G обладает свойством Хаусона, если пересечение любых двух ее конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа.

Рассмотрим группу $G^* = \left\langle G, t;\, relG,\, t^{-1}U_1t = \varphi(U_1)\right\rangle$ являющуюся HNN-расширением группы G с помощью конечных изоморфных подгрупп U_1 и U_{-1} и фиксированного изоморфизма φ: $\varphi(U_1) = U_{-1}$, t — не принадлежащая G правильная проходная буква.

В. Н. Безверхним [17] был получен следующий результат:

Теорема 21. *Если в группе G^* ее основа G обладает свойством Хаусона, то и G^* обладает свойством Хаусона.*

Баумслагом была доказана:

Теорема 22. *Если в свободном произведении $G = G_1 * G_2$ групп G_i, $i = \overline{1,2}$ каждый множитель обладает свойством Хаусона, то и G обладает свойством Хаусона.*

Теорема 23. *(Миллер-Шупп). Группа $\tilde{G} = \langle G_1 * G_2,\ U_1 = \varphi(U_1)\rangle$, являющаяся свободным произведением групп G_1 и G_2 с объединением по изоморфным подгруппам U_1 и U_{-1} с помощью фиксированного изоморфизма φ: $\varphi(U_1) = U_{-1}$, изоморфно вложима в группу $G^* = \left\langle G_1 * G_2,\ t;\ relG_1,\, relG_2,\ t^{-1}U_1t = \varphi(U_1)\right\rangle$.*

Рассмотрим свободное произведение $\bar{G}$ двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} = \left\langle a_i,\, a_j;\, a_i^2,\, a_j^2,\, (a_ia_j)^{m_{ij}}\right\rangle$$

и $G_{ik} = \left\langle a_i,\, a_k;\, a_i^2,\, a_k^2,\, (a_ia_k)^{m_{ik}}\right\rangle$, объединенных по циклической подгруппе $\left\langle a_i;\, a_i^2\right\rangle$:
$\bar{G} = G_{ij} \underset{\left\langle a_i; a_i^2\right\rangle}{*} G_{ik}$.

По теореме 22 группа $\overline{G} = \langle G_{ij} * G_{ik};\ \varphi(a_i) = a_i'\rangle$ изоморфно вложима в группу

$$G^* = \left\langle G_{ij} * G_{ik},\ t;\ relG_{ij},\, relG_{ik},\ t^{-1}a_it = \varphi(a_i)\right\rangle.$$

Из теорем 20 и 21 следует, что группа G^* обладает свойством Хаусона и, значит, группа $\overline{G}$ также обладает свойством Хаусона.

С помощью метода математической индукции получено обобщение этого результата:

Теорема 24. *Группа Кокстера с древесной структурой обладает свойством Хаусона.*

Вопрос о нахождении пересечения подалгебр данной алгебры был впервые сформулирован А. И. Мальцевым в 1958 году.

Далее проанализируем результаты работ [18]- [20], используя метод типов, введенный В. Н. Безверхним, и метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним [17], [21] на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп.

Слово из группы $\overline{G}$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g}l_{2g}..l_{ng}K_gr_{ng}..r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} - представители правых классов смежности группы G_{ij} по $\left\langle a_i;\, a_i^2\right\rangle$ и G_{ik} по $\left\langle a_i';\, (a_i')^2\right\rangle$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}$. K_g - ядро слова g.

Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы $\overline{G}$, а K_g - другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 28. *Если в (1)* $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}=(r_{ng}..r_{1g})^{-1}$, *то слово*

$$g=r_{1g}^{-1}..r_{ng}^{-1}K_g r_{ng}..r_{1g} \tag{2}$$

называется трансформой.

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}$. В этом случае слоговая длина слова

$$g=l_{1g}l_{2g}..l_{ng}h_g r_{ng}..r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g=K_g$, равна $L(g)=2n$.

Слово вида (1) будем называть нетрансформой нечетной длины, слово вида (3) – нетрансформой четной длины.

Определение 29. *Подслово* $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}(r_{ng}..r_{1g})$ *называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово* $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}K_g(K_g r_{ng}..r_{1g})$ *— закрытым начальным (конечным) отрезком.*

Определение 30. *Левая (правая) половина слова* $w_i=l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}K_{w_i}r_{mw_i}..r_{1w_i}$ *называется изолированной в множестве* $\{w_j\}$, $j\in\overline{1,N}$, *если ни у одного из слов* w_j^{ε}, $\varepsilon=\pm1$ *множества* $(\{w_j\}\setminus w_i)\cup\left(\left\{w_j^{-1}\right\}\setminus w_i^{-1}\right)$ *нельзя выделить* $l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}$ $(r_{mw_i}..r_{1w_i})$ *в качестве начального (конечного) подслова, то есть* $w_j^{\varepsilon}\neq l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}l_{m+1w_j}w_{jn}^{\varepsilon}$
$(w_j^{\varepsilon}\neq w_{j1}^{\varepsilon}r_{m+1w_j}r_{mw_i}..r_{1w_i})$.

Определение 31. *Конечное множество слов* $W=\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *группы* $\overline{G}$ *назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Левая половина нетрансформы множества* W *изолирована в нем. Если нетрансформа четной длины, то изолированы и левая и правая половины;*

2. *Длину нетрансформы* w_{ic} *нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством* $(\{w_i\}\setminus w_{ic})$. *Длину произвольного элемента множества нельзя уменьшить, умножая на слово* w *длины меньше* $L(w_{ic})$, *принадлежащее подгруппе* $\left\langle\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$ *;*

3. *Пусть* $w_{i0}^{\varepsilon}=l_{1w_0}l_{2w_0}..l_{nw_0}K_{w_0}r_{nw_0}..r_{j+1w_0}r_{jw_0}..r_{1w_0}$, $\varepsilon=\pm1$, $j<n$ *нетрансформа из множества* $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *и* $\left\{w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}=l_{1w_{\alpha_i}}l_{2w_{\alpha_i}}..l_{nw_{\alpha_i}}K_{w_{\alpha_i}}r_{nw_{\alpha_i}}..r_{jw_0}..r_{1w_0}\right\}_{i=\overline{1,k}}$, $\varepsilon_i=\pm1$ *подмножество нетрансформ из множества* $(\{w_i\}\setminus w_{i0})\cup\left(\left\{w_i^{-1}\right\}\setminus w_{i0}^{-1}\right)$, *правые половины которых оканчиваются подсловом* $r_{jw_0}..r_{1w_0}$, *тогда, если подгруппа*

$$\left\langle\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle\cap r_{1w_0}^{-1}..r_{jw_0}^{-1}Dr_{jw_0}..r_{1w_0}=B,$$

где

$$D=\begin{cases} G_{k-1}, & \text{если } r_{j+1w_0}\in G_{k-1};\\ G_{xy}, & \text{если } r_{j+1w_0}\in G_{xy}.\end{cases}$$

не единична, то $L(w_{io}u)\geqslant L(w_{io})$, $L(w_{io}uw_{\alpha_i}^{\varepsilon_i})\geqslant L(w_{io})$, *где* $u\in B$;

4. *Пусть* $w_i=l_{1w_i}..l_{sw_i}l_{s+1w_i}..l_{nw_i}K_{w_i}r_{nw_i}..r_{s+1w_i}r_{sw_i}..r_{1w_i}$ *и*

$$w_j=l_{1w_j}..l_{sw_j}l_{s+1w_j}..l_{mw_j}K_{w_j}r_{mw_i}..r_{s+1w_j}r_{sw_j}..r_{1w_j}$$

слова из $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *не обязательно различны* $m \leqslant n$, $s \leqslant m$, *тогда существуют слова* $g \neq 1$ *длины меньше* $2s$ *из подгруппы* $\left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}} \right\rangle$ *такие, что если* $l_{1w_i}..l_{sw_i} \neq l_{1w_j}..l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i = l_{1w_j}..l_{sw_j} l'_{s+1w_i}..l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i}..r_{s+1w_i} r_{sw_i}..r_{1w_i} \ ,$$

либо если $r_{sw_i}..r_{1w_i} \neq r_{sw_j}..r_{1w_j}$, *то*

$$w_i g = l_{1w_i}..l_{sw_i} l_{s+1w_i}..l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i}..r'_{s+1w_i} r_{sw_j}..r_{1w_j},$$

либо если $r^{-1}_{1w_i}..r^{-1}_{sw_i} \neq l_{1w_j}..l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j}..l_{sw_j} \left(r'_{s+1w_i}\right)^{-1}..\left(r'_{nw_i}\right)^{-1}\left(K'_{w_i}\right)^{-1} l^{-1}_{nw_i}..l^{-1}_{1w_i} \ ,$$

либо если $l^{-1}_{sw_i}..l^{-1}_{1w_i} \neq r_{sw_j}..r_{1w_j}$, *то*

$$w_i^{-1} g = r^{-1}_{1w_i}..r^{-1}_{nw_i} \left(K'_{w_i}\right)^{-1}\left(l'_{nw_i}\right)^{-1}..\left(l'_{s+1,w_i}\right)^{-1} r_{sw_j}.r_{1w_j} \ .$$

Лемма 27. *Всякое конечное множество слов* $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *группы* $\overline{G} = G_{ij} \underset{\left\langle a_i | a_i^2 \right\rangle}{*} G_{ik}$ *можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.*

Пусть W — специальное множество слов. Разобьем его на подмножества следующим образом: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножествам M_i трансформы с одинаковыми крыльями, принадлежащие одной подгруппе, сопряженной группе G_{ij} или G_{ik}. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу (M_i), $i = \overline{0,k}$, имеющую вид: $(M_i) = r^{-1}_{1i}..r^{-1}_{ni} C_i r_{ni}..r_{1i}$. Здесь C_i — подгруппы из G_{ij} или G_{ik}, порожденные ядрами трансформ. Упорядочим подгруппы (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд:

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant ... \leqslant (M_k) \, . \tag{4}$$

Лемма 28. *Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$\left(M'_1\right) \leqslant \left(M'_2\right) \leqslant ... \leqslant \left(M'_k\right), \tag{4$'$}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp\left((M_0), (M_1), ..., (M_k)\right) = gp\left((M'_0), (M'_1), ..., (M'_k)\right)$;
2. *Если подгруппе* $\left(M'_j\right) = r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{nx} C'_j r_{nx}..r_{1x}$, $1 \leqslant j \leqslant k'$ *принадлежит трансформа* $u = r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{nx} h r_{nx}..r_{1x}$, *где* h *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда* $(4')$ *имеется подгруппа* $(M'_l) = r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{n-1,x} C'_l r_{n-1,x}..r_{1x}$ *содержащая* u;
3. *Если для некоторой трансформы* $u = r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{nx} K_x r_{nx}..r_{1x}$,*принадлежащей подгруппе* $\left(M'_j\right) = r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{nx} C'_j r_{nx}..r_{1x}$, *и нетрансформы* $y = l^{-1}_{1y}..l^{-1}_{n_1 y} K_y l_{n_1 y}..l_{1y}$ *из* M_0, $n_1 \geqslant n$, *(левая половина* y *изолирована) выполняется соотношение* $L(y^{-1}uy) \leqslant L(y)$, *то существует подгруппа* (M'_s) *ряда* $(4')$, *содержащая трансформу* $y^{-1}\left(r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{nx} K_x r_{nx}..r_{1x}\right) y$, *а если* $L(yuy^{-1}) < L(y)$, *то существует подгруппа* (M'_s) *ряда* $(4')$, *содержащая трансформу* $y\left(r^{-1}_{1x}..r^{-1}_{nx} K_x r_{nx}..r_{1x}\right) y^{-1}$;

4. *Если* $\left(M'_j\right) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}C'_j r_{n_1x}..r_{1x}$, $(M'_s) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}..r_{n_2y}^{-1}C'_s r_{n_2y}..r_{1x}$ *— подгруппы ряда* $(4')$, $n_2 > n_1$, *и подгруппа* $\left(M'_j\right)$ *содержит трансформу* $u = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}..r_{1x}$, *либо* $u' = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}..r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда* $(4')$ $(M'_k) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}C'_k r_{n_1+1,y}..r_{1x}$, *содержащая в первом случае трансформу* u, *во втором* u'*;*

5. *Если* $(M'_s) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}C'_s r_{n_1x}..r_{1x}$ *подгруппа из ряда* $(4')$ *и* $y^\varepsilon = l_{1y}^{-1}..l_{n_2y}^{-1}Kr_{n_2y}..r_{n_1+1,y}r_{n_1x}..r_{1x}$, $\varepsilon = \pm 1$ *— элемент специального множества, причем подслово* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой трансформы* w^ε, $\varepsilon = \pm 1$ *и если подгруппа* (M'_s) *содержит трансформу* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}..r_{1x}$ *либо трансформу* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}..r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда* $(4')$ $\left(M'_j\right) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}C'_j r_{n_1+1,y}..r_{1x}$, *содержащая эту трансформу.*

Лемма 29. *Подгруппа* (M_0), *порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.*

Подгруппу порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ обозначим через $gp\,(M_0, S)$. Она представляет собой HNN — группу с основой S, являющуюся древесным произведением, правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы (M_0) и $\left(M'_j\right)$, $j = \overline{1,k}$ ряда $(4')$ будем называть порождающими подгруппами $\langle w_1, .., w_n\rangle = gp\,(M_0, S)$.

Определение 32. *Произведение* $u_1..u_k$ *назовем словом подгруппы* $\langle w_1, .., w_n\rangle = gp\,(M_0, S)$ *группы* $\overline{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i; a_i^2\rangle}{*} G_{ik}$, *если*

1. $u_i \neq 1$*;*
2. $u_i \in \left\{M_0 \cup M_0^{-1}\right\}$ *либо* u_i *принадлежат некоторой подгруппе из ряда* $(4')$*;*
3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ *;*
4. u_i *и* u_{i+1} *не содержатся в одной подгруппе ряда* $(4')$*;*
5. *в* $u_1..u_k$ *нет произведения* $u_iu_{i+1}u_{i+2}$ $(i = \overline{1, k-2})$, *где* $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \left\{M_0 \cup M_0^{-1}\right\}$, $u_{i+1} \in \left(M'_j\right)$ *и* $u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M'_s)$*;* $\left(M'_j\right)$, (M'_s) *— из ряда* $(4')$.

Лемма 30. *Всякое произведение* $w_{i1}^{\varepsilon_1}w_{i2}^{\varepsilon_2}\ldots w_{in}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, *где* w_{ij} *— образующие подгруппы* $\left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i1}\ldots u_{ik}$, $k \leqslant n$ *подгруппы* $gp\,(M_0, S) = \left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$.

Определение 33. *Слово* $u_1\ldots u_k$ *называется простым, если*

$$L(u_1..u_k) = \max\{L(u_1), \ldots, L(u_k)\}.$$

Лемма 31. *Если* $u_1\ldots u_k$ *— слово подгруппы* $gp\,(M_0, S)$, *то* $L(u_1\ldots u_k) \geqslant L(u_i)$, $i = \overline{1,k}$.

Простое слово $u_1\ldots u_k$ подгруппы $gp\,(M_0, S)$ может быть одного из следующих видов:

a) слово $u_1\ldots u_k$ содержит нетрансформу максимальной длины, то есть $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+1 \leqslant j \leqslant k$, u_i — нетрансформа;

b) слово $u_1\ldots u_k$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины, то есть $L(u_i) = L(u_{i+1}) = L(u_iu_{i+1})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+2 \leqslant j \leqslant k$;

c) слово $u_1 \ldots u_k$ содержит нетрансформы u_i и u_{i+2}, и трансформу u_{i+1} со свойствами: $L(u_i) = L(u_{i+2})$, $L(u_i) = L(u_i u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1} u_{i+2})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+3 \leqslant j \leqslant k$, причем длина слова u_{i+1} оказаться меньше длины u_i, $0 \leqslant L(u_{i+1}) \leqslant L(u_i)$;

d) слово $u_1 \ldots u_k$ содержит трансформу u_i максимальной длины.

Пусть W некоторое множество элементов группы $\overline{G}$. Обозначим через $W_{v,i}$ $i = \overline{1,n}$, множество всех трансформ из W вида vKv^{-1}, где ядро K принадлежит одному из сомножителей G_{ij} или G_{ik}. Пару (v,i) назовем типом трансформы из $W_{v,i}$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы $\overline{G}$ порождена специальным множеством, то есть $H = gp\,(M_0, S)$. Каждый элемент $g \neq 1$ из H имеет несократимую запись в w-символах: $g = w_{i1}^{\varepsilon_1} w_{i2}^{\varepsilon_2} .. w_{is}^{\varepsilon_s}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Перемножая рядом стоящие трансформы одного типа, получим запись слова g в u - символах: $g = u_1 .. u_l$, где $u_i \neq 1$, $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Проведем в слове $g = u_1 \ldots u_l$ все сокращения в группе $\overline{G}$, получим слоговую запись этого элемента: $g = g_1 g_2 \ldots g_k$, $k \geqslant 1$.

Лемма 32. *Каждый слог g_i слова $g = g_1 g_2 \ldots g_k$ имеет вид:*

$$g_i = a_i x_i y_i z_i a_i', \tag{5}$$

$i = \overline{1,k}$, где x_i — центральный или правый слог u_{j-1} , y_i — центральный слог $u_j \in M_{v,j}$, $j = \overline{1,n}$, z_i — левый или центральный слог u_{j+1}, a_i и a_i' — элементы из объединяемой подгруппы.

Рассмотрим конечное множество конечно порожденных подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$ группы G.

Обозначим специальные множества образующих подгрупп $H_1, H_2, .., H_n$ через

$$W^{(j)} = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N_j}} \quad j = \overline{1,n}.$$

Если пересечение $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ не тривиально, то найдутся такие $h_j \in H_j$, $j = \overline{1,n}$, что $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = v$. Перепишем слова h_j в u - символах соответствующей подгруппы:

$$\begin{aligned} & v = u^{(1)}(1) u^{(1)}(2) \ldots u^{(1)}(r_1) = \\ & = u^{(2)}(1) u^{(2)}(2) \ldots u^{(2)}(r_2) = \\ & = u^{(n)}(1) u^{(n)}(2) \ldots u^{(n)}(r_n) = \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = q(1)\ q(2) \ldots q(r). \end{aligned} \tag{6}$$

Последняя строчка равенства (6) дает несократимую запись слова v в группе $\overline{G}$.

Будем называть $\left(v^{(j)}\right)^{-1} \alpha_i^{(j)} v^{(j)}$ типом трансформ порождающей подгруппы

$$\left(M_i^{(j)}\right) = \left(v^{(j)}\right)^{-1} A_i^{v^{(j)}}$$

подгруппы H_j, $\alpha_i^{(j)} \notin \overline{G}$ и обозначать его $(v^{(j)}, i)$. Символом $L((v^{(j)}, i)) = 2L(v^{(j)}) + 1$ будем обозначать длину типа $(v^{(j)}, i)$, а символом $T^{(j)}$ множество всех типов трансформ подгруппы H_j. Пополним $T^{(j)}$ символом $\beta^{(j)} \notin \overline{G}$, множество $\tilde{T}^{(j)}$. Обозначим через $R^{(j)}$ множество $M_0^{(j)} \cup \left(M_0^{(j)}\right)^{-1} \cup \tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$, соответствующее подгруппе H_j. Присоединим к множеству $R^{(j)}$ символ $\gamma^{(j)} \notin \overline{G}$, получим $\tilde{R}^{(j)}$. Соотношения (6) определяют следующее отображение:

$$\begin{aligned}\varphi_v(1,2,\ldots,r) = \big(Z^+ \times \big(R^{(1)} \times Z^+\big) \times T^{(1)} \times \big(R^{(1)} \times Z^+\big) \times Z^+\big) \times \\ \times \big(Z^+ \times \big(R^{(2)} \times Z^+\big) \times T^{(2)} \times \big(R^{(2)} \times Z^+\big) \times Z^+\big) \times .. \\ .. \times \big(Z^+ \times \big(R^{(n)} \times Z^+\big) \times T^{(n)} \times \big(R^{(n)} \times Z^+\big) \times Z^+\big)\,,\end{aligned} \tag{7}$$

где $Z^+ = \{0,1,2,\ldots\}$.

По лемме 31 каждый слог из последней строчки равенства (6) образован элементами трех последних символов, то есть

$$q(k) = a_i x_k^{(1)} y_k^{(1)} z_k^{(1)} a_i' = a_i x_k^{(2)} y_k^{(2)} z_k^{(2)} a_i' = \ldots = a_i x_k^{(n)} y_k^{(n)} z_k^{(n)} a_i'.$$

Тогда отображение (7) определяет функцию:

$$\begin{aligned}\varphi_v(k) = \left(p_0^{(1)}(k), \left(r_1^{(1)}(k), p_1^{(1)}(k)\right), \tau^{(2)}(k), \left(r_2^{(2)}(k), p_2^{(2)}(k)\right), {p'_0}^{(1)}(k)\right), \\ \left(p_0^{(2)}(k), \left(r_1^{(2)}(k), p_1^{(2)}(k)\right), \tau^{(2)}(k), \left(r_2^{(2)}(k), p_2^{(2)}(k)\right), {p'_0}^{(2)}(k)\right), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left(p_0^{(n)}(k), \left(r_1^{(n)}(k), p_1^{(n)}(k)\right), \tau^{(n)}(k), \left(r_2^{(n)}(k), p_2^{(n)}(k)\right), {p'_0}^{(n)}(k)\right),\end{aligned}$$

где номер k соответствует слогу $q(k) = a_i x_k^{(j)} y_k^{(j)} z_k^{(j)} a_i'$ слова v, $p_0^{(j)}(k)$ — номер элемента a_i в ассоциированной подгруппе $\langle a_i;\, a_i^2\rangle$, то есть принимает значения 0 или 1; аналогично ${p'_0}^{(j)}(k)$ принимает значения 0 или 1;

если $x_k^{(j)} = 1$, то есть $x_k^{(j)}$ не принимает участия в образовании слога $q(k)$, $r_1^{(j)}(k) = \gamma_k^{(j)}$, $p_1^{(j)}(k) = 0$;

$r_1^{(j)}(k) = w_1^{(j)}(k) \in \tilde{R}^{(j)} \setminus \{\gamma^{(j)}\}$, если $x_k^{(j)} \neq 1$ и $x_k^{(j)}$ есть $p_1^{(j)}(k)$ - ый слог $w_1^{(j)}(k)$

$\tau^{(j)}(k) = \beta^{(j)}$, если $y_k^{(j)} = 1$;

$\tau^{(j)}(k) = \big(v^{(j)}, i\big)$, если $y_k^{(j)}$ — слог трансформы типа $\big(v^{(j)}, i\big)$;

$r_2^{(j)}(k) = \gamma^{(j)}$, если $z_k^{(j)} = 1$;

$r_2^{(j)}(k) = w_2^{(j)}(k) \in \tilde{R}^{(j)} \setminus \{\gamma^{(j)}\}$, если $z_k^{(j)} \neq 1$ и $z_k^{(j)}$ есть $p_2^{(j)}(k)$ - ый слог слова $w_2^{(j)}(k)$.

Определение 34. *$\varphi_v(k)$ назовем типом слога $q(k)$ в слове v.*

Мощность множества всех типов не превосходит числа

$$A = 4^n \prod_{j=1}^{n} \left(2 \sum_{w^{(j)} \in W^{(j)}} L(w^{(j)}) + 1\right)^2 \left|\tilde{T}^{(j)}\right|,$$

где $\left|\tilde{T}^{(j)}\right|$ — мощность множества $\tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$. Множитель 4 есть порядок ассоциированной подгруппы в квадрате.

Обозначим через F пересечение $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$.

Лемма 33. *Если $L(v) > A$, где v — слово из (6) и $v \in F$, $v \neq 1$, то существует слово $v' \in F$, $L(v') < L(v)$, удовлетворяющее равенствам (6).*

Лемма 34. *Пусть Ω — совокупность всех слов $w \in F$, слоговая длина которых не превосходит A. Тогда существует конечное подмножество слов $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' = \{w_1, .., w_\gamma\}$ и γ конечных семейств трансформ $Z_i = \{\delta_{1i}, .., \delta_{p_i i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant \gamma$, таких, что подгруппа, порожденная множеством Ω, совпадает с подгруппой порожденной множеством $\left\{\Omega' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\gamma} Z_i\right)\right\}$.*

Лемма 35. *Пусть Ω — совокупность всех слов $w \in F$, слоговая длина которых не превосходит A. Тогда существует конечное подмножество слов $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' = \{w_1, .., w_\gamma\}$ и γ конечных семейств трансформ $Z_i = \{\delta_{1i}, .., \delta_{p_i i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant \gamma$.*

$$\langle\Omega\rangle = \left\{\Omega' \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\gamma} Z_i\right)\right\} = H_1 \cap H_2 \cap .. \cap H_n.$$

Теорема 25. *В группе $\overline{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i; a_i^2\rangle}{*} G_{ik}$ пересечение конечного числа конечно порожденных подгрупп конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие этого пересечения.*

Теорема 26. *В группе $\overline{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i; a_i^2\rangle}{*} G_{ik}$ разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

Для обобщения этого результата представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде свободного произведения двух сомножителей, объединенных по конечной циклической подгруппе следующим образом: Рассмотрим древесное произведение $k-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф T_{k-1}, $T_{k-1} \subset T$. Группу, соответствующую графу T_{k-1} обозначим через G_{k-1}. Пусть k-ый сомножитель — подгруппа G_{xy} соответствует вершине дерева-графа T, которая связана с графом T_{k-1} ребром e_t. При этом ребру e_t соответсвует циклическая подгруппа $\langle a_x; a_x^2\rangle$. Так группа G представлена как свободное произведение двух подгрупп — G_{k-1} и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\langle a_x; a_x^2\rangle$, то есть $G = G_{k-1} \underset{\langle a_x; a_x^2\rangle}{*} G_{xy}$.

Таким образом, для доказательства разрешимости проблемы пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп в группе G применимы рассуждения аналогичные рассуждениям, использованным при получении разрешимости данной проблемы в группе G.

Теорема 27. *В группе Кокстера с древесной структурой G разрешима проблема пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп порожденных подгрупп.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых подгрупп H_1 и H_2 группы G установить существует ли такое слово $z \in G$, что $z^{-1} H_1 z = H_2$.

Используя метод специального множества и метод типов, в [20] получен следующий результат:

Теорема 28. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Теорема 29. *[22] Всякая конечно порожденная подгруппа без кручения группы Кокстера с древесной структурой свободна.*

Теорема 30. *[23] Нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера с древесной структурой $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$, где $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} >$, конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.*

Теорема 31. *[24] Нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы Кокстера с древесной структурой конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного нормализатора.*

Теорема 32. *[25] Существует алгоритм, позволяющий установить для любых двух множеств конечно порожденных подгрупп $\{H_i\}$ и $\{H_i'\}$ группы G, имеется ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n} z^{-1}H_iz = H_i'$.*

Далее для групп Кокстера с древесной структурой изучается вопрос построения изолятора конечно порожденной подгруппы.

Понятие изолятора в группах, которое мы будем использовать, определено П. Г. Конторовичем.

Определение 35. *Подгруппа A группы G называется изолированной в G, если для любого элемента g из G из того, что g^k принадлежит A, $g^k \neq 1$, следует, что g принадлежит A.*

Определение 36. *Подгруппа, равная пересечению всех изолированных в G подгрупп, содержащих подгруппу A, называется изолятором или корневым замыканием A в G.*

Теорема 33. *[26] В группах Кокстера с древесной структурой изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного изолятора.*

5. n-угольные группы Кокстера

В данном разделе анализируются результаты работ [27]- [28].

Как сказано выше, группам Кокстера с образующими $a_1, a_2, ..., a_n$ можно поставить в соответствие конечный граф Г, вершинам которого соответствуют образующие a_i, а каждому ребру, соединяющему a_i и a_j — соотношение $(a_ia_j)^{m_{ij}} = 1$, $i \neq j$, $i, j \in \overline{1, n}$, других ребер нет.

Рассмотрим группы Кокстера, соответствующий граф которых состоит из n-угольников, $n \geq 3$. Назовем такие группы группами Кокстера с n-угольной структурой. Элементы матрицы Кокстера таких групп удовлетворяют условиям: $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$.

Остановимся на группах Кокстера с n-угольной структурой для $n > 3$.

Каждую группу Кокстера G_{ij} можно задать копредставлением

$$G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle,$$

где R_{ij} — множество всех нетривиальных циклически несократимых в свободной группе $\langle a_i, a_j \rangle$ слов равных единице в группе G_{ij}, копредставление группы G на образующих $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ можно записать

$$G = \langle A; R \rangle,$$

где $R = \bigcup_{1 \leq i < j}^{n} R_{ij}$.

Обозначим через $|w|$ длину слова в свободной группе $F = \langle a_1, ..., a_n \rangle$.

Лемма 36. *Если $w \in G_{ij}$, w — нетривиальное слово в свободной группе и w равно единице в группе G_{ij}, то $|w| \geq 2m_{ij}$.*

Пусть w циклически приведенное слово не равное единице в группе $F = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ и $w \in \langle R \rangle^F$. Тогда из теоремы Ван-Кампена следует, что существует R-диаграмма M с граничным циклом $\gamma = \partial M$, меткой которого является слово w, а метками областей — слова из R_{ij}, $1 < i < j < n$.

Выполним следующие преобразования в M:

(a) если области $D^1, D^2 \in M, \varphi(D^1)$ и $\varphi(D^2)$ принадлежат одной подгруппе G_{ij} и $\|\varphi(\partial D^1 \bigcap \partial D^2)\| \geq 1$, то области D^1, D^2 объединяем в одну область D, произведя свободные сокращения в слове на границе области D, которая и будет новой меткой этой области;

(б) если метка области D равна единице в $F = \langle a_1, ..., a_n \rangle$, то область D вырезаем, а ее границу склеиваем.

Через конечное число шагов получим диаграмму, инвариантную относительно указанных преобразований, причем в полученной диаграмме, если две области D^1, D^2 пересекаются, то $|\varphi(\partial D^1 \bigcap \partial D^2)| = 1$. Такая R-диаграмма называется приведенной.

Лемма 37. *Односвязная приведенная R-диаграмма M группы Кокстера с n-угольной структурой при $n > 3$ удовлетворяет условиям $C(4)$ & $T(4)$.*

Напомним, что граничная область D R-диаграммы M является простой, если $\partial M \bigcap \partial D$ есть правильная часть граничного цикла ∂M.

Определение 37. *Простая область $D \subset M$ называется деновской, если $i(D) < 2$, ($i(D)$ — внутренняя часть области D).*

Как и ранее, деновским сокращением диаграммы M будем называть удаление граничного пути $\partial M \bigcap \partial D$ деновской области D.

Диаграмма M, не содержащая деновских областей, называется R-приведенной. Граничные области приведенной односвязной диаграммы M группы Кокстера с n- угольной структурой, $n > 3$, удовлетворяют неравенству $\sum *(3 - i(D)) \geq 4$, где суммирование ведется по граничным областям.

Определение 38. *Пусть M — приведенная односвязная R-диаграммы с n-угольной структурой, $n > 3$, тогда последовательность граничных областей $D_1, D_2, ..., D_n, n \geq 2$ образуют полосу $\prod = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, если:*

1) $\forall i, 1 \leq i \leq n, \partial D_i \bigcap \partial M$ — правильная часть M_i;

2) $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$ границы областей D_i, D_{i+1} пересекаются по ребру, а $D_n \bigcap D_1$ — пустое множество;

3) $i(D_1) = i(D_n) = 2, \forall j,\ 2 < j < n, i(D_j) = 3$.

Удаление границы полосы $\partial M \bigcap \partial \prod$ является специальным R-сокращением или $\overline{R}$-сокращением.

Лемма 38. *Если M — приведенная односвязная R-диаграмма группы Кокстера с n-угольной структурой, не содержащая деновских областей, то M содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

Пусть $G_{ab} = \langle a, b | (ab)^{m_{ab}}, a^2, b^2 \rangle$ — группа Кокстера; тогда, очевидно, в G_{ab} разрешимы следующие проблемы:

1) проблема равенства и сопряженности слов;

2) проблема вхождения;

3) проблема степенной сопряженности слов.

Теорема 34. *В группе Кокстера с n-угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема равенства слов.*

Действительно, выполняя R и $\overline{R}$-сокращения, то есть, выделяя в граничном цикле $\varphi(\partial M)$ деновские области и полосы при R и $\overline{R}$-сокращениях, слоговая длина $\varphi(\partial M)$ уменьшается и через некоторое конечное число шагов выясняем равно ли w единице.

Теорема 35. *В группах Кокстера с n-угольной структурой разрешима проблема сопряжённости слов.*

При доказательстве используются кольцевые диаграммы.

Пусть M – диаграмма сопряжённости слов $w, v \in G$, γ и δ ее граничные циклы, где $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$.

Устанавим структуру кольцевой диаграммы. Предполагаем, что $\varphi(\gamma), \varphi(\delta) R$ и $\overline{R}$ несократимы, M – приведённая диаграмма. Если M — k-слойная, то есть любые два соседних слоя имеют общий граничный цикл, то все внутренние области состоят из областей D с $d(D) = 4$. Внутренние граничные циклы имеют равную слоговую длину, и каждый из циклов является некоторой перестановкой фиксированного набора из N слогов.

Лемма 39. *Если каждая граничная область D кольцевой диаграммы M имеет $i(D) = 3$, то M имеет число слоев ≤ 2.*

Теорема 36. *В группах Кокстера с n-угольной структурой, $n > 3$, разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Напомним, что группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух наборов слов $\{w_i\}, \{v_i\}, i = \overline{1, n}$, установить существует ли $z \in G$, такой, что $\&_{i=1}^{n} (z^{-1} w_i z = v_i)$.

Теорема 37. *В группах Кокстера с n-угольной структурой, $n > 3$, разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Теорема 38. *Существует алгоритм, позволяющий в группах Кокстера с n-угольной структурой, $n > 3$, для любых слов w и v установить существуют ли $n, m \in N$ и $z \in G$ такие, что $z^{-1} w^n z = v^m$.*

Рассмотрим теперь случай $n = 3$.

Теорема 39. *В группах Кокстера*

$$\overline{G}_3 = \langle a_1, a_2, a_3 | (a_1 a_2)^{m_{12}}, (a_1 a_3)^{m_{13}}, (a_2 a_3)^{m_{23}} \rangle,$$

где $m_{ij} \geq 2$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Теорема 40. *В конечно порожденной группе Кокстера $\overline{G}$ с треугольной структурой разрешима проблема равенства слов.*

Теорема 41. *В конечно порожденной группе Кокстера $\overline{G}$ с треугольной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

6. Заключение

В современной комбинаторной теории групп наиболее трудным является доказательство алгоритмической разрешимости проблем равенства, сопряженности слов и их обобщений. Поэтому решение этих проблем является важным, сложным и актуальным направлением.

Результаты, изложенные в статье, направлены на решение алгоритмических проблем в конечно порожденных группах Кокстера.

Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n-угольной структурой.

Исследования проводились под руководством д. ф.-м. н., профессора В. Н. Безверхнего, руководителя Тульской научной школы "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп".

Для решения алгоритмических проблем в группах Кокстера применялись современные комбинаторные и геометрические методы исследования: метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения R-сокращений, специальных R-сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. Vol. 35. P. 588-621.
2. Tits J. Groupes simples et geometries associees // Proc. Int. Congress Math. Stocholm. 1962. P. 197-221.
3. Schupp P. Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability // arXiv math. GR/0203020. 2002. Vol. 1. P. 1-21.
4. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.
5. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1986. — С. 26-61.
6. Kapovich I., Schup P. Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion // London Math. Soc. 2004. Vol. 88. P. 89-113.
7. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, №1(5). С. 10-33.
8. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискретная математика. 2005. Т. 17, №3. С. 123-145.
9. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, №1. С. 13-22.
10. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, №1. С. 23-37.
11. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы слабой степенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, №1. С. 38-46.
12. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискретная математика. 2008. Т. 20, №3. С. 101-110.

13. Добрынина И. В. О подгруппах в группах Кокстера экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, № 1 (25). С. 9-15.

14. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1(25). С. 17-28.

15. Инченко О. В. Проблема обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Выпуск 2. С. 40-48.

16. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп полугрупп и их приложение. Тула. ТГПИ. 1986. С. 3-22.

17. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундамент. и прикл. матем.,1998. 4:1, С. 199–222.

18. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Выпуск 2. С. 16-31.

19. Инченко О. В. О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №2(58). С. 146-162.

20. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, №3. С. 32-56.

21. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1981. С. 20-62.

22. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. №1-1. С. 5-13.

23. Добрынина И. В. О нормализаторах в некоторых группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 2 (58). С. 113-127.

24. Добрынина И. В. О построении нормализатора конечно порожденной подгруппы в группе Кокстера с древесной структурой // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2016. №8. С. 26-28.

25. Добрынина И. В., Инченко О. В. О некоторой проблеме в группах Кокстера с древесной структурой // Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости. Международная научная конференция, посвященная 75-летию Д.И. Молдаванского. Сборник трудов. Иваново: ИвГУ, 2015. С. 35-40.

26. Безверхний В.Н., Добрынина И.В. О построении изолятора подгруппы в некотором классе групп Кокстера // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань: Казанский университет, 2016. С. 108-109.

27. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина и Кокстера // Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости. Международная научная конференция, посвященная 75-летию Д. И. Молдаванского. Сборник трудов. Иваново: ИвГУ, 2015. С. 11-16.

28. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина, Кокстера с n-угольной структурой // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2016. № 8. С. 9-10.

29. Безверхний В. Н., Устян А. Е. Проблема степенной сопряженности слов в моноидах Артина большого типа //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 2001. С. 139-164.

30. Безверхний В. Н., Устян А. Е. Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сб. 2013. Т.14, №3. С. 20–33.

REFERENCES

1. Coxeter, H. S. M., 1934, “Discrete groups generated by reflections“, *Ann. Math.*, vol. 35, pp. 588-621.

2. Tits, J., 1962, “Groupes simples et geometries associees“, *Proc. Int. Congress Math. Stocholm*, pp. 197-221.

3. Schupp, P., 2002, “Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability“, *arXiv math. GR/0203020*, vol. 1, pp. 1–21.

4. Appel, K. & Schupp, P., 1983, “ Artins groups and infinite Coxter groups“, *Ivent. Math.*, , vol. 72, pp. 201-220.

5. Bezverkhnii, V. N. 1986,“ Solution of the conjugacy problem for words in Artin groups and Coxeter groups of large type,“ *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 26-61.

6. Kapovich, I. & Schup, P., 2004, “Bounded rank subgroups of Coxeter groups, Artin groups and one-relator groups with torsion“, *London Math. Soc.*, vol. 88, pp. 89-113.

7. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003,“Solution of the conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Chebyshevskii Sb.*, , vol. 4, no. 1, pp. 10–33.

8. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2005, “Solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 17, no. 3, pp. 123–145.

9. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, “On elements of finite order in Coxeter groups of large type“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 13-22.

10. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2004, “Solution the problem of occurrence in a cyclic subgroup in the Coxeter groups of large type“, *Izvestia of the Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 23-37.

11. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2004, “Solution of the power conjugacy search problem in a cyclic subgroup in in Coxeter groups of large type“, *Izvestia of the Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 38-46.

12. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2008,“ A solution of the power conjugacy problem for words in the Coxeter groups of extra large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 20, no. 3, pp. 101–110.

13. Dobrynina, I. V., 2008, “On subgroups in Coxeter groups of extra large type“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 9-15.

14. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko O. V., 2008, “ Centralizer of elements of finite order of a finitely generated Coxeter group with a tree-structure“ , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 17-28.

15. Inchenko O. V. 2008, “ Problem of generalized conjugacy of words in Coxeter’s groups with tree-structure“ , *Izvestia of Tula state University. Natural science*, no. 2, pp. 40-48.

16. Bezverkhnii, V. N., 1986, “ Solution of the problem of inclusion in some class of groups with one relation “ , *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 3-22.

17. Bezverkhnii, V. N., 1998, “ On the intersection subgroups HNN-groups “ , *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 199-222.

18. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko O. V., 2009,“ Problem of intersection of finite defined subgroups in Coxeter groups with tree-structure“ , *Izvestiya of Tula State University. Natural sciences*, no. 2, pp.16-31.

19. Inchenko O. V., 2016, “ On problem of intersection of the adjacency classes of finitely generated subgroups of Coxeter group with tree-structure “, *Chebyshevskii Sb.*, pp. 146-162.

20. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko O. V., 2010, “ Conjugacy problem of subgroups in finitely generated Coxeter groups with tree-structure “ , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 11, no. 3, pp. 32-56.

21. Bezverkhnii, V. N. 1981, “Solution of the problem of inclusion of subgroups in one class HNN-groups “ *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 20-62.

22. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2014, “On freedom problem in Coxeter groups with tree-structure“, *Izvestiya of Tula state University. Natural science*, no. 1-1, pp. 5-13.

23. Dobrynina, I. V., 2016, “On normalizers in some Coxeter groups“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 2, pp. 113–127.

24. Dobrynina, I. V., 2016, “On construction of Normalizer of finitely generated subgroups in the Coxeter group with tree-structure“, *Research in algebra, number theory, functional analysis and related issues*, no. 8, pp. 26-28.

25. Dobrynina, I.V. & Inchenko, O. V., 2015, “On some problem in Coxeter groups with a tree structure“, *Algorithmic problems in algebra and the theory of computation. International scientific conference dedicated to 75-th anniversary of D. I. Moldavanskii*, Ivanovo: IVGU, pp. 35-40.

26. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2016, “On construction of isolator of subgroup in some class of Coxeter groups“, *Proceedings of the international conference on algebra, analysis and geometry*, Kazan: Kazan University, pp. 108-109.

27. Bezverkhnii, V. N.& Bezverkhnyaya, N. B., 2015, “Problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups and Coxeter“, *Algorithmic problems in algebra and the theory of computation. International scientific conference dedicated to 75-th anniversary of D. I. Moldavanskii*, Ivanovo: IVGU, pp. 11-16.

28. Bezverkhnii, V. N. & Bezverkhnyaya, N. B., 2016, "Problem of equality and conjugacy of words in Artin groups, Coxeter n-pointed structure", *Research in algebra, number theory, functional analysis and related issues*, no 8, pp. 9-10.

29. Bezverkhnii, V. N. & Ustyan, A. E., 2001, "Problem of power conjugation of the words in the Artin monoids of large type", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula:TSPU, pp. 139-164.

30. Bezverkhnii, V. N. & Ustyan, A. E., 2013, "Generalizations of theorems of Magnus and Greendlinger", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 14, no. 3, pp. 20–33.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

Получено 14.09.2016 г.
Принято в печать 12.12.2016 г.