ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 4.

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2016-17-4-11-22

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. Б. Беднова (г. Москва)

Аннотация

В данной работе рассматривается одномерная нестационарная задача теплопроводности, моделирующая процесс быстрого локального нагрева образца балочного типа по боковой поверхности. При этом характер нагрева таков, что можно выделить единственное определенное направление, в котором распространяется тепло.

Температурные поля определяются приближенным методом, основанным на идее теплового фронта. Решение ищется в виде степенного ряда по координате с коэффициентами, зависящими от времени. Границы фронта распространения тепла как функции времени определяются из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности.

Рассматриваемые температурные поля возникают во многих технологических процессах, например, при лазерной обработке материалов, когда из-за больших градиентов температур могут возникать температурные напряжения, приводящие к микрорастрескиванию внутренних слоев или разрушению элементов конструкций. Аналитический вид решения задачи теплопроводности позволяет получить аналитические выражения для температурных напряжений и в дальнейшем облегчает анализ результатов.

В работе получены решения задач с граничными условиями первого и второго родов для двух монотонных и одной немонотонной зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры. Проведено сравнение полученного решения нестационарной линейной задачи с точным и показана приемлемость метода для дальнейшего использования.

Ключевые слова: физическая нелинейность уравнения теплопроводности, приближенное решение уравнения теплопроводности, тепловой фронт.

Библиография: 16 названий.

ON A METHOD FOR APPROXIMATE SOLUTION NONLINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION

V. B. Bednova (Moscow)

Abstract

In this paper a one-dimensional non-stationary heat conduction problem, modeling the process of rapid local heating of the sample beam type on the lateral surface is considered. The character of heating is such that it is possible to allocate only a certain directionof the heat propagation.

Temperature fields are determined by an approximate method based on the idea of the thermal front. The solution is sought in the form of a power series in the coordinate with coefficients depending on time. The boundaries of the front heat distribution as a function of time are determined by the condition of the integral satisfaction of the heat conduction equation.

Considered temperature fields arise in many industrial processes, such as laser material processing, when due to large temperature gradients can arise thermal stresses, leading to microcracking inner layers or the destruction of structural elements. Analytical view of the heat conduction problem's solution allows to obtain analytical expressions for the thermal stresses and further facilitates the results analysis.

The paper presents the solution of problems with boundary conditions of the first and second kinds for two monotonic and one non-monotonic dependencies of the thermal conductivity coefficient on temperature. The approximate solution and the exact solution of the non-stationary linear problem are compared and shows the suitability of the method for future use.

Keywords: Physical non-linearity of the heat conduction equation, approximate solution of the heat conduction equation, thermal front.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Известно, что классическое уравнение притока тепла при описании процессов теплопередачи механизмом теплопроводности дает не соответствующую действительности бесконечную скорость распространения возмущений. Кроме того, во многих прикладных задачах граничные условия невозможно задать с высокой степенью точности. Погрешность вполне может достигать $10-20\%$. Поэтому в реальных процессах актуальным может являться построение приближенных решений, удовлетворяющих некоторым интегральным энергетическим условиям.

В работе предлагается приближенный метод решения нелинейного уравнения теплопроводности с различными зависимостями коэффициента теплопроводности от температуры. Метод основывается на работах [1, 9, 14], развитых для линейного уравнения теплопроводности. В работе [15] с помощью приближенного решения уравнения теплопроводности показана возможность возникновения зон макроразрушения при локальном импульсном нагреве диска.

Рассматривается обезразмеренное уравнение теплопроводности

$$T_\tau = (K(T)T_x)_x,$$

где T, τ, x — соответственно безразмерные температура, время, координата, $K(T)$ — безразмерный коэффициент теплопроводности. Обезразмеривание задачи теплопроводности проведено в работе [8], зависимость размерной температуры от безразмерной имеет вид $T = \frac{\theta-\theta_0}{\theta_m-\theta_0}$, где θ_0 — температура среды, θ_m — температура плавления материала. Во всех задачах начальная (лабораторная) температура $T|_{t=0}$ равна нулю. Также при решении используется понятие границы теплового фронта $l(\tau)$ [14, 15, 16], которую можно интерпретировать как линию уровня пренебрежимо малой температуры. Функция $l(\tau)$ определяется из условия интегрального удовлетворения уравнению теплопроводности.

2. Построение приближенных решений линейной задачи теплопроводности

Рассмотрим линейную задачу ($K(T) = 1$), моделирующую процесс нагрева балки по границе $x = 0$ с постоянной по времени температурой $T_0 = 1$, причем на границе теплового фронта $l(\tau)$ температура $T(\tau, x)$ и поток $T_x(\tau, x)$ считаются равными нулю:

$$\begin{cases} T_\tau &= T_{xx} \\ T|_{x=0} &= 1 \\ T|_{x=l(\tau)} &= 0 \\ T_x|_{x=l(\tau)} &= 0. \end{cases}$$

Перейдем от переменных (τ, x) к переменным (t, z) следующим образом:

$$\begin{cases} z = x - l(\tau) \\ t = \tau. \end{cases} \tag{1}$$

Преобразования производных в этом случае:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z};\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2};\ \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - l'(t)\frac{\partial}{\partial z}.$$

В новых переменных задача имеет вид

$$\begin{cases} T_t - l'(t)T_z = T_{zz} \\ T|_{z=-l(t)} = 1 \\ T|_{z=0} = 0 \\ T_z|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Точные решения уравнения теплопроводности хорошо аппроксимируются степенными функциями или многочленами, содержащими три-четыре слагаемых [5]. Поэтому приближенные решения будем искать в виде степенных рядов по координате z, ограниченных сначала до трех, потом — до четырех слагаемых.

Сначала возьмем

$$T(t,z) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Из граничных условий задачи (2) при учете (3) получаем $u_0 = 0$; $u_1 = 0$; $u_2 = \frac{2}{l^2(t)}$, откуда $T(t,z) = \frac{z^2}{l^2(t)}$ при $-l(t) < z < 0$.

Для нахождения $l(t)$ подставим данное решение в уравнение из (2), проинтегрируем полученное выражение в пределах от $-l(t)$ до 0 и приравняем к нулю:

$$\int\limits_{-l(t)}^{0} \left(-\frac{2l'(t)}{l^3(t)}z^2 - \frac{2l'(t)}{l^2(t)}z - \frac{2}{l^2(t)}\right) dz = -\frac{2l'(t)}{l^3(t)}\frac{l(t)^3}{3} + \frac{2l'(t)}{l^2(t)}\frac{l^2(t)}{2} - \frac{2}{l^2(t)}l(t) = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение на $l(t)$: $ll' = 6$, откуда $\frac{l^2}{2} = 6t + c$. Так как $l(0) = 0$, то $c = 0$ и $l(t) = 2\sqrt{3t}$.

В итоге, когда ряд ограничен тремя членами, в прогретой зоне получаем $T(t,z) = \frac{z^2}{12t}$, или

$$T(\tau, x) = \frac{(x - 2\sqrt{3\tau})^2}{12\tau}.$$

Теперь будем искать решение в виде

$$T(t,z) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)\frac{z^2}{2} + u_3(t)\frac{z^3}{6}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

В данном случае у нас четыре неизвестных функции u_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

При тех же граничных условиях получаем

$$u_0 = 0;\ u_1 = 0;\ u_2\frac{l^2(t)}{2} - u_3\frac{l^3(t)}{6} = 1. \tag{5}$$

Четвертое условие получим, продифференцировав уравнение теплопроводности задачи (2) по z и положив $z = 0$ [2]:

$$T_{tz} - l'(t)T_{zz} = T_{zzz},$$

откуда при учете (4) и (5) $-2l'(t)u_2 = 6u_3$.

Таким образом $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{3}{l^2(3+ll')}$, $u_3 = -\frac{l'}{l^2(3+ll')}$ и решение (2) при $-l(t) < z < 0$ имеет вид

$$T(t,z) = \frac{3}{l^2(3+ll')}z^2 - \frac{l'}{l^2(3+ll')}z^3.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем выражение для подынтегральной функции

$$L(T) = -\frac{6}{l^2(3+ll')} - \frac{3l'}{l^2(3+ll')}z + \frac{3l^2l'^3 - 18l' - 3l^2ll''}{l^3(3+ll')^2}z^2 - \frac{3ll'' - 3ll'^3 - 6l'^2}{l^3(3+ll')^2}z^3,$$

интегрируя которое по z от $-l(t)$ до 0 и приравнивая к 0 получаем уравнение на $l(t)$:

$$l^3l'^3 - l^3l'' - 30ll' - 72 = 0. \tag{6}$$

Данное дифференциальное уравнение можно решить, сначала понизив порядок дифференцирования с помощью замены $l' = p(l), l'' = p'(l)p(l)$. Получим дифференциальное уравнение $l^3pp' - l^3p^3 + 30lp + 72 = 0$. Решение этого дифференциального уравнения получаем в неявном виде: $lnl - c_1 - \frac{1}{3}ln(pl+3) - \frac{1}{15}ln(pl-6) + \frac{2}{5}ln(pl+4) = 0$. Данный вид позволяет получить достаточно точную зависимость функции теплового фронта от температуры.

Также для нахождения $l(t)$, удовлетворяющей (6), можно предположить, что $l(t) = k\sqrt{t}$. Тогда, подставив $l(t)$ в (6), получим уравнение на k: $k^6 + 2k^4 - 120k^2 - 576 = 0$, откуда $k = 2\sqrt{3}$ и $l(t) = 2\sqrt{3t}$.

Тогда

$$T(t,z) = \frac{1}{36t}z^2 - \frac{1}{36\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}z^3,$$

или, перейдя к переменным (τ, x)

$$T(\tau,x) = \frac{1}{36\tau}(x - 2\sqrt{3\tau})^2 - \frac{1}{36\sqrt{3}\tau^{\frac{3}{2}}}(x - 2\sqrt{3\tau})^3. \tag{7}$$

Проведем сравнение полученных приближенных решений с точным решением аналогичной задачи для полуограниченного твердого тела [8]. Данное сравнение корректно, потому что нас интересуют промежутки времени, когда тело еще не прогрелось полностью и температура на второй границе практически не изменилась. В этом случае применимо решение для полуограниченного твердого тела:

$$T(\tau,x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}} \exp\left(-\xi^2\right)d\xi. \tag{8}$$

Сравнение приближенных решений с точным показано на рис. 1. Из графика видно, что приближенные и точное решения отличаются незначительно.

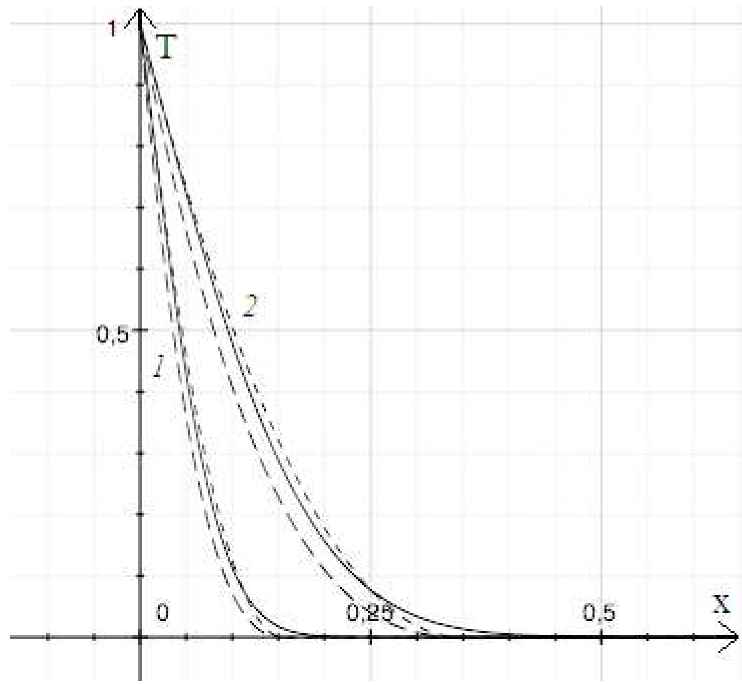

Рис. 1: Безразмерная температура в моменты безразмерного времени $\tau = \frac{1}{100}$ — *1*, $\tau = \frac{1}{10}$ — *2*. Сплошная линия — точное решение (8), короткий пунктир — приближенное решение (7), длинный пунктир — приближенное решение (6).

3. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентом $K(T) = T$

1. В работе [2] доказывается существование и единственность аналитического решения задачи

$$\begin{cases} T_\tau = (K(T)T_x)_x \\ T|_{x=l(\tau)} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

описывающего распространение тепловой волны по холодному фону. Коэффициент теплопроводности берется в виде $K(T) = \alpha T^\sigma$, α и σ — константы.

Решение задачи (9) строится в виде бесконечного ряда по координате.

Найдем первые четыре члена ряда по методу, предложенному в [2] в случае $K(T) = T$ при $\alpha = 1$ и $\sigma = 1$.

Задача теплопроводности (9) после замены переменных (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=0} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Температуру ищем в виде ряда (4). Из граничного условия следует, что $u_0 = 0$. Далее, уравнение задачи (10) при $z = 0$ и учете найденного $u_0 = 0$ переходит в соотношение $u_1 = -l'$. Для нахождения u_2 и u_3 уравнение задачи (10) дифференцируется соответственно один и два раза по z, полагается $z = 0$ и, при учете уже найденных u_i, получаем соотношения $u_1' = (3u_1 + l')u_2$ и $u_2' - l'u_3 = 4u_1u_3 + 3u_2^2$.

После преобразований получаем

$$u_1 = -l', \; u_2 = \frac{l''}{2l'}, \; u_3 = \frac{5l''^2 - 2l'l'''}{12l'^3}.$$

Таким образом функция температуры по методу, описанному в работе [2] в зоне $-l(t) < z < 0$ имеет вид

$$T(t,z) = -l'z + \frac{l''}{2l'}\frac{z^2}{2} + \frac{l''^2 - 2l'l'''}{12l'^3}\frac{z^3}{3}. \tag{11}$$

Функцию $l(t)$ для (11) можно найти, как и в случае линейной задачи теплопроводности, решенной выше. Если оставить только первые два слагаемых в (11), то есть взять

$$T(t,z) = -l'z + \frac{l''}{2l'}\frac{z^2}{2}$$

и перейти к координатам (τ, x), получим

$$T(\tau,x) = ll' + \frac{l^2l''}{4l'} - l'x - \frac{ll''}{2l'}x + \frac{l''}{4l'}x^2.$$

Проинтегрировав выражение $L(T) = T_\tau - T_x^2 - TT_{xx}$ от 0 до $l(\tau)$ по координате x и приравняв результат к нулю, получим дифференциальное уравнение $2l'l''' - 5l''^2 = 0$. Если в него подставить функцию $l = k\tau^\alpha$, получим $\alpha = \frac{1}{3}$ и $l(\tau) = k\tau^{1/3}$, откуда

$$T(\tau,x) = \frac{k^2}{6\tau^{1/3}} - \frac{x^2}{6\tau}.$$

Такое решение может описать ситуацию с изначально неравномерно прогретым телом, когда процесс состоит только в выравнивании температуры по всему образцу.

2. Теперь рассмотрим задачу о нагреве с заданным постоянным тепловым потоком q_{00} на нагреваемой поверхности с предположением, что на границе теплового фронта температура равна нулю:

$$\begin{cases} T_\tau &= T_x^2 + TT_{xx} \\ T|_{x=l(\tau)} &= 0 \\ -TT_x|_{x=0} &= q_{00}. \end{cases}$$

Перейдя к координатам (t,z), получим

$$\begin{cases} T_t - l'T_z &= TT_{zz} + T_z^2 \\ T|_{z=0} &= 0 \\ -TT_z|_{z=-l} &= q_{00} \end{cases} \tag{12}$$

Температуру будем искать в виде ряда (3). В качестве третьего условия берем выражение $T_t - l'T_z = TT_{zz} + T_z^2$ при $z=0$. Получим:

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ (u_1 l - u_2\frac{l^2}{2})(u_1 - u_2 l) &= q_{00} \\ \left[\begin{array}{ll} u_1 = & 0 \\ u_1 = & -l' \end{array}\right. \end{cases}$$

При $u_1 = 0$ получим $T(t,z) = \sqrt{\frac{q_0}{2l^3}}z^2$, или $T(\tau,x) = \sqrt{\frac{q_{00}l}{2}}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$.

При $u_1 = -l'$ получаем

$$T(t,z) = -l'z + \frac{-3ll' + \sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l}}{2l^2}\frac{z^2}{2}.$$

Уравнение на функцию теплового фронта можно получить из условия

$$q_{00}t = \int\limits_{-l(t)}^{0} T\, dz,$$

откуда

$$8l^4l'^2 - 72q_{00}tl^2l' = 8q_{00}l^3 - 144q_{00}t^2.$$

Второй вариант для нахождения $l(t)$ — интегрально удовлетворить уравнению теплопроводности

$$\int\limits_{-l(t)}^{0} \left(T_t - l'T_z - T_z^2 - TT_{zz}\right) dz = 0.$$

В этом случае получаем

$$l^3l'l'' + 3l^2l''\sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l} + 2l^2l'^3 + 6ll'^2\sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l} + 12q_{00}ll' -$$
$$-12q_{00}\sqrt{l^2l'^2 + 8q_{00}l} = 0.$$

4. Построение приближенных решений задач теплопроводности с коэффициентом $K(T) = 1 - T$

1. Рассматривается задача с коэффициентом теплопроводности $K(T) = 1 - T$. На нагреваемой поверхности температура считается равной единице, на границе теплового фронта — нулю:

$$\begin{cases} T_\tau &= -T_x^2 + T_{xx} - TT_{xx} \\ T|_{x=l(\tau)} &= 0 \\ T|_{x=0} &= 1. \end{cases}$$

Сделаем замены переменных $u = 1 - T$ и (1), получим

$$\begin{cases} u_t - l'(t)u_z &= uu_{zz} + u_z^2 \\ u(t,z)|_{z=0} &= 1 \\ u|_{z=-l(t)} &= 0. \end{cases} \tag{13}$$

Ищем решение в виде

$$u(z,t) = \begin{cases} u_0(t) + u_1(t)z + u_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t) < z < 0; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где необходимо определить три неизвестных функции времени. В качестве третьего условия будет уравнение системы (13), в котором положим $z = 0$.

Из граничных условий получаем

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{\sqrt{(2+ll')^2+8} - ll' - 2}{2l} \\ u_2 &= \frac{\sqrt{(2+ll')^2+8} - ll'}{2l^2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$T(t,z)=\begin{cases}-\frac{\sqrt{(2+ll')^2+8}-ll'-2}{2l}z-\frac{\sqrt{(2+ll')^2+8}-ll'}{2l^2}z^2, & \text{если } -l(t)<z<0;\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

2. Теперь рассмотрим случай, когда на поверхности нагрева задан постоянный начальный поток q_{00}. Предполагается, что на границе теплового фронта температура и тепловой поток равны нулю. После замены переменных аналогично (12) получим

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t-l'(t)u_z & = & uu_{zz}+u_z^2\\ uu_z|_{z=-l} & = & q_{00}\\ u_z|_{z=0} & = & 0\\ u|_{z=0} & = & 1.\end{array}\right.$$

При данных граничных условиях получаем $u_0=1$, $u_1=0$, $u_2=\frac{-1-\sqrt{1-2q_{00}l}}{l^2}$.
Функция температуры после возврата к переменным (T,τ,x) будет иметь вид

$$T(\tau,x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-2q_{00}l}}{2l^2}(x-l)^2, & \text{если } 0<x<l(\tau);\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Функция теплового фронта ищется из условия

$$\int\limits_0^{l(\tau)}\left(T_\tau-T_x^2+(1-T)\,T_{xx}\right)\,dx=0,$$

откуда

$$(-9q_{00}l+4)ll'^2+12(2q_{00}l-1)l'+36q_{00}(-2q_{00}l+1)=0. \tag{14}$$

Решение дифференциального уравнения (14) имеет вид

$$l^3-6\tau l+18q_{00}\tau^2=0.$$

5. Построение приближенного решения нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом $K(T)=\frac{2T}{1+T^2}$

1. Рассмотрим задачу

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_\tau & = & (K(T)T_x)_x\\ T(t,x)|_{x=l(\tau)} & = & 0\end{array}\right. \tag{15}$$

с условием $K(T)|_{x=l(\tau)}=0$.
После замены переменных (1) получаем

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_t & = & l'(t)T_z+K'(T)T_z^2+K(T)T_{zz}\\ T(t,z)|_{z=0} & = & 0.\end{array}\right. \tag{16}$$

Строим решение в виде ряда

$$T(t,z)=\begin{cases}T_0(t)+T_1(t)z+T_2(t)\frac{z^2}{2}, & \text{если } -l(t)<z<0;\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases} \tag{17}$$

где по условию $T_0(t) = 0,\ T_0'(t) = 0$. В уравнение в системе (16) подставляем $z = 0$. Получаем

$$l'(t)T_1 + K'(T)T_1^2 = 0,$$

откуда

$$T_1(t) = -\frac{l'(t)}{K'(T_0)},\ T_1'(t) = \frac{K''(T_0)l'(t) - l''(t)K'(T_0)}{K'^2(T_0)}. \tag{18}$$

Дифференцируем уравнение в системе (16) по z:

$$T_z' = l'T_{zz} + 2K'T_zT_{zz} + K''T_z^3 + KT_{zzz} + K'T_zT_{zz}.$$

Подставляем $z = 0$ и (17):

$$T_1' = l'T_2 + 3K'T_1T_2 + K''T_1^3. \tag{19}$$

Подставляем в (19) $T_1'(t)$ и $T_1(t)$ из (18). Получаем

$$T_2 = \frac{K'^2l'' - K''l'^3 - K'K''l'}{2l'K'^3}$$

и в итоге при $-l(t) < z < 0$

$$T(t,z) = -\frac{l'(t)}{K'(T_0)}z + \frac{K'^2l'' - K''l'^3 - K'K''l'}{2l'K'^3}\frac{z^2}{2}. \tag{20}$$

Выражение (20) дает общий вид зависимости температуры от времени и координаты для коэффициента теплопроводности, удовлетворяющего условию $K(T)|_{x=l(\tau)} = 0$.

2. Теперь решим задачу теплопроводности (15) с коэффициентом $K(T) = \frac{2T}{1+T^2}$, опираясь на (20). Поскольку $K'(T) = \frac{2(1-T^2)}{(1+T^2)^2}$, система (16) примет вид

$$\begin{cases} T_t &= l'(t)T_z + \frac{2(1-T^2)}{(1+T^2)^2}T_z^2 + \frac{2T}{1+T^2}T_{zz} \\ T(t,z)|_{z=0} &= 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем $T_1 = -\frac{l'}{2}$, $T_2 = \frac{l''}{4l'}$, то есть $T = -\frac{l'}{2}z + \frac{l''}{4l'}\frac{z^2}{2}$.

Для нахождения $l(t)$ предположим, что на нагреваемой поверхности задана температура $T = 1$, то есть выполнено соотношение $T = \frac{ll'}{2} + \frac{l^2l''}{8l'} = 1$, откуда получаем дифференциальное уравнение

$$4ll'^2 - 8l' + l^2l'' = 0. \tag{21}$$

Получаем равенство на $l(t)$:

$$t - \frac{3}{16}l^2 - \frac{s^2}{8}\log(l+s) + \frac{s^2}{16}\log\left(l^2 - sl + s^2\right) + \frac{s^2\sqrt{3}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{s\sqrt{3}}l - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 = 0,$$

где $s = \frac{(3C)^{\frac{1}{3}}}{2}$, а константы C, C_1 связаны зависимостью из условия $l(0) = 0$.

Также можно найти вид функции границы теплового фронта, подставив в (21) $l(t) = k\sqrt{t}$. Тогда $k = \frac{4}{\sqrt{3}}$ и

$$T(t,z) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3t}}z - \frac{1}{16t}z^2, & \text{если } -\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{3}} < z < 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

6. Заключение

В настоящей работе предложены приближенные решения одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и второго родов. В нелинейном случае решения получены для двух монотонных зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры и одной немонотонной. В линейном случае проведено сравнение построенного решения с точным, из которого видно, что точность приближенного метода не превышает точности задания физических констант и граничных условий в прикладных задачах. Аналитический вид полученных решений облегчает анализ результатов и позволяет получить аналитические выражения для температурных напряжений.

Автор приносит благодарность М. В. Юмашеву за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв.АН СССР, ОТН. 1954. №9. С. 35—49.

2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна. – М.: Физматлит, 2003. – 88 с.

3. Бахарев М. С., Миркин Л. И., Шестериков С. А., Юмашева М. А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 224 с.

4. Беднова В. Б. Приближенный метод определения температурного поля при быстром локальном нагреве образца // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова. 2013. С. 73–76.

5. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

6. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференциальные уравнения. Октябрь 1981. Т. XVII. №10. С. 1826–1841.

7. Калашников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений // Вестник Московского университета. 1972. №6. С. 45–49.

8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

9. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 178 с.

10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

11. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математическая. 1958. Т. 22. С. 667–704.

12. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1963. – 252с.

13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

14. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей // Институт механики МГУ. Научные труды. Деформирование и разрушение твердых тел. Вып. 23. – М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 15—20.

15. Юмашев М. В., Беднова В. Б., Вергазов М. М., Юмашева М. А. Разрушение хрупких материалов в условиях локального воздействия на поверхность энергетическим потоком // Машиностроение и инженерное образование. 2014. №4. С. 52—58.

16. Юмашев М. В., Юмашева М. А., Краснова П. А. Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность // Вестник Московского университета. 2010. №4. С. 44—54.

REFERENCES

1. Barenblatt, G. I. 1954, ”On some approximate methods in the theory of one-dimensional non-stationary filtration in the elastic drive regime”, *Izv. AN SSSR, OTN,* no. 9, pp. 35—49.

2. Bautin, S. P. 2003, ”Analiticheskaya teplovaya volna”, [Analytical heat wave], Fizmatlit, Moscow, 88p.

3. Baharev, M. S., Mirkin, L. I., Shesterikov, S. A. & Yumasheva M. A. 1988, ”Struktura i prochnost’ materialov pri lazernyh vozdejstviyah”, [Structure and strength of materials with the laser action], Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow 224p.

4. Bednova, V. B. 2013, ”An approximate method for determining the temperature field with rapid local heating of the sample”, *Trudy konferencii-konkursa molodyh uchenyh NII mekhaniki MGU imeni M.V.Lomonosova*, pp. 73–76.

5. Boley, B. A. & Weiner J. H. 1964, ”Teoriya temperaturnyh napryazhenij”, [Theory of Thermal Stresses], *Mir, Moscow,* 517p.

6. Galaktionov, V. A., Kurdyumov, S. P., Mihajlov, A. P. & Samarskij, A. A. 1981, ”Heat localization in nonlinear media”, *Differencial’nye uravneniya*, Vol. XVII, no. 10, pp. 1826–1841.

7. Kalashnikov, A. S. 1972, ”On the equations of non-stationary filtration type with infinite speed of propagation of disturbances”, *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 6, pp. 45–49.

8. Carslaw, H.S. & Jaeger, J. C. 1964, ”Teploprovodnost’ tverdyh tel”, [Conduction of Heat in Solids], Nauka, Moscow, 488p.

9. Lokoshchenko, A. M. 2000, ”Polzuchest’ i dlitel’naya prochnost’ metallov v agressivnyh sredah”, [The creep and the long-term strength of metals in the aggressive media], Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow, 178p.

10. Lykov, A. V. 1967, ”Teoriya teploprovodnosti”, [Theory of heat conduction], Vysshaya shkola, Moscow, 599p.

11. Olejnik, O. A., Kalashnikov, A. S. & Chzhou Yuj-Lin’ 1958, ”The Cauchy problem and boundary value problems for equations of non-stationary filtration”, *Izv. AN SSSR, Seriya matematicheskaya,* Vol. 22, pp. 667–704.

12. Parcus, H. 1963, ”Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya”, [Non-stationary thermal stresses], Gosudarstvennoe izd-vo fiziko-matematicheskoj literatury, Moscow, 252p.

13. Timoshenko, S. P. & Goodier, J. 1975, ”Teoriya uprugosti”, [Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 576p.

14. Shesterikov, S. A. & Yumasheva, M. A. 1973, ”An approximate method for estimating non-stationary temperature fields”, *Institut mekhaniki MGU. Nauchnye trudy. Deformirovanie i razrushenie tverdyh tel. no. 23, Izd-vo Mosk. un-ta, Moscow,* pp. 15—20.

15. Yumashev, M. V., Bednova, V. B., Vergazov, M. M. & Yumasheva, M. A. 2014, ”The destruction of brittle materials under local effect on the surface energy flow”, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, no. 4, pp. 52—58.

16. Yumashev, M. V., Yumasheva, M. A. & Krasnova, P. A. 2010, ”Modeling of the body heating process with intensive exposure to heat to the surface”, *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 44—54.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Получено 25.07.2016 г.
Принято в печать 13.12.2016 г.