

УДК 514.174.5

ОЦЕНКА ЧИСЛА $p2$ -РАЗБИЕНИЙ ПЛОСКОСТИ НА ПОЛИМИНО ЗАДАННОЙ ПЛОЩАДИ¹

А. В. Шутов (г. Владимир), Е. В. Коломейкина (г. Москва)

Аннотация

В работе рассматривается задача о числе $p2$ -разбиений плоскости на полимино заданной площади. Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. В настоящее время активно исследуются различные перичислительные комбинаторные задачи, связанные с полимино. Представляет интерес подсчет числа полимино определенных классов, а также подсчет числа разбиений конечных фигур или всей плоскости на полимино определенного типа. Разбиение называется $p2$ -разбиением, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом или центральной симметрией, причем это преобразование переводит все разбиение в себя. $p2$ -разбиения являются частным случаем правильных разбиений плоскости. Пусть $t(n)$ – число $p2$ -разбиений плоскости на полимино площади n , решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$. Доказано, что справедливо неравенство $C_1 2^n \leq t(n) \leq C_2 n^4 (2.68)^n$. При доказательстве нижней оценки использована явная конструкция, позволяющая построить требуемое число $p2$ -разбиений плоскости. Доказательство верхней оценки основано на критерии Конвея существования $p2$ -разбиений плоскости, а также на теории самонепересекающихся блужданий на квадратной решетке. Ранее аналогичные результаты были получены авторами в задаче подсчета числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади, а также в задаче подсчета числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино.

Ключевые слова: разбиения, правильные разбиения, кристаллографические группы, $p2$ -разбиения, полимино, самонепересекающиеся блуждания.

Библиография: 28 названий

THE ESTIMATION OF THE NUMBER OF $P2$ -TILINGS OF A PLANE BY A GIVEN AREA POLYOMINO

A. V. Shutov, E. V. Kolomeykina

Abstract

We consider the problem about a number of $p2$ -tilings of a plane by a given area polyominoes. A polyomino is a connected plane geometric figure formed by joining one or more unit squares edge to edge. At present, various combinatorial enumeration problems connected to the polyomino are actively studied. There are some interesting problems on enumeration of various classes of polyominoes and enumeration of tilings of finite regions or a whole plane by polyominoes. The tiling is called $p2$ -tiling, if each tile can be mapped to any other tile by the translation or the central symmetry, and this transformation maps the whole tiling to itself. $p2$ -tilings are special case of regular plane tilings. Let $t(n)$ be a number of $p2$ -tilings of a plane by a n -area polyomino such that the lattices of periods of these tilings are sublattices of $\mathbb{Z}^2$. It is proved that following inequality is true: $C_1 2^n \leq t(n) \leq C_2 n^4 (2.68)^n$. To prove the lower

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 14-11-00433.

bound we use the exact construction of required tilings. The proof of the upper bound is based on the Conway criterion of the existence of $p2$ -tilings of a plane. Also, the upper bound depends on the theory of self-avoiding walks on the square lattice. Earlier similar results were obtained by authors for the number of lattice tilings of a plane by a given area polyomino (it's more simple type of a plane tilings by polyomino), and for the number of lattice tilings of the plane by centrosymmetrical polyomino.

Keywords: tilings, regular tilings, crystallographic groups, $p2$ -tilings, polyomino, self-avoiding walks.

Bibliography: 28 titles.

1. Введение

Полимино, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов (клеток), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Пример полимино изображен на рис. 1.

Это понятие и сам термин полимино были введены в 1953 году С. В. Голомбом [9], [22], и с тех пор привлекли внимание как любителей занимательной математики, так и профессиональных исследователей всего мира.

Большой вклад в популяризацию математических задач, связанных с полимино, внес М. Гарднер, который в своей рубрике "Математические игры" в журнале *Scientific American* опубликовал серию статей, обсуждающих эти проблемы, а затем включил соответствующие главы в свои книги [18]- [21].

Одной из основных задач было определение числа a_n всевозможных полимино (разных с точностью до трансляции) заданной площади n и числа b_n всевозможных типов полимино (разных с точностью до движения — трансляций, поворотов, отражений), состоящих из заданного числа клеток. Легко понять, что $b_n \leq a_n \leq 8b_n$. Кларнер доказал [11] существование отличной от нуля константы роста $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n}$, что означает экспоненциальный характер роста чисел a_n и b_n . Сейчас доказано, что $\alpha > 4$ [2] и $\alpha < 4,65$ [12]. В работе [10] вычислены точные значения a_n для $n \leq 56$.

Учитывая сложность задачи оценки a_n или b_n , были предприняты попытки выделить классы полимино особого вида, для которых такие оценки возможны. Подробный обзор работ по подсчету числа классов полимино можно найти в [3].

Одной из самых важных и пока не решенных задач, связанных с полимино, является нахождение необходимого и достаточного условия существования разбиения плоскости на заданные полимино. В работе [21] найдены все классы полимино, разбивающие плоскость, с числом клеток $n \leq 7$. Позднее для $n \leq 9$ аналогичное исследование было проведено в [16]. В работах [15] и [14] для всех полимино площади n с $n \leq 14$ и $n \leq 25$ соответственно найдены периодические разбиения плоскости на данное полимино с минимальным числом клеток в фундаментальной области решетки периодов или доказано отсутствие периодических разбиений на заданное полимино.

Хорошо известно, что задача о существовании алгоритма, позволяющего установить, существует ли разбиение плоскости из данного конечного набора фигур-прототайлов, тесно связана с задачей о существовании непериодического разбиения из заданного набора прототайлов. Амман, Грюнбаум и Шепард [1] показали, что существует набор из 3 полимино, разбивающих плоскость только непериодически. Как следствие, ими было показано, что задача об определении того, существует ли разбиение плоскости на полимино из заданного набора, алгоритмически неразрешима. Неизвестно, является ли алгоритмически разрешимой задача о

существовании разбиения плоскости на заданное полимино. Это связано с тем, что в настоящее время неизвестно, существует ли полимино, разбивающее плоскость только непериодически.

Поскольку мы не можем решать общую задачу, связанную с разбиениями на полимино, возникает задача об изучении разбиений отдельных типов, простейшими из которых являются решетчатые разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Разбиение называется решетчатым, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.*

Без ограничения общности можно считать, что все вершины полимино являются точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$. Можно доказать, что любое решетчатое разбиение плоскости топологически эквивалентно (гомеоморфно) одному из двух разбиений, а именно: правильному разбиению плоскости на квадраты или на правильные шестиугольники. Пусть n — площадь полимино, то есть полимино состоит из n квадратов площадью 1 квадратная единица каждый. Возникает задача подсчитать число $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n , решетка периодов которых является подрешеткой $\mathbb{Z}^2$. Числа $T(n)$ для малых значений n были вычислены в работах Роудса [16] и Малеева [23]. В работе [24] была рассмотрена задача подсчета числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади с заданными решетками. Задача о числе решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади, топологически эквивалентных правильному разбиению плоскости на квадраты, рассмотрена в работе Брлеко и Фросини [4]. Кроме того в работе [8] был предложен алгоритм сложности $O(n^2)$ позволяющий определить, порождает ли полимино площади n решетчатое разбиение плоскости. Позднее данный алгоритм был усовершенствован в работе [5].

В работах [26], [27] было показано, что для числа $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n , решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$, верна следующая оценка

$$2^{n-3} + 2^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} \leq T(n) \leq C(n+1)^3(2,7)^{n+1}. \quad (1)$$

Позже в работе [28] было показано, что для числа $T_c(n)$ решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади n справедлива оценка

$$c_1(\sqrt{2})^n \leq T_c(n) \leq c_2(n+1)^2(\sqrt{2.68})^n. \quad (2)$$

Следующим по сложности после решетчатых разбиений являются правильные разбиения плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Разбиение называется правильным, если для любых двух его фигур существует движение из группы симметрий этого разбиения, переводящее одну фигуру в другую и при этом все разбиение в себя.*

Очевидно, что решетчатые разбиения являются частным случаем правильных разбиений. Правильные разбиения классифицируются по группам симметрии ячейки разбиения, которых всего 17 (кристаллографические группы). Решетчатым разбиениям соответствует группа $p1$, следующей по сложности является группа $p2$, порожденная решеткой и преобразованием центральной симметрии. Изучению разбиений, правильных относительно конкретных кристаллографических групп посвящен целый ряд работ. Например, в работах [6], [7] представлен компьютерный алгоритм перечисления правильных разбиений на полимино с конкретной кристаллографической группой $p4$ с ограничением на количество клеток в полимино.

Мы будем рассматривать $p2$ -разбиения плоскости на гомеоморфные диску полимино. Также мы будем предполагать, что решетка периодов разбиения является подрешеткой целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Разбиение называется p_2 -разбиением, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом или центральной симметрией, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.

Пример p_2 -разбиения плоскости на полимино изображен на рис. 2.

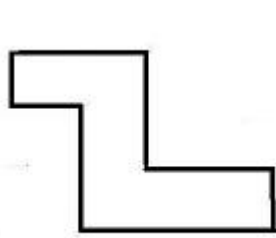


Рис. 1. Полимино.

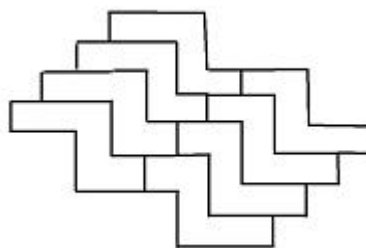


Рис. 2. Пример p_2 -разбиения.

В настоящей статье мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Для числа $t(n)$ p_2 -разбиений плоскости на полимино заданной площади n , решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$, имеет место следующая оценка:

$$C_1 2^n \leq t(n) \leq C_2 n^4 (2.68)^n. \quad (3)$$

2. Нижняя оценка на число p_2 -разбиений на полимино заданной площади

Рассмотрим оценку снизу. Пусть n — площадь полимино. Берем произвольную последовательность w из нулей и единиц длины $n - 1$. Строим по ней ломаную следующим образом: 0 в последовательности соответствует сдвигу вправо, 1 в последовательности соответствует сдвигу вверх. Далее сдвигаем ломаную на вектор $(-1; 1)$. Полученная ломаная с исходной не пересекаются. Дополняем эти две ломаные двумя "уголками" до образования полимино. Легко видеть, что получили полимино площади n (см. рис. 3).



Рис. 3. Пример образования полимино из кода.

В работах [26], [27] было показано, что все полимино, получаемые таким образом, дают решетчатые разбиения плоскости с решеткой периодов, порождаемой векторами $(-1; 1)$ и $(n; 1)$. Более того, среди данных разбиений имеется не менее $c_1 2^n$ различных (появление константы c_1 объясняется тем, что соответствующие разным последовательностям w полимино иногда могут совпадать с точностью до движения).

Возьмем полимино f_1 площади n , построенное по последовательности w . Пристыкуем к f_1 полимино, полученное из него центральной симметрией относительно середины вертикального отрезка "правого уголка" в случае, когда последовательность w заканчивается на 0, и

центральной симметрией относительно середины горизонтального отрезка "правого уголка", в случае, когда последовательность w заканчивается на 1 (см. рис. 4). Полученное полимино f_2 будет центрально-симметричным полимино площади $2n$.

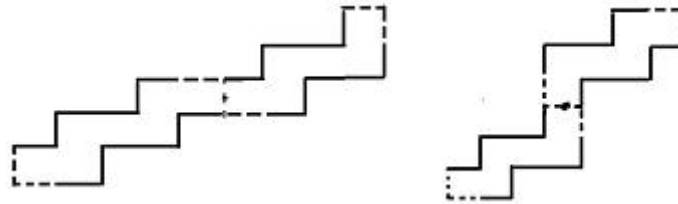


Рис. 4. Построение полимино f_2 по f_1 .

Легко видеть, что если f_1 соответствует последовательности $w = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$, то f_2 может быть получено из последовательности $w' = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1$. Следовательно, f_2 порождает решетчатое разбиение плоскости. Поскольку f_2 состоит из двух центрально симметричных копий f_1 , полимино f_1 порождает $p2$ -разбиение плоскости, что и дает нам нижнюю оценку

$$C_1 2^n \leq t(n). \quad (4)$$

3. Верхняя оценка на число $p2$ -разбиений на полимино заданной площади

Вместо площади будем теперь фиксировать периметр полимино. Обозначим через $t'(p)$ число $p2$ -разбиений плоскости на полимино полупериметра p . Данное определение корректно, так как периметр любого полимино — четное число.

Для $p2$ -разбиения существует критерий Конвея [17], устанавливающий при каких условиях полимино задает $p2$ -разбиение, а именно:

ТЕОРЕМА 2. *Полимино порождает $p2$ -разбиение плоскости тогда и только тогда, когда граница полимино может быть разбита на 6 частей $abcdef$ таких, что a переходит в d параллельным переносом, остальные части b, c, e, f центрально симметричны, причем некоторые части могут быть пустыми. При этом различным разбиениям границы полимино соответствуют различные $p2$ -разбиения плоскости на данное полимино.*

Разъясним геометрический смысл разбиения границы $abcdef$. Граница полимино рассматривается как замкнутая ломаная длины $2p$ без самопересечений (поскольку полимино имеет несамопересекающуюся границу) с отмеченными точками. Точки нужны для того, чтобы мы могли найти границы частей a, b, c, d, e, f , то есть восстановить полимино и разбиение. Отметим, что параллельный перенос, переводящий a в d и центральные симметрии, относительно центров частей b, c, e и f представляют собой преобразования, порождающие группу симметрий разбиения и позволяющие однозначно восстановить все разбиение по одному полимино и разбиению его границы (см. рис. 5). Поэтому число $p2$ -разбиений на полимино заданного периметра не превосходит числа таких ломаных. Отметим, что ломаная d однозначно восстанавливается по ломаной a . Кроме того, каждая из ломаных b, c, e, f , в силу их центральной симметричности, восстанавливается по половине этой ломаной. Пусть длины ломаных a, b, c, d, e, f соответственно равны l_a, l_b, l_c, l_d, l_e и l_f . Ясно, что $l_a = l_d$. Кроме того, учитывая, что b, c, e, f центрально-симметричны, получаем

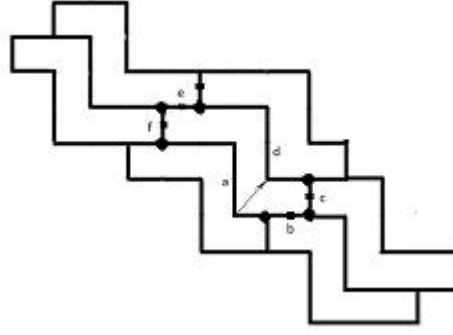


Рис. 5. Восстановление разбиения плоскости по разбиению границы полимино.

$$l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p. \quad (5)$$

Рассмотрим не имеющие самопересечений ломаные, вершины которых есть вершины квадратной решетки, а ребра направлены вертикально или горизонтально. Такие ломаные называются *самонепересекающимися блужданиями* (*self-avoiding walks*). Известно, что число $m(l)$ самонепересекающихся блужданий длины l на квадратной решетке не превосходит $C(\varepsilon)(\mu + \varepsilon)^l$, где μ — так называемая *константа связности* квадратной решетки [13]. Пусть $m_c(l)$ — число самонепересекающихся центрально симметричных ломаных длины l . Ясно, что такая ломаная полностью определяется своей половиной, которая также является самонепересекающейся. Таким образом, справедлива оценка

$$m_c(l) \leq \begin{cases} m((l+1)/2), & l - \text{нечетно}; \\ m(l/2), & l - \text{четно}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$m_c(l) \leq m((l+1)/2) \leq C'(\varepsilon)(\mu + \varepsilon)^{l/2} \quad (6)$$

для всех l .

Исходя из сказанного выше, для числа $t'(p)$ $p2$ -разбиений плоскости на равные полимино полупериметра p справедлива оценка

$$t'(p) \leq \sum_{\substack{l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p, \\ l_a, l_b, l_c, l_e, l_f \geq 0}} m(l_a) m_c(l_b) m_c(l_c) m_c(l_e) m_c(l_f) \leq \quad (7)$$

$$\leq C'(\varepsilon) \sum_{\substack{l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p, \\ l_a, l_b, l_c, l_e, l_f \geq 0}} (\mu + \varepsilon)^{l_a} (\mu + \varepsilon)^{l_b/2} (\mu + \varepsilon)^{l_c/2} (\mu + \varepsilon)^{l_e/2} (\mu + \varepsilon)^{l_f/2} \leq \quad (8)$$

$$\leq C'(\varepsilon) \sum_{\substack{l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p, \\ l_a, l_b, l_c, l_e, l_f \geq 0}} (\mu + \varepsilon)^{l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f)} \leq C'(\varepsilon)(\mu + \varepsilon)^p \sum_{\substack{l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p, \\ l_a, l_b, l_c, l_e, l_f \geq 0}} 1 \leq \quad (9)$$

$$\leq C''(\varepsilon)(\mu + \varepsilon)^p \cdot p^4. \quad (10)$$

Последняя оценка связана с тем, что

$$\sum_{\substack{l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p, \\ l_a, l_b, l_c, l_e, l_f \geq 0}} 1$$

является количеством решений линейного диофантова уравнения $l_a + \frac{1}{2}(l_b + l_c + l_e + l_f) = p$, их количество асимптотически эквивалентно $16p^4$ [25].

Итак, мы получили, что число $p2$ -разбиений на полимино с полупериметром p не превосходит

$$t'(p) \leq C''(\varepsilon)p^4(\mu + \varepsilon)^p. \quad (11)$$

Осталось перейти к площади. Методом математической индукции легко получить неравенство, связывающее площадь и полупериметр полимино: $p \leq n + 1$. Для получения верхней оценки числа $p2$ -разбиений плоскости на полимино остается просуммировать предыдущую оценку по p от 1 до $n + 1$:

$$t(n) \leq \sum_{p=1}^{n+1} t'(p) \leq \sum_{p=1}^{n+1} C''(\varepsilon)p^4(\mu + \varepsilon)^p. \quad (12)$$

Заменяя последнюю сумму на интеграл $\int_0^{n+1} C''(\varepsilon)x^4(\mu + \varepsilon)^x dx$ и учитывая, что

$$\int x^4 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^5} (a^4 x^4 - 4a^3 x^3 + 12a^2 x^2 - 24ax + 24), \quad (13)$$

получаем оценку

$$t(n) \leq C'''(\varepsilon)n^4(\mu + \varepsilon)^n. \quad (14)$$

В настоящее время лучшие доказанные оценки для μ имеют вид

$$2.625622 \leq \mu \leq 2.679193. \quad (15)$$

Ограничимся неравенством $\mu \leq 2.68$, которое и доказывает теорему.

4. Заключение

В работе получены верхние и нижние оценки для числа $p2$ -разбиений плоскости на полимино заданной площади. Эти оценки аналогичны полученным ранее авторами оценкам для числа решетчатых разбиений.

Отметим несколько нерешенных проблем, возникающих в связи с полученными оценками.

- 1) Явно вычислить значения $t(n)$ для малых значений n , например для $n \leq 20$.
- 2) Устранить разрыв между полученными оценками сверху и снизу. В дальнейшем интересно было бы вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{t(n)}.$$

Некоторые вычисления из [23], [24] наводят на мысль о том, что значение данного предела равно 2, что делает особенно актуальной задачу улучшения верхней оценки.

- 3) Выяснить, каких разбиений при больших n асимптотически больше: решетчатых или $p2$ -разбиений.

- 4) Получить оценки для числа разбиений плоскости на полимино заданной площади, правильных относительно других кристаллографических групп, например, относительно группы

p4. Здесь нужно заметить, что не все кристаллографические группы реализуются как группы симметрий разбиений плоскости на полимино. Это связано с тем, что разбиения плоскости на полимино не могут обладать поворотными симметриями порядков 3 и 6.

5) Перенести имеющиеся оценки для числа разбиений плоскости на полимино на случай разбиений плоскости на полигексы и полиамонды, а также разбиений трехмерного пространства на поликубы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ammann R., Grunbaum B., Shephard G. Aperiodic tiles // Discrete and Computational Geometry. 1991. Vol. 6, no. 1, P. 1–25.
2. Barequet G., Rote G., Shalah M. $\lambda > 4$ // Algorithms – ESA 2015 Proceedings, Springer, 2015, P. 83–94.
3. Bousquet-Melou M., Brak R. Exactly solved models // Polygons, Polyominoes and Polycubes. 2009. Springer. P. 43–78.
4. Brlek S., Frosini A., Rinaldi S., Vuillon L. Tilings by translation: enumeration by a rational language approach // The electronic journal of combinatorics. 2006. Vol. 13, R15.
5. Brlek S., Provencal X., Fedou J.-M. On the tiling by translation problem // Discrete Applied Mathematics. 2009. Vol. 157, no. 3, P. 464–475.
6. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D., A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry // Graphs and Combinatorics. 2007. Vol. 23, Supplement 1, P. 259–267.
7. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D. Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry // Computational Geometry and Graph Theory - International Conference, KyotoCGGT 2007, Kyoto, Japan, June 11-15, 2007. Revised Selected Papers. Springer. 2008. P. 68–78.
8. Gambini I., Vuillon L. An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations // RAIRO Theoretical Informatics and Applications. 2007. Vol. 41, no. 2, P. 147–155.
9. Golomb S.W. Checker boards and polyominoes // American Mathematical Monthly. 1954. Vol. 61. P. 672–682.
10. Jensen I. Counting polyominoes: a parallel implementation for cluster computing, Computational Science – ICCS 2003 Proceedings, Part III. Springer, 2003. P. 203–212.
11. Klarner D. A cell growth problems // Cand. J. Math. 1967. Vol. 19. P. 851–863.
12. Klarner D. A., Rivest R. L. A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes // Canad. J. Math. 1973. Vol. 25. P. 585–602.
13. Madras N., Slade G. The self-avoiding walk. Springer, 1996. 427 pp.
14. Myers J. Polyomino, polyhex and polyiamond tiling.
<https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/>. 2016
15. Rhoads G. C. Planar tilings and the search for an aperiodic prototile. PhD dissertation. Rutgers University. 2003.

16. Rhoads G.C. Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2005. Vol. 174. no. 2, P. 329–353.
17. Schattschneider D. Will it tile? Try the Conway criterion! // *Mathematics Magazine*. 1980. vol. 53, no. 4, P. 224–233.
18. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. 2-е изд. М.: Мир. 1999. 447 с.
19. Гарднер М. Математические досуги М.: Мир, 1972. 496 с.
20. Гарднер М. Математические новеллы. М.: Мир. 1974. 456 с.
21. Гарднер М. Путешествие во времени. М.: Мир, 1990. 341 с.
22. Голомб С. Полимино М.: Мир. 1975. 207 с.
23. Малеев А. В. Алгоритм и компьютерная программа перебора вариантов упаковок полимино в плоскости // *Кристаллография*. 2013. Т. 58, вып. 5, С. 749–756.
24. Малеев А. В., Шутков А. В. О числе трансляционных разбиений плоскости на полимино // Труды IX Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках". Апатиты. 2013. Р. 101–106.
25. Нестеренко Ю. В., Галочкин А. И., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. М.: Издательство Московского Университета. 1984. 152 с.
26. Шутков А. В., Коломейкина Е. В. О числе решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // Труды XI Всероссийской научной школы "Математические исследования в естественных науках". Апатиты. 2014. Р. 147–152.
27. Шутков А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2013. Т. 20, вып. 5, С. 148–157.
28. Шутков А. В., Коломейкина Е. В. Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на центрально-симметричные полимино заданной площади // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2015. Т. 22, вып. 2, С. 295–303.

REFERENCES

1. Ammann R. & Grunbaum B. & Shephard G. 1991, "Aperiodic tiles", *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 6, no. 1, pp. 1–25. doi: 10.1007/BF02293033.
2. Barequet G., Rote G. & Shalah M. 2015, " $\lambda > 4$ ", *Algorithms – ESA 2015 Proceedings*, Springer, pp. 83–94. doi: 10.1007/978-3-662-48350-3.
3. Bousquet-Melou M. & Brak R. 2009, "Exactly Solved Models", *Polygons, Polyominoes and Polycubes*, Springer, pp. 43–78. doi:10.1007/978-1-4020-9927-4.
4. Brlek S., Frosini A., Rinaldi S. & Vuillon L. 2006, "Tilings by translation: enumeration by a rational language approach", *The electronic journal of combinatorics*, Vol. 13, R15.
5. Brlek S., Provencal X. & Fedou J.-M. 2009, "On the tiling by translation problem", *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 157, no. 3, pp. 464–475. doi:10.1016/j.dam.2008.05.026.

6. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. & Schattschneider D. 2007, "A method to generate polyominoes and polyiamonds for tilings with rotational symmetry", *Graphs and Combinatorics*, Vol. 23, Supplement 1, pp. 259–267. doi: 10.1007/s00373-007-0719-y.
7. Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G. & Schattschneider D. 2008, "Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry", *Computational Geometry and Graph Theory - International Conference, KyotoCGGT 2007, Kyoto, Japan, June 11-15, 2007. Revised Selected Papers*, Springer, pp. 68–78. doi:10.1007/978-3-540-89550-3_7.
8. Gambini I. & Vuillon L. 2007, "An algorithm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations", *RAIRO Theoretical Informatics and Applications*, Vol. 41, no. 2, pp. 147–155.
9. Golomb S. W. 1954, "Checker boards and polyominoes", *American Mathematical Monthly*, Vol. 61, pp. 672–682. doi: 10.2307/2307321.
10. Jensen I. 2003, "Counting polyominoes: a parallel implementation for cluster computing", *Computational Science – ICCS 2003 Proceedings, Part III*, Springer, pp. 203–212.
11. Klarner D. 1967, "A cell growth problems", *Cand. J. Math.*, Vol. 19, pp. 851–863. doi: 10.4153/CJM-1967-080-4.
12. Klarner D. A. & Rivest R.L. 1973, "A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes", *Canad. J. Math.*, Vol. 25, pp. 585–602. doi:/10.4153/CJM-1973-060-4.
13. Madras N. & Slade G. 1996, *The self-avoiding walk*, Springer, 427 pp. doi:10.1007/978-1-4614-6025-1.
14. Myers J. 2016, "Polyomino, polyhex and polyiamond tiling", Available at: <https://www.polyomino.org.uk/mathematics/polyform-tiling/>
15. Rhoads G. C. 2003, *Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile*, PhD dissertation, Rutgers University.
16. Rhoads G. C. 2005, "Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 174, no. 2, pp. 329–353. doi:10.1016/j.cam.2004.05.002.
17. Schattschneider D. 1980, "Will it tile? Try the Conway criterion!", *Mathematics Magazine*, Vol. 53, no. 4, pp. 224–233.
18. Gardner M. 1999, *Mathematical puzzles and diversions*, 2nd edition, Dover, 447 pp.
19. Гарднер М. 1966, *New mathematical diversions from Scientific American*, Simon and Shuster, 496 pp.
20. Gardner M. 1974, *Mathematical games from Scientific American*, Simon and Shuster, 456 pp.
21. Gardner M. 1988, *Time travel and other mathematics bewilderments*, Freeman and Co., New York, 341 pp.
22. Golomb S. W. 1994, *Polyominoes*, 2nd edition, Princeton University Press, New Jercey. 196 pp.
23. Maleev A. V. 2013, "Algorithm and computer-program search for variants of polyomino packings in plane", *Kristallografija*, Vol. 58, no. 5, pp. 749–756. (Russian). translation in *Crystallography Reports*, 2015, Vol. 60, no. 6, pp. 986–992. doi:10.7868/S0023476113040140.

24. Maleev A. V. & Shutov A. V. 2013, "On the number of translational plane tilings by polyomino", *Trudy IX Vserossiiskoi nauchnoi shkoly "Matematicheskie issledovaniya v estestvennyh naukah"* (Proc. IX All-Russian scientific school "Mathematical Research in Natural sciences"), Apatity, pp. 101–106.
25. Nesterenko Ju. V., Galochkin A. I. & Shidlovskij A. B. 1984, *Vvedenie v teoriyu chisel* [Introduction in number theory]. Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moscow, 152 pp.
26. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2014, "On the number of lattice tilings of a plane by a given area polyomino", *Trudy IX Vserossiiskoi nauchnoi shkoly "Matematicheskie issledovaniya v estestvennyh naukah"* (Proc. IX All-Russian scientific school "Mathematical Research in Natural sciences"), Apatity, pp. 147–152.
27. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2013, "The estimation of the number of lattice tilings of a plane by a given area polyomino ", *Modelirovanie i Analiz Informacionnyh Sistem (Modeling and Analysis of Information Systems)*, Vol. 20, no. 5, pp. 148–157.
28. Shutov A. V. & Kolomeykina E. V. 2015, "The estimating of the number of lattice tilings of a plane by a given area centrosymmetrical polyomino", *Modelirovanie i Analiz Informacionnyh Sistem (Modeling and Analysis of Information Systems)*, Vol. 22, no. 2, pp. 295–303.

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Получено 12.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.