ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511.3

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ СРАВНЕНИЙ АРХИПОВА–КАРАЦУБЫ

Х. М. Салиба

Аннотация

Доказано, что система сравнений Архипова–Карацубы по любому простому модулю, большему степени форм в ней, разрешима при любых правых частях и при числе переменных, превосходящих величину $8(n+1)^2 \log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$, где n — степень форм этой системы.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, сравнения Архипова–Карацубы.

Библиография: 9 названий.

ON ONE ARKHIPOV–KARATSUBA'S SYSTEM OF CONGRUENCIES

H. M. Saliba

Abstract

The Arkhipov–Karatsuba's system of congruencies by arbitrary modulo, greater than a degree of forms in it, has a solution for any right-hand parts, and for the number on unknowns exceeding the value $8(n+1)^2 \log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$, where n is the degree of forms of this system.

Keywords: diophantine equations, Arkhipov–Karatsuba's system.

Bibliography: 9 titles.

Настоящую статью автор посвящает памяти выдающихся математиков Геннадия Ивановича Архипова (12.12.1945–14.03.2013) и Анатолия Алексеевича Карацубы (31.01.1937–28.09.2008), образ которых у автора тесно связан с Московским университетом.

1. Введение

Мы продолжаем исследования аддитивных проблем теории чисел [1] – [9]. В качестве аддитивных слагаемых в них берутся простейшие формы степени n от двух независимых переменных x и y вида $x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n$. Г. И. Архипов и А. А. Карацуба [2] изучали вопрос о разрешимости системы диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_1^n + \dots + x_k^n = N_0, \\ x_1^{n-1}y_1 + \dots + x_k^{n-1}y_k = N_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1y_1^{n-1} + \dots + x_ky_k^{n-1} = N_{n-1}, \\ y_1^n + \dots + y_k^n = N_n, \end{cases}$$

в натуральных числах $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ при фиксированном числе слагаемых $k = k(n)$.

Как известно, необходимые и достаточные условия для существования решений системы диофантовых уравнений состоят из арифметических условий, связанных с разрешимостью соответствующей системы сравнений по любому модулю и условий порядка, отвечающих за разрешимость подобной системы уравнений в вещественных числах (см., например, [1], [3], [4], [5], [7]). В работе [2] в основном обсуждаются условия порядка. Здесь изучаются некоторые аспекты арифметических условий.

Пусть $n \geq 2, k, \nu, N_0, \dots, N_n$ — натуральные, $p > n$ — простое число, T_ν — число решений системы сравнений Архипова – Карацубы

$$\begin{cases} x_1^n + \dots + x_k^n \equiv N_0, \\ x_1^{n-1} y_1 + \dots + x_k^{n-1} y_k \equiv N_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \pmod{p^\nu} \\ x_1 y_1^{n-1} + \dots + x_k y_k^{n-1} \equiv N_{n-1}, \\ y_1^n + \dots + y_k^n \equiv N_n, \end{cases} \tag{1}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k$ пробегают полную систему вычетов по модулю p^ν. Заметим,что разрешимость системы сравнений (1) при $\nu = 1$ влечет ее разрешимость при любом натуральном числе ν.

В настоящей статье доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $p > n$. Тогда при $k \geq k \geq 8(n+1)^2 \log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$ и при любых $N_0, \dots, N_n$ система сравнений* (1) *разрешима.*

2. Доказательство теоремы

Будем следовать схеме рассуждений, предложенной А. А. Карацубой [6]. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $n < p < 8n^2, k \geq k \geq 8(n+1)^2 \log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$. Тогда $T_1 \geq 1$.*

Доказательство. Пусть, как и раньше, переменные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ пробегают полную систему вычетов по модулю p, переменные $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$ — натуральные числа от 1 до $U = 2(n+1)$, в следующей системе сравнений

$$\begin{cases} (u_1+v_1)x_1^n + \dots + (u_k+v_k)x_k^n \equiv N_0, \\ (u_1+v_1)x_1^{n-1} y_1 + \dots + (u_k+v_k)x_k^{n-1} y_k \equiv N_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \pmod{p^\nu} \\ (u_1+v_1)x_1 y_1^{n-1} + \dots + (u_k+v_k)x_k y_k^{n-1} \equiv N_{n-1}, \\ (u_1+v_1)y_1^n + \dots + (u_k+v_k)y_k^n \equiv N_n. \end{cases} \tag{2}$$

Число решений T системы (2) запишем в виде

$$T = p^{-(n+1)} \sum_{a_0=1}^{p} \sum_{a_1=1}^{p} \cdots \sum_{a_{n-1}=1}^{p} \sum_{a_n=1}^{p} W^k(a_0, \dots, a_n) \times$$
$$\times \exp\left(-2\pi i \frac{a_0 N_0 + a_1 N_1 + \dots + a_{n-1} N_{n-1} + a_n N_n}{p}\right),$$

где

$$W(a_0, \dots, a_n) = \sum_{u=1}^{U} \sum_{v=1}^{U} \sum_{x=1}^{p} \sum_{y=1}^{p} \exp\left(2\pi i \frac{(u+v)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n)}{p}\right).$$

Очевидно, имеем $W(0,\ldots,0) = U^2p^2$. Пусть теперь $(a_0,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0)$. Тогда для $|W(a_0,\ldots,a_n)|$ справедлива оценка

$$|W(a_0,\ldots,a_n)| \le \sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p} 1\times$$

$$\times\left|\sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{U}\exp\left(2\pi i\frac{(u+v)(a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n)}{p}\right)\right| = W_1.$$

Обозначим символом $J(\lambda)$ число решений следующего сравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n \equiv \lambda \pmod p$. Имеем

$$W_1 = \sum_{\lambda=1}^{p} J(\lambda)\left|\sum_{u=1}^{U} e^{2\pi i\frac{\lambda u}{p}}\right|^2.$$

Для величины $J(\lambda)$ находим оценку $J(\lambda) \le p + n(p-1)$.

Далее, получим

$$W_1 \le (p(n+1)-n)\sum_{\lambda=1}^{p}\left|\sum_{u=1}^{U} e^{2\pi i\frac{\lambda u}{p}}\right|^2 = p(p(n+1)-n)U.$$

Таким образом

$$T = (U^2p^2)^kp^{-(n+1)} + \theta((n+1)p^2U)^k = U^{2k}p^{2k-n-1}\left(1+\theta p^{n+1}((n+1)U^{-1})^k\right),\quad |\theta|\le 1.$$

Достаточно доказать, что $p^{n+1}2^{-k} \le 2^{-1}$ или $(n+1)\log_2 p \le k-1$. Поскольку $p \le 8n^2$, последнее неравенство будет следовать из оценки $k-1 \ge (n+1)\log_2(8n^2)$, то есть.

$$k \ge 2(n+1)\log_2 n + 3(n+1) + 1.$$

Следовательно, при $k \ge 2(n+1)\log_2 n + 3(n+1) + 1$ имеем $T \ge 1$. Наконец, отсюда находим, что при $k \ge 8(n+1)^2\log_2 n + 12(n+1)^2 + 4(n+1)$ величина $T_1 \ge 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При $p \ge 8n^2$ и при $k \ge 4(n+1)\left(\log_2 n + \frac{3}{2}\right) + 2$ имеем $T_1 \ge 1$.*

Доказательство. Для величины T_1 справедлива формула

$$T_1 = p^{-(n+1)}\sum_{a_0=1}^{p}\cdots\sum_{a_n=1}^{p} S^k(a_0,\ldots,a_n)\exp\left(\frac{a_0N_0+\cdots+a_nN_n}{p}\right),$$

где

$$S(a_0,\ldots,a_n) = \sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p}\exp\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n}{p}\right)$$

Отсюда получим $S(0,\ldots,0) = p^2$. Пусть теперь $(a_0,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0)$. Тогда оценим $|S(a_0,\ldots,a_n)|$. Производя замену переменной $y = zx$, а затем используя оценку А.Вейля, найдем

$$|S(a_0,\ldots,a_n)| \le p + \sum_{x=1}^{p-1}\left|\sum_{y=0}^{p}\exp\left(2\pi i x^n(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n)\right)\right| \le p + (p-1)n\sqrt{p},\quad |\theta_1|\le 1.$$

Стало быть,

$$T_1 = p^{2k-(n+1)} + \theta_1(p + (p-1)n\sqrt{p})^k = p^{2k-n-1}(1 + \theta_1 p^{n+1}(p^{-1} + np^{-1/2})^k).$$

Докажем, что $p^{n+1}(p^{-1} + np^{-1/2})^k \leq 1/2$. Имеем следующую цепочку неравенств

$$p^{n+1}(2np^{-1/2})^k \leq \frac{1}{2}, \quad k + 1 + (n + 1 - \frac{k}{2})\log_2 p + k\log_2 n \leq 0.$$

Поскольку $n + 1 - k/2 < 0$ и $p \leq 8n^2$, достаточно проверить неравенство

$$k + 1 + (n + 1 - \frac{k}{2})\log_2 (8n^2) + k\log_2 n \leq 0,$$

или

$$\frac{k}{2} \geq 2(n+1)\left(\log_2 n + \frac{3}{2}\right) + 1, \quad k \geq 4(n+1)\left(\log_2 n + \frac{3}{2}\right) + 2.$$

Лемма доказана.

Утверждение теоремы есть непосредственное следствие лемм 1 и 2.

3. Заключение.

Отметим также, что нами для системы сравнений (1) при достаточно большом k и при $p > n$ показана разрешимость ее для любых $N_0, \ldots, N_n$, то есть при $p > n$ отсутствуют арифметические условия разрешимости. Их наличие для $p \leq n$ является интересной задачей.

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему учителю профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел . 2-е изд., исправл. и доп. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1980, 144 с.

2. Архипов Г. И., Карацуба А. А. Многомерный аналог проблемы Варинга// Докл. АН СССР, 1987, **295,** №3, с.75-77.

3. Архипов Г. И. О значении особого ряда в проблеме Гильберта – Камке// Докл. АН СССР, 1981, **259,** №2, с.265-267.

4. Архипов Г. И. О проблеме Гильберта – Камке// Изв. АН СССР. Сер.мат., 1984, **48,** №1, с.3-52.

5. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об арифметических условиях разрешимости нелинейных систем диофантовых уравнений// Докл. АН СССР, 1985, **284,** №1, с.16-21.

6. Карацуба А. А. Об одной системе сравнений// Матем. заметки, 1976, **19,** №3, с.389-392.

7. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter Expositions in Mathematics;39. — Berlin-New York.: Walter de Gruyter, 2004, pp 554.

8. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 5-е изд., перераб. — М.: Дрофа, 2007, 640 с.

9. Салиба Х. М., Чубариков В. Н. Об одном обобщении суммы Гаусса // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Мат.,Мех., 2009, №2, с.76-80.

Lebanon, Notre Dame University–Louaize (NDU)
Получено 17.04.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.