ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (1276,50,0,2)

В. В. Носов (г. Оренбург)

Аннотация

Пусть Γ сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 0, 2)$. Тогда $k = u^2 + 1$, $v = (u^4 + 3u^2 + 4)/2$ для $u \equiv 1, 2, 3(mod 4)$. Если $u = 1$, то Γ имеет параметры $(4, 2, 0, 2)$ — граф четырёхугольника. Если $u = 2$, то Γ имеет параметры $(15, 5, 0, 2)$ — граф Клебша. Если $u = 3$, то Γ имеет параметры $(56, 10, 0, 2)$ — граф Гевиртца. Если $u = 5$ тогда, гипотетический сильно регулярный граф Γ имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$ [4]. Если $u = 6$ тогда, гипотетический сильно регулярный граф Γ имеет параметры $(704, 37, 0, 2)$ [5]. Если $u = 7$, тогда Γ имеет параметры $(1276, 50, 0, 2)$. Пусть G группа автоморфизмов гипотетического сильно регулярного графа с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$. Найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек элементов простых порядков группы G. С использованием теории характеров конечных групп были найдены возможные порядки подграфы неподвижных точек автоморфизмов графа с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$. Доказано, что если граф с параметрами (1276,50,0,2) существует, то порядок его группы автоморфизмов делит $2^l \cdot 3 \cdot 5^m \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$. В частности, G — разрешимая группа.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизмы простых порядков сильно регулярного графа, подграфы неподвижных точек.

Библиография: 17 названий.

ON AUTOMORPHISMS OF STRONGLY REGULAR GRAPH WITH THE PARAMETRS (1276,50,0,2)

V. V. Nosov (Orenburg)

Abstract

Let Γ be a strongly regular graph with parameters $(v, k, 0, 2)$. Then $k = u^2 + 1$, $v = (u^4 + 3u^2 + 4)/2$ and $u \equiv 1, 2, 3(mod 4)$. If $u = 1$, then Γ has parametrs $(4, 2, 0, 2)$ — tetragonal graph. If $u = 2$, then Γ has parametrs $(15, 5, 0, 2)$ — Clebsch graph. If $u = 3$, then Γ has parametrs $(56, 10, 0, 2)$ — Gewirtz graph. If $u = 5$ then hypothetical strongly regular graphΓ has parametrs $(352, 26, 0, 2)$ [4]. If $u = 5$ then hypothetical strongly regular graphΓ has parametrs $(704, 37, 0, 2)$ [5]. Let $u = 7$, then Γ has parametrs $(1276, 50, 0, 2)$. Let G be the automorphism group of a hypothetical strongly regular graph with parameters $(1276, 50, 0, 2)$. Possible orders are found and the structure of fixed-point subgraphs is determined for elements of prime order in G. With the use of theory of characters of finite groups we find the possible orders and the structures of subgraphs of the fixed points of automorphisms of the graph with parameters $(1276, 50, 0, 2)$. It proved that if the graph with parametrs (1276,50,0,2) exist, its automorphism group divides $2^l \cdot 3 \cdot 5^m \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$. In particulary, G — solvable group.

Keywords: strongly regular graph, prime order automorphisms of strongly regular graph, fixed-point subgraphs.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Граф Γ называется *сильным с параметрами* (λ,μ), если каждое ребро из Γ лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом*. Ректаграфом называется вполне регулярный граф с $\lambda=0,\mu=2$. Если Δ — подграф графа Γ и $a,b\in\Delta$, то через $d_\Delta(a,b)$ обозначим расстояние между a и b в графе Δ.

Если X — подмножество группы автоморфизмов графа Γ, то через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначим подграф на множестве вершин, остающихся неподвижными под действием любого автоморфизма из X. Подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с малыми значениями параметров λ и μ имеют жестко заданное строение. Так подграф неподвижных точек автоморфизма графа Мура сам является графом Мура или звездой (см. лемму 1 [1]).

Хорошо известно (предложение 1.1.2 [2]), что сильный граф с $\mu\geqslant 2$ регулярен. Поэтому связные компоненты непустых подграфов неподвижных точек $2'$-автоморфизмов сильно регулярного графа с $\max\{\lambda,\mu\}\leqslant 2$ либо являются кликами, либо сильно регулярны с этими же параметрами. Автоморфизмы графов Мура, т.е. сильно регулярных графов с параметрами $(v,k,0,1)$ изучались в [1]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(v,k,1,2)$ рассматривались в [3]. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(v,k,0,2)$ изучались в [4] и в [5]. Этот класс графов — единственный из классов связных сильно регулярных графов с $\max\{\lambda,\mu\}\leqslant 2$, имеющий бесконечное множество допустимых параметров.

В данной работе изучаются автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1276,50,0,2)$. Кроме обычных теоретико-графовых методов, применявшихся в работах [1,3], в данной статье используется метод Дональда Хигмена, позволяющий уточнить возможные порядки автоморфизмов и строение подграфов их неподвижных точек с помощью теории характеров конечных групп (см. §2).

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(v,k,0,2)$. Используя равенство $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)=n^2$, получим $n^2=4k-4$, поэтому $n=2u$, $k=u^2+1$, $n-m=u-1$, $-m=-u-1$. Из прямоугольного соотношения $k(k-\lambda-1)=\mu(v-k-1)$ находим $v=(u^4+3u^2+4)/2$. Кратность собственного значения $n-m$ равна

$$f=(m-1)k(k+m)/(n\mu)=u(u^2+1)(u^2+u+2)/(4u),$$

следовательно, u нечетно или $u\equiv 2(4)$.

Для небольших u получим следующие графы: $u=1$ — четырехугольник; $u=2$ — граф Клебша с параметрами $(16,5,0,2)$; $u=3$ — граф Гевиртца с параметрами $(56,10,0,2)$. Существование графов с $u>3$ неизвестно. При $u=5$ получается гипотетический граф с наименьшими параметрами $(352,26,0,2)$. Автоморфизмы этого графа изучались в [4]. При $u=6$

граф имеет параметры $(704, 37, 0, 2)$. Автоморфизмы этого графа изучались в [5]. При $u = 7$ граф имеет параметры $(1276, 50, 0, 2)$. Граф с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$ имеет собственные значения $n - m = 6$ и $-m = -8$ с кратностями $f = 725$ и $g = 550$ соответственно.

Основным результатом работы являются следующая теорема.

Теорема. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(1276, 50, 0, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 2$ *и либо* Δ *— пустой граф, 26-коклика или связный граф степени* 6 *на* 44 *вершинах, либо* Δ *имеет семь связных компонент, являющиеся четырехугольниками, либо* Δ *— регулярный граф, степени* 8 *на* 58 *вершинах;*

(2) $p = 3$ *и* Δ *является графом Клебша;*

(3) $p = 5$ *и* Δ *— одновершинный граф, либо граф Клебша;*

(4) $p = 7$ *и* Δ *— двухвершинная клика;*

(4) $p = 11$ *или* 29 *и* Δ *— пустой граф.*

Из теоремы следует, что порядок группы автоморфизмов G графа Γ с параметрами (1276,50,0,2) делит $2^l \cdot 3 \cdot 5^m \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$. В частности, G — разрешимая группа.

2. Автоморфизмы простых порядков графа с параметрами (1276,50,0,2)

Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(v, k, 0, 2)$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов Γ. Выберем подгруппу X нечетного порядка из G. Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(X)$ — множество вершин графа Γ, неподвижных относительно X. Если a, b — несмежные вершины из Ω, то $[a] \cap [b]$ — подграф, допустимый относительно X, поэтому $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Значит Ω — либо пустой граф, либо сильно регулярный граф с $\lambda = 0, \mu = 2$, либо является кликой с числом вершин, не большим 2.

Пусть t — инволюция из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(t)$, $a, b \in \Delta$. Тогда, $[a] \cap [b] = c, d$ и либо $c, d \in \Delta$, либо $c^t = d$. Если $[b] \cap \Delta$ содержит различные вершины e, f, то вторая вершина подграфа $[e] \cap [f]$ также попадает в Δ. В частности, связные компоненты графа Δ являются вполне регулярными графами с $\lambda = 0$ и $\mu = 2$.

Лемма 2.1. *Пусть* Σ *— связная компонента графа* Δ *и* β *— степень некоторой вершины* a *в графе* Σ. *Тогда*

(1) $|\Delta| = (\beta^2 + k + 2)/2$, *в частности,* Δ *— регулярный граф степени* β;

(2) *вершина из* $\Gamma - \Delta$ *смежна не более чем с двумя вершинами из* Δ.

Доказательство. Это лемма 2.1 из [4].

Доказательство теоремы разобъём на два предложения и ряд лемм.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный графа с параметрами* $(1276, 50, 0, 2)$, X *— группа нечетного порядка из* Aut Γ. *Тогда для множества неподвижных точек* $\Omega = \mathrm{Fix}(X)$ *возможны следующие случаи:*

(1) Ω *— пустой граф и* $|X|$ *делит* 319;

(2) $|\Omega| = 1$, $|X|$ *делит* 25;

(3) Ω *является двухвершинной кликой и* $|X|$ *делит* 49;

(4) Ω *является четырехугольником и* $|X| = 3$;

(5) Ω *является графом Клебша и* $|X|$ *делит* 45.

Доказательство. Если Ω — пустой граф, то $|X|$ делит 319, так как $v = 2^2 \cdot 11 \cdot 29$.

Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то X действует без неподвижных точек на $[a]$, причем $|[a]| = 50$. Поэтому $|X|$ делит 25.

Если Ω является ребром $\{a, b\}$, то $|[a] - \{b\}| = 49$ и $|X|$ делит 49.

Если Ω является четырехугольником $\{a, b; c, d\}$, то $|[a] - \Omega| = 48$ и $|X| = 3$.

Если Ω является графом Клебша, $a \in \Omega$, то $|[a] - \Omega| = 45$ и $|X|$ делит 45.

Заметим, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $|\Omega|(u^2 + 1 - k(\Omega))$ и не превосходит $v - |\Omega|$. Поэтому Ω не может быть ни графом Гевирца, ни графом с параметрами $(352, 26, 0, 2)$, ни графом с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ Предложение 1 доказано.

Выясним теперь строение подграфов неподвижных точек инволютивных автоморфизмов графа Γ. Пусть t — инволюция из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(t)$, $\delta = |\Delta|$.

Предложение 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, имеющий инволютивный автоморфизм t. Тогда для $\Delta = \mathrm{Fix}(t)$ выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Δ — пустой граф;*

(2) *Δ является 26-кокликой;*

(3) *Δ имеет семь связных компонент, являющихся четырехугольниками;*

(4) *Δ — связный граф степени 6 на 44 вершинах;*

(5) *Δ — связный граф степени 8 на 58 вершинах.*

Доказательство. Предположим, что Δ не является пустым графом. Пусть Δ — регулярный граф степени β, $\delta = |\Delta|$. Так как $k = 50$, то β четно. Число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно $\delta(50 - \beta)$. Ввиду леммы 1.1. указанное число не больше $2(1276 - \delta)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда $x_0 + x_1 + x_2 = 1276 - \delta$ и $x_1 + 2x_2 = \delta(50 - \beta)$. Поэтому $\beta \leqslant 8$.

Если $\beta = 0$, то ввиду леммы 1.1 граф Δ является 26-кокликой.

Если $\beta = 2$, то $\delta = 28$ и Δ имеет семь связных компоненты, являющихся четырехугольниками.

Если $\beta = 4$, то $\delta = 34$ и Δ является связным графом диаметра, большего 2. Но по предложению 1.13.1 [2] число вершин в ректаграфе степени k не больше 2^k, противоречие.

Если $\beta = 6$, то $\delta = 44$ и Δ является связным графом диаметра, большего 2.

Если $\beta = 8$, то $\delta = 58$ и Δ является связным графом диаметра, большего 2. В этом случае $\delta(50 - \beta) = 2(1276 - \delta)$ и каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с двумя вершинами из Δ. Предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы опирается на метод Дональда Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с двумя классами. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v - k - 1 & -r - 1 & -s - 1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, g$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пусть π_i — ортогональное проектирование $\mathbf{C}^v$ на i-ое собственное подпространство W_i, χ_i — характер представления группы G, полученного при этом проектировании. Тогда для любого $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2}(Q)_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, поэтому если $\chi_i(g)$ — число рациональное, то оно должно быть целым.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, u^2+1, 0, 2)$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u^2+1 & -u-1 & u-1 \\ u^2(u^2+1)/2 & u & -u \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (u^2+1)(u^2-u+2)/4 & -(u^2+u+2)/4 & (u^2-u+2)/(2u) \\ (u^2+1)(u^2+u+2)/4 & (u^2+u-2)/4 & (-u^2-u-2)/(2u) \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $(u^2+1)(u^2-u+2)/4$ равно

$$\chi_1(g) = \frac{1}{v}((u^2+1)(u^2-u+2)\alpha_0(g)/4 - (u^2+u+2)\alpha_1(g)/4 + (u^2-u+2)\alpha_2(g)/(2u)).$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\chi_1(g) = \frac{1}{2u}((u-1)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + (u^2-u+2)).$$

При $u = 7$ имеем

$$\chi_1(g) = \frac{1}{14}(6\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 44).$$

Особую сложность в методе Хигмена вызывает подсчет значения параметра $\alpha_1(g)$. Если Γ — граф без треугольников и $|g| = 3$, то $\alpha_1(g) = 0$.

Уточним, теперь предложения 1 и 2 с помощью теории характеров.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, t — инволюция из G, $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Δ — пустой граф, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 44)/14$. Далее, $\alpha_2(t)$ делится на 4, поэтому $\alpha_1(t) = 4w$ и $w - 2$ делится на 7.

Если Δ является 26-кокликой, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 200)/14$. Так как $\alpha_1(t) = 4w + 2$, то $2w + 3$ делится на 7.

Если Δ имеет 7 связных компонент, являющихся четырехугольниками, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 212)/14$, $\alpha_1(t) = 4w$ и $2w - 1$ делится на 7.

Если Δ является графом степени 6 на 44 вершинах, то $\chi_1(t) = (-\alpha_1(t) + 308)/14$.

Если Δ является графом степени 8 на 58 вершинах, то каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с двумя вершинами из Δ, поэтому $\alpha_1(t) = 0$ и $\chi_1(t) = 392/14 = 28$.

Пусть g — элемент нечетного простого порядка из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 2.1. *Пусть g — элемент порядка 3. Тогда Ω — граф Клебша.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 3 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + 44)/14$.

Если Ω является четырехугольником, то $\alpha_0(g) = 4$ и $\chi_1(g) = 68/14$. Противоречие.

Если Ω является графом Клебша, $a \in \Omega$, то $\alpha_0(g) = 16$ и $\chi_1(g) = 140/14 = 10$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть g — элемент порядка 5. Тогда*

(1) *Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то число 5-угольных орбит равно $2(7t-5)$ при некотором целом t;*

(2) *Если Ω является графом Клебша, то число 5-угольных орбит кратно 70.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 5 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то $\alpha_0(g) = 1$, тогда $\chi_1(g) = (-\alpha_1(g)+ +50)/14$. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро. Тогда $\langle g\rangle$-орбита точки a является 5-угольником и $\alpha_1(g)$ кратно 5. Положим $\alpha_1(g) = 5w$. Тогда 14 делит $50 - 5k$, тогдачисло 5-угольных орбит равно $2(7t-5)$ при некотором целом t.

Если Ω является графом Клебша, то $\alpha_0(g) = 16$, тогда $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 140)/14$ и $\alpha_1(g)$ кратно 14. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро, тогда $\alpha_1(g)$ кратно 5. Поэтому $\alpha_1(g)$ кратно 70. Лемма 2.2. доказана.

Лемма 2.3. *Пусть g — элемент порядка 7. Тогда число 7-угольных орбит кратно 14.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 7 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. В этом случае Ω является является ребром и $\chi_1(g) = (-\alpha_1(g) + 56)/14$. Поэтому $\alpha_1(g)$ кратно 14. Лемма 2.3. доказана.

Лемма 2.4. *Пусть g — элемент порядка 11. Тогда число 11-угольных орбит равно 4 и число 11-кокликовых орбит равно 112.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 11 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро. Тогда $\langle g\rangle$-орбита точки a является 11-угольником, либо графом, степени 4 на 11 вершинах. В последнем случае, мы имеем сильно регулярный граф с параметрами $(11, 4, 0, 2)$. Противоречие. Поэтому любая 11-орбита — это либо 11-угольник, либо 11-коклика. $\alpha_1(g)$ кратно 11. Положим $\alpha_1(g) = 11w$. Тогда 14 делит $-11w + 44$. Общее число орбит, динны 11 равно $1276/11 = 116$. Следовательно, число 11-угольных орбит равно 4 и число 11-кокликовых орбит равно 112. Лемма 2.4. доказана.

Лемма 2.5. *Пусть g — элемент порядка 29. Тогда число 29-угольных орбит равно либо 2, либо 16, либо 30, либо 44.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 29 из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда, общее число 29-орбит равно 44. Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро и $\alpha_1(g)$ кратно 29. Положим $\alpha_1(g) = 29w$. Тогда $\chi_1 = (44 - 29w)/14$. Следовательно, $w \in \{2, 16, 30, 44\}$ Лемма 2.5. доказана.

3. Заключение

Итак, доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 2$ и либо Δ — пустой граф, 26-коклика или связный граф степени 6 на 44 вершинах, либо Δ имеет семь связных компонент, являющиеся четырехугольниками, либо Δ — регулярный граф, степени 8 на 58 вершинах;*

(2) *$p = 3$ и Δ является графом Клебша;*

(3) *$p = 5$ и Δ — одновершинный граф, либо граф Клебша;*

(4) *$p = 7$ и Δ — двухвершинная клика;*

(4) *$p = 11$ или 29 и Δ — пустой граф.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махнев А. А., Падучих Д. В. Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика 2001, т. 40, №2, 125–134.

2. Brouwer A. E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs // Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

3. Махнев А. А., Минакова И.М. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $\lambda = 1$ $\mu = 2$ // Дискретная математика, 2004, Т. 16, №1, С. 95–104.

4. Махнев А. А., Носов В. В. Об автоморфизмах графов с $\lambda = 0, \mu = 2$. // Математический сборник. Том 195, №3, 2004, С. 47–68.

5. Носов В. В. Об автоморфизмах графа с параметрами $(704, 37, 0, 2)$ // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 36-й Регион. молод. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С 55–60.

6. Brouwer A. E., Haemers W. H. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993, v. 14, pp. 397–407.

7. Willbrink H. A., Brouwer A. E. A (57, 14, 1) strongly regular graph does not exist // Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A, 1983. Vol. 45, N 1. pp. 117–121.

8. Cameron P. Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts 45, Cambridge Univ. Press. — 1999.

9. Баннаи Э., Ито. Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 375 с.

10. Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links. London Math. Soc. Student Texts 22, 1981. Cambr. Univ. Press. 240 p.

11. Higman D. G. Finite permutation groups of rank 3. — Math. Z., 1964, v. 86, pp. 145–156.

12. Higman D. G. Primitive rank 3 groups with a prime subdegree. — Math. Z., 1966, v. 91, pp. 70–86.

13. Higman D. G. Intersection matricies for finite permutation groups.— J. Algebra, 1967, v. 6, pp. 22–42.

14. Higman D. G. On finite affine planes of rank 3. — Math. Z., 1968, v. 104, pp. 147–149.

15. Higman D. G. A survey of some questions and resalts about rank 3 permutation groups.— Actes, Cjngres Int. Math. Rome, 1970, v. 1, pp. 361–365.

16. Higman D. G. Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees I, II.— Arth. Math., 1970, v. 21, pp. 151–156; pp. 353–361.

17. Nakagawa N. On strongly regular graphs with parameters $(k, 0, 2)$ and their antipodal double cover // Hokkaido Math. Soc. 2001, v. 30, pp. 431–450.

REFERENCES

1. Makhnev A. A., Paduchikh D.V. 2001, "Automorphisms of Aschbacher Graphs", *Algebra and logic*, vol. 40, no. 2, pp. 69–74.
2. Brouwer A. E., Cohen A.M., Neumaier A. 1989. *Distance-regular graphs.* Springer-Verlag. Berlin.
3. Makhnev A. A., Minakova I.M. 2004. "On automorphisms of strongly regular graphs with the parameters $\lambda = 1$ and $\mu = 2$", *Diskr. Mat.*, vol. 16, no. 1, pp. 95–104.
4. Makhnev A. A.,Nosov V.V. 2004. "On automorphisms of strongly regular graphs with $\lambda = 0$, $\mu = 2$,", *SB MATH.*, no. 195(3), pp. 347–367.
5. Nosov V. V. 2005. "On automorphisms graph with the parameters $(704, 37, 0, 2)$", *Problemy teorticheskoj i prikladnoj matematiki: trudy 36th Regionalnoy molodejnoy conferencii.* Ekaterinburg, UB of RAS. pp. 55–60.
6. Brouwer A. E., Haemers W.H. 1993. "The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra", *Europ. J. Comb.* vol. 14. pp. 397–407.
7. Willbrink H. A., Brouwer A. E. A 1983. "(57, 14, 1) strongly regular graph does not exist", *Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A*. Vol. 45, no 1. pp. 117–121.
8. Cameron P. 1999. *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts 45, Cambridge Univ. Press.
9. Eiichi Bannai, Tatsuro Ito. 1984 *Algebraic combinatorics I: Association schemes.* Menlo Park, CA: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc.
10. Cameron P., Van Lint J. 1981 *Designs, Graphs, Codes and their Links.* London Math. Soc. Student Texts 22. Cambr. Univ. Press. 240 pp.
11. Higman D. G. 1964. "Finite permutation groups of rank 3", *Math. Z.*, vol. 86, pp. 145–156.
12. Higman D. G. 1966. "Primitive rank 3 groups with a prime subdegree", *Math. Z.* vol. 91, pp. 70–86.
13. Higman D. G. 1967. "Intersection matricies for finite permutation groups", *J. Algebra*, vol. 6, pp. 22–42.
14. Higman D. G. 1968. "On finite affine planes of rank 3", *Math. Z.* vol. 104, p. 147–149.
15. Higman D. G. 1970. "A survey of some questions and resalts about rank 3 permutation groups". *Actes, Cjngres Int. Math.* Rome, vol. 1, p. 361–365.
16. Higman D. G. 1970 "Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees I, II", *Arth. Math.*, vol. 21, p. 151 — 156; 353–361.
17. Nakagawa N. 2001. "On strongly regular graphs with parameters $(k, 0, 2)$ and their antipodal double cover", *Hokkaido Math. Soc.* vol. 30, 431–450.

Оренбургский государственный университет.
Получено 19.05.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.