ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 511.36

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ РЯДОВ

В. Ю. Матвеев (г. Москва)

**Аннотация**

Статья посвящена исследованию арифметической природы значений в целых точках рядов, принадлежащих так называемому классу $F$– рядов, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — рациональными функциями от $z$.

Рассматривается подкласс $F$- рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n ,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, ...$, где $c_1$- некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел $d_n$ таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \ldots, n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n$, $d_{0,n} \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \ldots$, $d \in \mathbb{N}$ и для любого $n$ число $d_{0,n}$ делится только на простые числа $p$, для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также,что степень, в которой число $p$ входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех $n$ неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2}\right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$.

Ряды такого вида сходятся в точке $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$, если рассматривать их, как $p$–адические числа при любом простом $p$, кроме быть может конечного числа простых $p$.

Прямое произведение колец целых $p$– адических чисел по всем простым $p$ называется кольцом целых полиадических чисел. Его элементы

$$\mathfrak{a} = \sum a_n \cdot n!$$

можно рассматривать, как бесконечномерные векторы, координаты которых, соответствующие полю $\mathbb{Q}_p$, представляют собой сумму $\mathfrak{a}^{(p)}$ ряда $\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n!$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

Для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами определим $P(\mathfrak{a})$ как вектор, координаты которого в поле $\mathbb{Q}_p$ равны $P(\mathfrak{a}^{(p)})$. Следуя классификации введенной в работах В.Г. Чирского, назовем полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ бесконечно алгебраически независимыми, если для любого многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел $p$ таких, что $P\left({\mathfrak{a}_1}^{(p)}, \ldots, {\mathfrak{a}_m}^{(p)}\right) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

В статье доказана теорема, утверждающая, что если $F$–ряды $f_1, \ldots, f_m$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида

$$P_{1,i} y_i' + P_{0,i} y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m$$

где $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i$– рациональные функции от $z$ и если $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, $\xi$ отлично от полюсов всех этих рациональных функций, то при условии

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z)$$

$f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$– бесконечно алгебраически независимые почти полиадические числа.
Используется модификация метода Зигеля–Шидловского и подход В. Х. Салихова к доказательству алгебраической независимости функций, составляющих решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

*Ключевые слова:* алгебраическая независимость, почти полиадические числа.

*Библиография:* 30 названий.

# ALGEBRAIC INDEPENDENCE OF CERTAIN ALMOST POLYADIC SERIES

V. Yu. Matveev (Moscow)

**Abstract**

The paper describes the arithmetic nature of the values at integer points of series from the so-called class of $F$–series which constitute a solution of a system of linear differential equations with coefficients — rational functions in z.

We consider a subclass of the series consisting of the series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!\, z^n$$

where $a_n \in \mathbb{Q}$, $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, \ldots$ with some constant $c_1$. Besides there exists a sequence of positive integers $d_n$ such that $d_n\ a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \ldots, n$ and $d_n = d_{0,n} d_n$, $d_{0,n} \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \ldots, d \in \mathbb{N}$ and for any $n$ the number $d_{0,n}$ is divisible only by primes $p$ such that $p \leqslant c_2 n$. Moreover

$$ord_p n \leq c_3 \left( \log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

We say then that the considered series belongs to the class $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$. Such series converge at a point $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ in the field $\mathbb{Q}_p$ for almost all primes $p$.

The direct product of the rings $\mathbb{Z}_p$ of $p$–adic integers over all primes $p$ is called the ring of polyadic integers. It's elements have the form

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}$$

and they can be considered as vectors with coordinates $\mathfrak{a}^{(p)}$ which are equal to the sum of the series $\mathfrak{a}$ in the field $\mathbb{Q}_p$ (This direct product is infinite).

For any polynomial $P(x)$ with integer coefficients we define $P(\mathfrak{a})$ as the vector with coordinates $P(\mathfrak{a}^{(p)})$ in $\mathbb{Q}_p$. According to the classification, described in V. G. Chirskii's works we call polyadic numbers $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ infinitely algebraically independent, if for any nonzero polynomial $P(x_1, \ldots, x_m)$ with integer coefficients there exist infinitely many primes $p$ such that

$$P\left(\mathfrak{a}_1^{(p)}, \ldots, \mathfrak{a}_m^{(p)}\right) \neq 0$$

in $\mathbb{Q}_p$.

The present paper states that if the considered $F$–series $f_1, \ldots, f_m$ satisfy a system of differential equations of the form

$$P_{1,i} y_i' + P_{0,i} y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m$$

where the coefficients $P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i$ are rational functions in $z$ and if $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, $\xi$ is not a pole of any of these functions and if

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z)$$

then $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ are infinitely algebraically independent almost polyadic numbers.

For the proof we use a modification of the Siegel-Shidlovsky's method and V. G. Chirskii's. Salikhov's approach to prove the algebraic independence of functions, constituting a solution of the above system of differential equations.

*Keywords:* algebraic independence, almost polyadic numbers. *Bibliography:* 30 titles.

## 1. Введение и формулировка теоремы

Напомним основные понятия теории полиадических чисел.

Элементы кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{1}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых $p$-адических чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам $p_i$, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом кольце $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число $p$ входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где $S_n$ — сумма цифр в $p$-ичном разложении числа $n$. Следовательно, для любого $p_i$ при $n \to \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \to 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (1) в $\mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующую сумму будем обозначать $a^{(p_i)}$.

Таким образом, бесконечный набор элементов $a^{(p_i)} \in \mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующих всем простым числам $p_i$, можно рассматривать, как совокупность координат элемента $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел, представленного в виде вектора. Поэтому для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ имеет в кольце $\mathbb{Z}_p$ координату $P(a^{(p)})$.

В работе [1] предложена следующая классификация полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, то есть для любого простого числа $p$ в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом.* В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число $p$ такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел $p$ таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа $p$ в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа $p$.

Назовем полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *алгебраически зависимыми*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ равно нулю, т.е. для любого простого числа $p$ в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) = 0$.

Полиадические числа $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ называются *алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число $p$ такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадические числа *бесконечно алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел $p$ таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадические числа *глобально алгебраически независимыми*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа $p$ в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a_1^{(p)}, \ldots, a_m^{(p)}) \neq 0$.

Термин почти полиадическое число использован для обозначения того случая, когда рассматриваемый ряд сходится во всех полях $\mathbb{Q}_p$, кроме быть может конечного их числа.

На почти полиадические числа переносятся все введенные выше понятия: алгебраическое полиадическое число, трансцендентное полиадическое число, бесконечно трансцендентное полиадическое число, глобально трансцендентное полиадическое число, алгебраически зависимые полиадические числа, алгебраически независимые полиадические числа, бесконечно алгебраически независимые полиадические числа, глобально алгебраически независимые полиадические числа.

Теорема 1. *Пусть*

$$f_1(z), \ldots, f_m(z) \tag{2}$$

*представляют собой трансцендентные $F$–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида*

$$\begin{gathered} P_{1,i} y_i' + P_{0,i} y_i = Q_i, i = 1, \ldots, m \\ \text{где } P_{0,i}, P_{1,i}, Q_i \in \mathbb{Q}(z). \end{gathered} \tag{3}$$

*Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, а также выполняются следующие условия:*

$$\exp\left(\int \left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)} - \frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right) dz\right) \notin \mathbb{C}(z), \quad i \neq j. \tag{4}$$

*Тогда почти полиадические числа $\alpha_1 = f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi) = \alpha_m$ бесконечно алгебраически независимы.*

Доказательство. [Доказательство теоремы 1] Для доказательства используется модифицированный метод Зигеля–Шидловского для $F$–рядов [2].

Здесь мы ограничимся рассмотрением подкласса $F$-рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n \,,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, ...$, где $c_1$- некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел $d_n$ таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}, \ k = 0, \ldots, n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n, \ d_{0,n} \in \mathbb{N}, \ n = 0, 1, \ldots, \ d \in \mathbb{N}$ и для любого $n$ число $d_{0,n}$ делится только на простые числа $p$, для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также,что степень, в которой число $p$ входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех $n$ неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2}\right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F\left(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d\right)$.

Сформулируем теорему (теорема 1 из [3]), которая будет применена к значениям рядов (2).

Теорема 2. *Пусть ряды $f_1(z),\dots,f_m(z)$ принадлежат некоторому классу*

$$F\left(\mathbb{Q},C_1,C_2,C_3,d_0\right).$$

*Пусть $f_1(z),\dots,f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений*

$$Y_i'=\sum_{j=1}^{m}B_{i,j}(z)Y_i,\ i=1,\dots,m, \tag{4}$$

*$B_{i,j}\in\mathbb{Q}(z)$. Пусть $T_0(z)\in\mathbb{Z}[z]$ и $T_0(z)\cdot B_{i,j}(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $i,j=1,\dots,m$, причем пусть степень $T_0(z)$- наименьшая возможная, а коэффиценты $T_0(z)$ – взаимно простые целые числа. Тогда полиадические числа $f_1(\xi),\dots,f_m(\xi)$ бесконечно алгебраически независимы.*

Пусть трансцендентные формальные степенные ряды $y_1,\dots,y_m$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$P_{1,i}y_i'+P_{0,i}y=Q_i,\quad i=1,\dots,m. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы 1 нужно доказать алгебраическую независимость над $\mathbb{Q}(z)$ рядов $f_1(z),\dots,f_m(z)$. Она следует из доказываемой ниже теоремы 3. Доказательство теоремы 3 имеет ту же схему, что и доказательства теорем В.Х. Салихова [5], (см. также [4], стр.198,199).

Теорема 3. *Пусть*

$$f_1(z),\dots,f_m(z) \tag{6}$$

*представляют собой трансцендентные $F$–ряды с целыми коэффициентами, составляющие решение системы вида*

$$\begin{gathered}P_{1,i}y_i'+P_{0,i}y_i=Q_i,i=1,\dots,m\\ \text{где } P_{0,i},P_{1,i},Q_i\in\mathbb{Q}(z).\end{gathered} \tag{7}$$

*Пусть выполняются следующие условия:*

$$\exp\left(\int\left(\frac{P_{0,i}(z)}{P_{1,i}(z)}-\frac{P_{0,j}(z)}{P_{1,j}(z)}\right)dz\right)\notin\mathbb{C}(z),\quad i\neq j. \tag{8}$$

*тогда ряды $f_1(z),\dots,f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Лемма 1. *Пусть трансцендентные ряды $y_i$ удовлетворяют системе уравнений (5) и пусть выполняется условие (8) . Тогда ряды $y_1,\dots,y_m$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{Q}\left(z\right)$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть размерность векторного пространства над $\mathbb{Q}(z)$, порожденного этими рядами, равна $k$, $k<m$. Так как среди рядов $y_1,\dots,y_m$ нет рациональных функций, $k\geqslant 2$. Предположим, что $1,y_1,\dots,y_{k-1}$ линейно независимы, а $1,y_1,\dots,y_k$ — линейно зависимы и имеет место равенство

$$q_0+q_1y_1+\ldots+q_ky_k=0,\quad \text{где}\quad q_i\in\mathbb{Q}(z),i=0,1,\dots,k. \tag{9}$$

Заметим, что по выбору $k$ функция $q_k\neq 0$. Кроме того, так как среди $y_1,\dots,y_k$ нет рациональных функций, существует номер $l$, $1\leqslant l\leqslant k-1$ такой, что $q_l\neq 0$.

Кроме того, так как среди $y_1,\dots,y_k$ нет рациональных функций, существует номер $l$, $1\leqslant l\leqslant k-1$ такой, что $q_l\neq 0$.

Продифференцируем равенство (9), используя систему (5):

$$\Big({q_0}' + {q_1}' y_1 + q_1\left(-\frac{P_{0,1}}{P_{1,1}} y_1 + \frac{Q_1}{P_{1,1}}\right) + \ldots +$$
$$+ {q_l}' y_l + q_l\left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} y_l + \frac{Q_l}{P_{1,l}}\right) + \ldots +$$
$$+ {q_k}' y_k + q_k\left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}} y_k + \frac{Q_k}{P_{1,k}}\right)\Big) = 0$$

или

$$ {q_0}' + \frac{Q_i}{P_{1,i}}(q_1 + \ldots + q_k) + \left({q_1}' + q_1\left(-\frac{P_{0,1}}{P_{1,1}}\right)\right) y_1 + \ldots + \left({q_l}' + q_l\left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right)\right) y_l + \ldots + \left({q_k}' + q_k\left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right)\right) y_k = 0 \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что в поле рациональных функций выполняется равенство

$$\frac{{q_l}'}{q_l} - \frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} = \frac{{q_k}'}{q_k} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}, \tag{11}$$

иначе бы из этих двух уравнений можно было бы исключить переменную $y_k$ и получить нетривиальное уравнение, связывающие над $\mathbb{Q}(z)$ ряды $1, y_1, \ldots, y_{k-1}$. Равенство (11) преобразуем к виду

$$\begin{gathered}
{q_l}' + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) q_l = {q_k}' + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) q_k \\
\frac{q_l' + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) q_l}{q_l} = \frac{q_k' + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) q_k}{q_k} \\
\frac{q_l'}{q_l} + \left(-\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) = \frac{q_k'}{q_k} + \left(-\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
\frac{q_l'}{q_l} - \frac{q_k'}{q_k} = \frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}} \\
(\ln q_l)' - (\ln q_k)' = \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}}\right) - \left(\frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
\left(\ln\frac{q_l}{q_k}\right)' = \left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) \\
\ln\frac{q_l}{q_k} = \int\left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) dz + \ln C \\
\frac{q_l}{q_k} = e^{\int\left(\frac{P_{0,l}}{P_{1,l}} - \frac{P_{0,k}}{P_{1,k}}\right) dz} \cdot C
\end{gathered} \tag{12}$$

Из условия (8) следует , что правая часть этого равенства не является рациональной функцией и не может быть равна $\frac{q_l}{q_k}$. Лемма 1 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы по индукции. Пусть $m > 1$, пусть ряды

$$f_1 = f_1(z), \ldots, f_m = f_m(z) \tag{13}$$

алгебраически зависимы над $\mathbb{Q}(z)$, а число $l$ таково, что любые $l-1$ среди этих рядов алгебраически независимы, но существуют $l$ рядов таких, что они алгебраически зависимы. Так как нумерация рядов (13) в нашем распоряжении, можно считать, что $f_1, \ldots, f_{l-1}$ алгебраически независимы, а $f_1, \ldots, f_l$ алгебраически зависимы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений которой удовлетворяют ряды $f_1, \ldots, f_l$

$$w_i{}' = P_{0,i} w_i - Q_i, \quad i = 1, \ldots, l \tag{14}$$

и соответствующий системе (14) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{l} (P_{0,i} w_i - Q_i) \frac{\partial}{\partial w_i} \tag{15}$$

Пусть $P = P(z, w_1, \ldots, w_l) \in \mathbb{Q}[z, w_1, \ldots, w_l]$ отличный от тождественного нуля и неприводимый многочлен такой, что

$$P(z, f_1, \ldots, f_l) = 0. \tag{16}$$

Применяя лемму 4 из книги [4] ( глава 4, стр 161–162) получаем, что с некоторым $Q(z) \in \mathbb{Q}(z)$ выполнено равенство многочленов из $\mathbb{Q}[z, w_1, \ldots, w_l]$

$$DP = QP. \tag{17}$$

Пусть степень многочлена $P$ по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$ равна $s$. Представим многочлен $P$ в виде

$$P = \sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} P_{\overline{k}} \cdot w_1{}^{k_1} \ldots w_l{}^{k_l}, \tag{18}$$

где $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, $P_{\overline{k}} \in \mathbb{Q}[z]$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$. Из (14) – (18) следует, что

$$D\left(\sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}\right) = Q\left(\sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned}\sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} \left(P'_{\overline{k}} w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l} + \sum_{i=1}^{l} P_{\overline{k}} \left(k_i w_1^{k_1} \ldots w_i^{k_i-1} \ldots w_l^{k_l}\right) \cdot (P_{0,i} w_i - Q_i)\right) = \\ = \sum_{k_1+\ldots+k_l \leqslant s} Q P_{\overline{k}}\, w_1^{k_1} \ldots w_l^{k_l}.\end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим произвольный отличный от нуля член многочлена $P$, имеющий наибольшую степень $s$ по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_l$. Пусть он имеет вид $P_{\overline{r}} w_1^{r_1} \ldots w_l^{r_l}$, где $r_1 + \ldots + r_l = s$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_l)$, $P_{\overline{r}} \neq 0$.

Из (19) следует, что $P_{\overline{r}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} r_i P_{0,i}\right) y. \tag{20}$$

Аналогичное равенство с заменой $r_i$ на $t_i$ выполняется для любого коэффициента $P_{\overline{t}}$ с индексом $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, удовлетворяющим условию $t_1 + \ldots + t_l = s$.

Пусть $j$ выбрано так, что $r_j > 0$ и пусть $P_{\overline{k}}$ – коэффициент многочлена $P$ с индексом $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_l)$, для которого выполнены равенства: $k_i = r_i$, $i \neq j$, $k_j = r_j - 1$. Из (19) следует, что

$$\begin{aligned}P_{\overline{k}}{}' = \left(Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i}\right) P_{\overline{k}} + \\ \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, Q_i P_{\overline{k}}\end{aligned} \tag{21}$$

где
$$\overline{k}_j = (k_1, \ldots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \ldots, k_l) \tag{22}$$
Рассмотрим ряд
$$\Phi = \overline{\Phi}(z) = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, P_{\overline{k}_j} f_j \tag{23}$$
и вычислим, используя (20), (23) (т.к. для $P_{\overline{k}_j}$ сумма индексов равна $s$)
$$\begin{gathered}\Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left( P_{\overline{k}_j}{}' f_j + P_{\overline{k}_j} f_j{}' \right) = \\ = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left( f_j \left( Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} - P_{0,j} \right) P_{\overline{k}_j} + P_{\overline{k}_j} \left( P_{0,j} f_j \right) - Q_j P_{\overline{k}_j} \right),\end{gathered} \tag{24}$$
$$\Phi' = -\sum_{j=1}^{l} (k_j + 1) \left( Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) P_{\overline{k}_j} f_j + \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)\, Q_j P_{\overline{k}_j}$$
Из уравнений (21), (24) следует, что
$$P_{\overline{k}}{}' - \Phi' = \left( Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} \right) \left( P_{\overline{k}} - \Phi \right). \tag{25}$$
Обозначим $Y_{\overline{k}} = P_{\overline{k}} - \Phi$. Пусть
$$w = \frac{Y_{\overline{k}}}{P_{\overline{k}_j}},$$
где $P_{\overline{k}_j} = P_{\overline{r}} \neq 0$ по определению $\overline{k}_j$. Тогда согласно (20), (25)
$$\frac{w'}{w} = \frac{Y'_{\overline{k}}}{Y_{\overline{k}}} - \frac{P'_{\overline{k}_j}}{P_{\overline{k}_j}} = \left( Q - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} k_i P_{0,i} \right) - \left( Q - \sum_{i=1}^{l} k_i P_{0,i} - P_{0,j} \right) = P_{0,j},$$
Следовательно,
$$w' = P_{0,j} w. \tag{26}$$
Рассмотрим ряд
$$\begin{gathered}\Omega = f_j - \frac{1}{k_j + 1} w = f_j - \frac{1}{k_j + 1} \left( \frac{P_{\overline{k}} - \Phi}{P_{\overline{r}}} \right) = \frac{1}{(k_j + 1)\, P_{\overline{r}}} \left( P_{\overline{r}} f_j{}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \Phi \right) = \\ \frac{1}{(k_j + 1)\, P_{\overline{r}}} \left( P_{\overline{r}} f_j{}^{(k_j+1)} - P_{\overline{k}} + \sum_{i=1}^{l} (k_i + 1)\, P_{\overline{k}_i} \cdot f_i \right) = -\frac{1}{(k_j + 1)\, P_{\overline{r}}} \left( P_{\overline{k}} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} (k_i + 1)\, P_{\overline{k}_i} f_i \right),\end{gathered} \tag{27}$$
так как $\overline{r} = \overline{k}_j$, ввиду определения $\overline{k}$ и равенства (22).

Поскольку, ввиду (14) и (26)
$$\begin{gathered} f_j{}' = P_{0,j} f_j - Q_{0,j}, \\ w' = P_{0,j} w, \\ \frac{w'}{k_j + 1} = \frac{w P_{0,j}}{k_j + 1}, \end{gathered}$$

получаем

$$\begin{aligned}\Omega' = \left(f_j - \frac{1}{k_j+1}w\right)' = f_j' - \frac{1}{k_j+1}\cdot P_{0,j}w = \\ = P_{0,j}f_j - Q_{0,j} - P_{0,j}\cdot\frac{w}{k_j+1} = \\ = P_{0,j}\left(f_j - \frac{w}{k_j+1}\right) - Q_{0,j},\end{aligned}$$

то есть $\Omega$ является решением того же уравнения, что и $f_j$, но равенство (27) означает, что ряды $\Omega, 1, f_1, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_l$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}(z)$. Но это противоречит лемме 1. Теорема доказана. □

## 2. Заключение

В работах [1] – [30] развита теория арифметических свойств $p$–адических и полиадических чисел. Полученные в настоящей работе результаты продолжают исследования, проведенные в работах автора и В. Г. Чирского [13–15, 18, 19].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. (2014), "Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами", *Доклады Академии наук, математика*, том 439, № 6, с. 677–679.

2. Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y. (2004), "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII.*, № 2, pp. 241–260.

3. Чирский В. Г. (2015), "Арифметические свойства целых полиадических чисел", *Чебышевский сборник*, том 16, выпуск 1, с. 254–264.

4. Шидловский А. Б. (1987), "Трансцендентные числа", М. *Наука*, 417с.

5. Салихов В. Х. (1973), "Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка", *Матем. заметки.*, т.13., № 1, с. 29–40.

6. Чирский. В. Г. (1990), "О глобальных соотношениях", *Матем. заметки*, том.48, вып. 2. с. 123–127 .

7. Нестеренко Ю. В. (1994), "Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций", *Матем. сборник*, т.185, № 10, 48–72 .

8. Чирский В. Г. (2015), "Об арифметических свойствах ряда Эйлера", *Вестник Московского Университета.*, Серия 1: Математика. Механика. № 1, с. 59–61 .

9. Постников А. Г. (1971), "Введение в аналитическую теорию чисел", М. *Наука.*

10. Понтрягин Л. С. (1984), "Непрерывные группы", М. *Наука.*

11. Новоселов Е. В. (1960), "Топологическая теория делимости целых чисел", *Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та* 3, с. 3–23.

12. Чирский В. Г., Шакиров Р. Ф. (2013), "О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований", М. *Чебышевский сборник.*, № 1.

13. Матвеев В. Ю., Чирский В. Г. (2013), "О ряде из произведений членов арифметической прогрессии", *Преподаватель XXI век.*, № 4, ч. 2., с. 249–254.

14. Матвеев В. Ю. (2013), "О значениях некоторого ряда в полиадических точках, хорошо приближаемых натуральными числами", *Преподаватель XXI век.*, № 4, ч. 2., с. 255–259.

15. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. (2013), "О некоторых свойствах полиадических разложений", *Чебышевский сборник*, том 14 выпуск 2, с. 164–172 .

16. Чирский В. Г. (2011), "Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел", *Чебышевский сборник*, том 12, № 4, 129–134.

17. Чирский В. Г. (2012), "Полиадические оценки для F-рядов", *Чебышевский сборник*, том 13, вып.2, 131–136.

18. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. (2013), "О представлении натуральных чисел", *Чебышевский сборник.*, том 14. вып.1, с. 92–101.

19. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. (2013), "О представлении натуральных чисел", *Вестник МГУ*, сер.1, матем., механ., № 6, 57–59.

20. Чирский В. Г. (2014), "Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами", *Известия РАН*, Серия математическая., том 78, выпуск 6, стр. 193–210.

21. Чирский В. Г. (1989), "О нетривиальных глобальных соотношениях", *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 5, с. 33–36

22. Чирский В. Г. (1990), "Об алгебраических соотношениях в локальных полях", *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 3, с. 92–95.

23. Чирский В. Г. (1991), "Глобальные соотношения и гипергеометрические ряды", *Успехи матем. наук.*, том.46, вып.6(282), с. 221–222.

24. Чирский В. Г. (1992), "Об алгебраических соотношениях в неархимедовски нормированных полях", *Функциональный анализ и прилож.*, том 26, вып.2, с. 41–50.

25. Чирский В. Г. (1994), "О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях", *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 3, с. 93–95.

26. Чирский В. Г. (1994), "Оценки многочленов и линейных форм в прямых произведениях полей", *Вестник Московского ун-та.*, сер.1, матем., механ., № 4, с. 35–39.

27. Чирский В. Г., Bundschuh P. (2004), "Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$", II, *ActaArithmetica*, 113.4, с. 309–326.

28. Чирский В. Г. (2005), "Метод Зигеля в $p$–адической области", *Фундам. и прикл. Матем*, том 11, № 6, 221–230.

29. Чирский В. Г. (2005), "Обобщение понятия глобального соотношения", *Записки научных семинаров ПОМИ*, том 322, с. 220–238.

30. Чирский В. Г., Bundschuh P. (2002), "Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$", *Arch.der Math.*, 79, 345–352.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Chirskii V. G. (2014), "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, v.90, no.3, pp. 766–768.
2. Bertrand D., Chirskii V. G, Yebbou Y. (2004), "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII.*, no. 2, pp. 241–260.
3. Chirskii V. G. (2015), "Arithmetic properties of polyadic integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v. 16, no. 1, pp. 254–264.(Russian)
4. Shidlovskii A. B. (1989), "Transcendental numbers", *W.de Gruyter*.
5. Salikhov V. Kh. (1973), "On algebraic independence of the values of E-functions which satisfy first order linear differential equations", *Mat. Zametki*, v.13, no. 1, pp. 29–40.
6. Chirskii V. G. (1990), "Global relations", *Math.Notes*, 48, pp. 795–798.
7. Nesterenko Yu. V. (1995), "Hermite-Pade approximations of generalized hypergeometric functions", Engl.transl. Russ.Acad.Sci.Sb.Math, 85, pp. 189–219.
8. Chirskii V. G. (2015), "On the arithmetic properties Euler series", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 1, pp. 59–61.(Russian)
9. Postnikov A. G. (1971), "Introduction to analytic number theory", Moscow, *Nauka*, 416 p. (Russian)
10. Pontryagin L. S. (1984), "Continious groups", Moscow, *Nauka*, 529 p. .(Russian)
11. Novoselov E. V. (1960), "Topological theory of divisibility", *Uchen.zapiski Elabugh. Ped. Inst*, 8, pp. 3–23.
12. Chirskii V. G., Shakirov R. F. (2013), "On representations of integers in DBNS", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.14, no. 1 (20153), pp. 254–264.(Russian)
13. Matveev V. Yu., Chirskii V. G. (2013), "On a series of products of terms of an arithmetic progression", *Prepodavatel 21 veka*, no. 4, pp. 245–254.(Russian)
14. Matveev V. Yu. (2013), "On the values of a certain series at polyadic points, well approximable by positive integers", *Prepodavatel 21 veka*, no. 4, pp. 339–354 .(Russian)
15. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. (2013), "On certain properties of polyadic expansions", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.14, no. 2, pp. 163–172.(Russian)
16. Chirskii V. G. (2011), "Estimates of linear forms and polynomials in polyadic integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.12, no. 4, pp. 129–134.(Russian)
17. Chirskii V. G. (2012), "Polyadic estimates for $F$-series", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.13, no. 2, pp. 131–136.(Russian)
18. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. (2013), "On a representation of positive integers", *Tchebyshevskiy sbornik*, v.14, no. 6 , pp. 92–101.(Russian)
19. Chirskii V. G., Matveev V. Yu. (2013), "On a representation of positive integers", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 1, pp. 57–59.(Russian)

20. Chirskii V. G. , "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya:Mathematics*, 78:6, pp. 1244–1260.

21. Chirskii V. G. (1989), "On nontrivial global relations", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 5, pp. 33–36.(Russian)

22. Chirskii V. G. (1990), "On algebraic relations in local fields", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 3,pp. 92–95.(Russian)

23. Chirskii V. G. (1991), "Global relations and hypergeometric series", *Uspekhi Mat.Nauk*, v. 48, no. 6, pp. 221–222.

24. Chirskii V. G. (1992), "On algebraic relations in non-archimedean fields", *Funct.Anal.Appl.*, 26, pp. 108–115.

25. Chirskii V. G. (1994), "On series which are algebraically independent in all local fields", *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 3, pp. 93–95.(Russian)

26. Chirskii V. G. (1994), "Estimates of polynomials and linear forms in direct products of fields" , *Vestnik Mosc.Univ.*, no. 4, pp. 35–39.(Russian)

27. Chirskii V. G., Bundschuh P. (2004), "Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$", II, *ActaArithmetica*, 113.4, с. 309–326.

28. Chirskii V. G. (2005), "Siegel's method in $p$–adic domain", *Fundam I prikl.matem.*, v.11, no. 6, pp. 221–230.

29. Chirskii V. G. (2006), "A generalization of the notion of global relation", *Zapiski nauch. Semin POMI*, 322, pp. 220–238.

30. Chirskii V. G., Bundschuh P. (2002), "Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$", *Arch.der Math.*, 79, 345–352.

Получено 30.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.