ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 511

О КОЛИЧЕСТВЕ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА, ЛЕЖАЩИХ В «ПОЧТИ ВСЕХ» ОЧЕНЬ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там (г. Белгород)

Аннотация

Центральной проблемой аналитической теории чисел является доказательство (или опровержение) гипотезы Римана. К настоящему времени она не решена.

В 1985 году А. А. Карацуба доказал, что при любом $0 < \varepsilon < 0,001$, $0,5 < \sigma \leq 1$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$ и $H = T^{27/82+\varepsilon}$ в прямоугольнике с вершинами $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + H)$, $1 + i(T + H)$, $1 + iT$ содержится не больше, чем $cH/(\sigma - 0,5)$ нулей функции $\zeta(s)$. Тем самым А.А. Карацуба существенно усилил классическую теорему Дж. Литтлвуда.

Для индивидуального прямоугольника существенно уменьшить величину H не удается. Однако решая эту задачу «в среднем», Л.В. Киселева в 1989 году доказала, что для «почти всех» T из промежутка $[X, X + X^{11/12+\varepsilon}]$, $X > X_0(\varepsilon)$, для которых в прямоугольнике с вершинами $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + X^{\varepsilon})$, $1 + i(T + X^{\varepsilon})$, $1 + iT$ содержится не больше, чем $O(X^{\varepsilon}/(\sigma - 0,5))$ нулей функции $\zeta(s)$.

В нашей статье получен результат подобного рода, но только для «почти всех» T из промежутка $[X, X + X^{7/8+\varepsilon}]$.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая.

Библиография: 23 названия.

ON NUMBER OF ZEROS OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION THAT LIE IN «ALMOST ALL» VERY SHORT INTERVALS OF NEIGHBORHOOD OF THE CRITICAL LINE

Do Duc Tam (Belgorod)

Abstract

Proof (or disproof) of the Riemann hypothesis is the central problem of analytic number theory. By now it has not been solved.

In 1985 Karatsuba proved that for any $0 < \varepsilon < 0,001$, $0,5 < \sigma \leq 1$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$ and $H = T^{27/82+\varepsilon}$ in the rectangle with vertices $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + H)$, $1 + i(T + H)$, $1 + iT$ contains no more than $cH/(\sigma - 0,5)$ zeros of $\zeta(s)$. Thereby A.A. Karatsuba significantly strengthened the classical theorem J. Littlewood's.

Decrease in magnitude of H for individual rectangle has not been obtained. However, by solving this problem «on average», in 1989 L.V. Kiseleva proved that for «almost all» T in the interval $[X, X + X^{11/12+\varepsilon}]$, $X > X_0(\varepsilon)$ in rectangle with vertices $\sigma + iT$, $\sigma + i(T + X^{\varepsilon})$, $1 + i(T + X^{\varepsilon})$, $1 + iT$ contains no more than $O(X^{\varepsilon}/(\sigma - 0,5))$ zeros of $\zeta(s)$.

In this article, we obtain a result of this kind, but for «almost all » T in the interval $[X, X + X^{7/8+\varepsilon}]$.

Keywords: zeta function, non-trivial zeros, critical line.

Bibliography: 23 titles.

1. Введение

Впервые $\zeta(s)$ при вещественных s рассматривалась Л. Эйлером, которому принадлежит замечательное тождество, выражающее $\zeta(s)$ через эйлерово произведение

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \Re(s) > 1,$$

где в правой части стоит произведение по всем простым числам p. Тождество Эйлера указывает на связь, которая существует между функцией $\zeta(s)$ и простыми числами.

Бернхард Риман стал изучать дзета-функцию как функцию комплексного переменного. В 1859 г. он (см. [1, с. 219]) высказал гипотезу о том, что все комплексные нули дзета-функции $\zeta(s)$ лежат на критической прямой $\Re(s) = 1/2$. Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, выражается через распределение комплексных нулей дзета-функции. До сих пор гипотеза Римана ещё не доказана и не опровергнута. Дзета-функцию изучали многие математики, например: Г. Харди [2,3], Дж. Литтлвуд [3,4], А. Сельберг [5], Н. Левинсон [6], А. А. Карацуба [7–16] и другие. А. А. Карацуба в своей работе [12] выделил три направления в исследованиях, связанных с нулями $\zeta(s)$:

1. граница нулей $\zeta(s)$,
2. нули $\zeta(s)$ на критической прямой,
3. плотность распределения нулей в критической полосе.

В настоящей статье продолжены исследования, связанные с распределением нулей $\zeta(s)$ в критической полосе. Получена оценка сверху для числа нулей $\zeta(s)$, лежащих в «почти всех» очень коротких промежутках окрестности прямой $\Re(s) = 1/2$.

Пусть $N(\sigma, T)$ — число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике с вершинами $s = \sigma$, $s = \sigma + iT$, $s = 1$ и $s = 1 + iT$. В 1924 г. Дж. Литтлвуд [4] на основе теоремы о количестве нулей аналитической функции в прямоугольнике доказал следующие 2 теоремы:

Теорема 1. *При $1/2 < \sigma \le 1$ равномерно по σ справедлива оценка*

$$N(\sigma, T) = O\left(\frac{T}{\sigma - 0,5} \log \frac{1}{\sigma - 0,5}\right). \tag{1}$$

Теорема 2. *Если $\Phi(t)$ — положительная и стремящаяся к бесконечности вместе с t функция, то почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в области*

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \Phi(t) \frac{\ln \ln t}{\ln t}. \tag{2}$$

Добавив к соображению Дж. Литтлвуда идею использования «успокаивающего множителя», А. Сельберг в [5] доказал следующую теорему:

Теорема 3. *Если $H \ge T^a$, где $a > 1/2$, то при $1/2 < \sigma \le 1$ равномерно по σ справедлива оценка*

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right). \tag{3}$$

Отсюда следует, что множитель $\ln (1/(\sigma - 0,5))$ в оценке (1) под знаком O можно пропустить. В той же работе А. Сельберг доказал усиление теоремы Дж. Литтлвуда:

Теорема 4. *Если $\Phi(t)$ — положительная и стремящаяся к бесконечности вместе с t функция, то почти все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат в области*

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \Phi(t)\frac{1}{\ln t}. \tag{4}$$

Следующий шаг в этом направлении выполнил А. А. Карацуба, который в 1985 г. методом тригонометрических сумм доказал неравенство (3) для $H = T^{27/82+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число.

Л. В. Киселева в [18] рассматривала эту задачу «в среднем». Доказано, что для всех $T \in [X, X + X_1]$, $X_1 = X^{11/12+\varepsilon}$ и $H = X^{\varepsilon}$, за исключением $o(X_1)$ из них, имеет место неравенство (3).

В настоящей работе мы получим результат подобного рода, но только для случая $T \in \left[X, X + X^{7/8+\varepsilon}\right]$. Сформулируем основную теорему:

Теорема 5. *Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое фиксированное число,*

$$X > X_0(\varepsilon) > 0, \quad H = X^{\varepsilon}, \quad X \le T \le X + X_1, \quad X_1 = X^{7/8+\varepsilon}.$$

Через E обозначим множество тех T из промежутка $X \le T \le X + X_1$, для которых неравенство

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T) \le c\frac{H}{\sigma - 0,5}, \tag{5}$$

не выполняется, где $1/2 < \sigma < 1$, $c = c(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε. Тогда для меры этого множества $\mu(E)$ справедлива оценка:

$$\mu(E) \ll X_1 X^{-0,5\varepsilon}.$$

2. Леммы

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения: $0 < \varepsilon < 0,01$ — произвольно малое фиксированное число, X — растущий параметр, $X_1 \geqslant X^{7/8+\varepsilon}$, $X \le T \le X + X_1$, $P = \sqrt{T/2\pi}$, $H = X^{\varepsilon}$, $L = \ln X$, $Y = H^{0,01}$, $P_1 = PY$, числа $\delta(\nu)$ и $a(m)$ определяются следующим равенствами

$$\delta(\nu) = \sum_{r\nu<Y} \frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)} \left(\sum_{r<Y} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1},$$

$$a(m) = \sum_{\substack{n\nu=m \\ n\leqslant P, \nu<Y}} \frac{\sqrt{\nu}\delta(\nu)}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Справедлива следующая оценка*

$$\Sigma = \sum_{m<P_1} a^2(m) = O(1).$$

Доказательство см. в [20, стр. 149].

Лемма 2. *При натуральных числах m, m_1, m_2 положим*

$$D(m_1, m_2) = a(m_1)a(m_2)\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-iT},$$

$$W(T) = \sum_{m_1<m_2<P_1} D(m_1, m_2).$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\int_X^{X+X_1} W(T)^2 dT \ll \frac{X_1 Y^8 L^5}{H},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε.

Доказательство. Если

$$\frac{m_2}{m_1} > 1 + \frac{L}{H},$$

то

$$\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{L^2}{64}\right).$$

С другой стороны

$$\delta(\nu) = \sum_{r\nu<Y} \frac{\mu(\nu r)\mu(r)}{\varphi(r\nu)} \left(\sum_{r<Y} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1} = \frac{\mu(\nu)}{\varphi(\nu)} \sum_{\substack{r\nu<Y\\(r,\nu)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \left(\sum_{r<Y} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r\nu)}\right)^{-1} < \frac{1}{\varphi(\nu)}.$$

Таким образом тривиально оценивая часть суммы $W(T)$, отвечающую таким слагаемым, у которых

$$m_2 > m_1(1 + L/H),$$

имеем

$$\sum_{\substack{m_1<m_2<P_1\\m_2>m_1(1+L/H)}} D(m_1, m_2) \ll \sum_{\nu_1,\nu_2<Y} \sum_{\substack{n_1\nu_1<n_2\nu_2<P_1\\n_2\nu_2>n_1\nu_1(1+L/H)}} \frac{\sqrt{\nu_1\nu_2}}{\sqrt{n_1n_2}} \exp\left(-\frac{L^2}{64}\right) = O\left(\exp(-0,01L^2)\right).$$

Следовательно,

$$|W(T)|^2 \ll \left|\sum_{\nu_1,\nu_2<Y} S(\nu_1, \nu_2)\right|^2 + O(e^{-0,02L^2}),$$

где

$$S(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1\leqslant P} \sum_{\substack{n_1\nu_1<n_2\nu_2\leqslant n_1\nu_1(1+L/H)\\n_2\leqslant P}} D\left(n_1\nu_1, n_2\nu_2\right).$$

Далее, применяя неравенство Коши к сумме по ν_1, ν_2, получаем

$$|W(T)|^2 \ll Y^2 \sum_{\nu_1,\nu_2<Y} |S(\nu_1, \nu_2)|^2 + O(e^{-0,02L^2}).$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2 dT \ll Y^6 \int_X^{X+X_1} \left|\sum_{n_1\leqslant P} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)\\n_2\leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T)\right|^2 dT,$$

где

$$\Phi(n_1, n_2, T) = \frac{1}{\sqrt{n_1n_2}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right),$$

$\beta = \nu_1/\nu_2$ и ν_1, ν_2 — некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y. Пусть $P_0 = \sqrt{X/(2\pi)}$. Разбивая промежуток суммирования по n_1 на два промежутка точкой P_0, приходим к неравенству:

$$\int_X^{X+X_1} |W(T)|^2\,dT \ll Y^6 \left(\int_X^{X+X_1} \left| \sum_{n_1 \leqslant P_0} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right|^2 dT + \right.$$

$$\left. + \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{P_0 < n_1 \leqslant P} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right|^2 dT \right). \qquad (7)$$

Обозначаем интегралы в правой части (7) через J_1 и J_2. В подынтегральной сумме для J_1 $n_1 \leqslant P_0$, а для J_2 — $P_0 < n_1 \leqslant P\alpha$.

Оценим J_2 сверху. Пусть $P_2 = \sqrt{(X + X_1)/(2\pi)}$ и $M = [P_2 Y] + 1$. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i l(n - n')}{M} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = n', \\ 0, & \text{если } n \neq n', \end{cases}$$

преобразуем подынтегральную сумму по n_1, n_2 в J_2 так:

$$\sum_{\substack{P_0 < n_1 \leqslant P \\ n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) = \frac{1}{M^2} \sum_{l_1, l_2 = 0}^{M-1} \sum_{P_0 < n_1', n_2' \leqslant P} \exp\left(-\frac{2\pi i\,(n_1' l_1 + n_2' l_2)}{M} \right) K(l_1, l_2, T), \quad (8)$$

где

$$K(l_1, l_2, T) = \sum_{P_0 < n_1 \leqslant P_2} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P_2}} \Phi(n_1, n_2, T) \exp\left(\frac{2\pi i n_1 l_1}{M} \right) \exp\left(\frac{2\pi i n_2 l_2}{M} \right).$$

Суммы по n_1' и n_2' в (8) оцениваем сверху так:

$$\left| \sum_{P_0 < n_1' \leqslant P} \exp\left(-\frac{2\pi i n_1' l_1}{M} \right) \right| \ll \frac{M}{l_1 + 1}; \quad \left| \sum_{P_0 < n_2' \leqslant P} \exp\left(-\frac{2\pi i n_2' l_2}{M} \right) \right| \ll \frac{M}{l_2 + 1}.$$

Отсюда и из неравенства (8) следует, что:

$$\left| \sum_{\substack{P_0 < n_1 \leqslant P \\ n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right| \ll \sum_{l_1, l_2 = 0}^{M-1} \frac{1}{l_1 + 1} \frac{1}{l_2 + 1} \left| K(l_1, l_2, T) \right|.$$

Применяя неравенство Коши, получаем:

$$\left| \sum_{P_0 < n_1 \leqslant P} \sum_{\substack{n_1\beta < n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_2 \leqslant P}} \Phi(n_1, n_2, T) \right|^2 \leqslant L^2 \sum_{l_1 = 0}^{M-1} \sum_{l_2 = 0}^{M-1} \frac{1}{l_1 + 1} \frac{1}{l_2 + 1} \left| K(l_1, l_2, T) \right|^2.$$

Следовательно,

$$J_2 \leqslant L^2 \sum_{l_1=0}^{M-1} \sum_{l_2=0}^{M-1} \frac{1}{l_1+1} \frac{1}{l_2+1} \int_X^{X+X_1} |K(l_1,l_2,T)|^2 \, dT \leqslant L^4 \int_X^{X+X_1} \left|K(l_1',l_2',T)\right|^2 dT, \qquad (9)$$

где $0 \leqslant l_1', l_2' < M$ — некоторые фиксированные натуральные числа.

Оценим теперь последний интеграл сверху. Применяя известный приём (см., например в [8, с. 576]), получаем:

$$\int_X^{X+X_1} |K(l_1,l_2,T)|^2 \, dT \ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((T-X)/X_1)^2} \left|K(l_1',l_2',T)\right|^2 dT \ll$$

$$\ll X_1 \sum_{P_0<n_1,n_3\le P_2,} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_3\beta<n_4\le n_3\beta(1+L/H)\\ n_2,n_4<P_2}} \frac{1}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}} \exp\left(-\left(\frac{X_1}{2}\ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{X_1}{P_0^2\beta} \sum_{P_0<n_1,n_3\le P_2} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_3\beta<n_4\le n_3\beta(1+L/H)\\ |n_2n_3-n_1n_4|\le P_2^2L/X_1}} 1 + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right) \leqslant \frac{X_1}{P_0^2\beta} R + O\left(e^{-0{,}01L^2}\right),$$

где R — число возможных n_1, n_2, n_3, n_4, удовлетворяющих условиям:

$$P_0 < n_1, n_3 \le P_2, n_1\beta < n_2 \le n_1\beta(1+L/H),$$

$$n_3\beta < n_4 \le n_3\beta(1+L/H), |n_2n_3 - n_1n_4| \le P_2^2 L/X_1.$$

Если зафиксируем числа n_1 и n_4, то число возможных пар n_2, n_4 не превосходит величины R_1, где

$$R_1 = \sum_{-P_2^2L/X_1+n_1n_4\leqslant m\leqslant n_1n_4+P_2^2L/X_1} \tau(m) \ll \frac{P_2^2L^2}{X_1}.$$

Откуда получаем

$$R \ll (P_2 - P_0)\frac{P_2\beta L}{H}\frac{P_2^2L^2}{X_1} \ll \frac{XL^3\beta}{H}.$$

Следовательно,

$$\int_X^{X+X_1} |K(l_1,l_2,T)|^2 \, dT \ll \frac{X_1}{P_0^2\beta}\frac{X\beta L^3}{H} = \frac{X_1L^3}{H}.$$

Из (9) и этого неравенства получаем:

$$J_2 \ll \frac{X_1L^7}{H}. \qquad (10)$$

Оценим интеграл J_1 сверху. Заметим, что в формуле, которой определяется J_1, условие $n_2 \leqslant P\gamma$ лишнее, так как

$$n_2 \leqslant n_1\beta(1+L/H) \leqslant P_0\alpha\beta(1+L/H) < P_2\gamma.$$

Разбивая промежуток суммирования по n_1 в этой формуле на $\ll L$ промежутков вида $N < n_1 \le N_1 \le 2N \le P_0\alpha$, приходим к неравенству

$$J_1 \ll L^2 \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\le N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H)} \Phi(n_1,n_2,T) \right|^2 dT.$$

Повторяя такие же рассуждения, как и в случае для J_2, получаем неравенство:

$$J_1 \ll L^2 I_1, \tag{11}$$

где

$$I_1 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\le N_2} \sum_{N\beta<n_2\le N_3\beta} \frac{e^{-(H\ln(n_2/n_1\beta)/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} E(n_1,n_2) \right|^2 dT,$$

$$E(n_1,n_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } N < n_1 \le N_1 \text{ и } n_1\beta < n_2 \le n_1\beta(1+L/H), \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

$N < N_2 \leqslant N_1$ и $N < N_3 \leqslant N_1(1+L/H)$ — некоторые фиксированные числа.

Оценим теперь I_1 сверху. Рассуждая так же как это было сделано для оценки $I(B_1', B_2')$, имеем

$$I_1 \ll X_1 \left| \sum_{N<n_1,n_3\le N_2} \sum_{N\beta<n_2,n_4\le N_3\beta} \left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{iX} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4)E(n_1,n_2)E(n_3,n_4) \right|,$$

где

$$\eta(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{e^{-(H\ln(n_2/(n_1\beta))/2)^2} e^{-(H\ln(n_4/(n_3\beta))/2)^2} e^{-(X_1\ln(n_2n_3/(n_1n_4))/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}}.$$

Если $|n_2n_3 - n_1n_4| > N^2\beta L/X_1$, то

$$\left| \ln\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right) \right| \geqslant \frac{L}{2X_1}.$$

Отсюда следует, что часть последней кратной суммы по n_1, n_2, n_3, n_4, отвечающая таким слагаемым, есть величина $O(e^{-0,01L^2})$. Тем самым получаем:

$$I_1 \ll X_1\left(\Sigma + |W|\right) + O\left(e^{-0,01L^2}\right), \tag{12}$$

где Σ — часть последней суммы, отвечающая таким слагаемым, у которых $n_2n_3 = n_1n_4$, а W — слагаемым, у которых $1 \le n_2n_3 - n_1n_4 \le N^2\beta L/X_1$.

Оценим сумму Σ тривиально. Имеем:

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{N<n_1,n_3\leqslant N_1} \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\leqslant n_1\beta(1+L/H) \\ n_3\beta<n_4\leqslant n_3\beta(1+L/H) \\ n_1n_4=n_2n_4}} 1.$$

Пусть $d = (n_1, n_3)$. Тогда $n_1 = db$, $n_3 = da$, $(b,a) = 1$. Из условия $n_1n_4 = n_2n_3$ следует, что $n_4 = ma$ и $n_2 = mb$. Откуда получаем

$$\Sigma \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \sum_{\substack{N/d<b,a\leqslant N_1/d \\ (b,a)=1}} \sum_{d\beta<m\leqslant d\beta(1+L/H)} 1 \leqslant \frac{1}{N^2\beta} \sum_{1\leqslant d\leqslant N} \frac{N^2}{d^2}\frac{d\beta L}{H} \leqslant \frac{L^2}{H}. \tag{13}$$

Оценим сумму W. Имеем

$$W = \sum_{N<n_1,n_3\le N_2} \sum_{\substack{N\beta<n_2,n_4\le N_3\beta \\ 1\le n_2n_3-n_1n_4\le N^2\beta L/X_1}} \left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{iX} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4)E(n_1,n_2)E(n_3,n_4).$$

Если уберём множители $E(n_1,n_2), E(n_3,n_4)$ и наложим на переменные n_1, n_2, n_3, n_4 дополнительные условия

$$0<n_2-n_1\beta\le\frac{c_2N\beta L}{H}\ \text{и}\ 0<n_4-n_3\beta\le\frac{c_3N\beta L}{H},$$

то сумма W изменится на величину $O(e^{-0{,}01L^2})$. Пусть $l=n_2n_3-n_1n_4$, $1\le l\le N^2\beta L/X_1$ и $d=(n_1,n_3)$. Тогда $n_3=da$, $n_1=db$, $(b,a)=1$, $l=dl_1$, $1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)$, $an_2-bn_4=l_1$. Последнее равенство равносильно тому, что

$$n_4\equiv -l_1\bar b \pmod a \ \text{и}\ n_2=(bn_4+l_1)/a,$$

где $b\bar b\equiv 1 \pmod a$. Пользуясь формулой:

$$\frac1a\sum_{-a/2\le x<a/2}\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar b)}{a}\right)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ n_4\equiv -l_1\bar b \pmod a,\\ 0,\ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

преобразуем сумму W следующим образом:

$$W=\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{\substack{N/d<b,\,a\le N_2/d\\(b,\,a)=1}}\frac1a\times$$

$$\times\sum_{-a/2\le x<a/2}\ \sum_{\substack{0<(bn_4+l_1)/a-db\beta\le c_2N\beta L/H\\0<n_4-da\beta\le c_3N\beta L/H}}\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)^{iX}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar b)}{a}\right)\eta_1(b,a,l_1,n_4)+O(e^{-0{,}01L^2}),$$

где $\eta_1(b,a,l_1,n_4)=\eta(b,(bn_4+l_1)/a,a,n_4)$. Разобьем сумму W на две суммы: W_1 — часть этой суммы, отвечающая слагаемым с условием $x\ne 0$, W_2 — остальным слагаемым.

Оценим теперь сумму W_2. Если пропустим условие

$$0<\frac{bn_4+l_1}{a}-db\beta\le\frac{c_2N\beta L}{H},$$

то сумма W_2 изменится на величину $O(e^{-0{,}01L^2})$. Пользуясь формулой

$$\sum_{d_1/(b,a)}\mu(d_1)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ (b,a)=1,\\ 0,\ \text{если}\ (b,a)>1,\end{cases}$$

преобразуем сумму W_2 так:

$$W_2=\sum_{d\leqslant N^2\beta L/X_1}\ \sum_{1\le l_1\leqslant N^2\beta L/(X_1d)}\ \sum_{d_1\leqslant N_2/d}\frac{\mu(d_1)}{d_1}\sum_{N/(dd_1)<a_1\leqslant N_2/(dd_1)}\frac1{a_1}\times$$

$$\times\sum_{0<n_4-dd_1a_1\beta\le c_3N\beta L/H}\ \sum_{N/(dd_1)<b_1\le N_2/(dd_1)}\left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)^{iX}\times$$

$$\times\eta_1(d_1b_1,d_1a_1,l_1,n_4)+O(e^{-0{,}01L^2}).$$

Разобьем последнюю сумму на две суммы $W_{2.1}$ и $W_{2.2}$, где в $W_{2.1}$ входят слагаемые, у которых $d_1<X/X_1$, а в $W_{2.2}$– слагаемые с $d_1\ge X/X_1$.

Оценивая тривиально сумму $W_{2.2}$, получаем:

$$|W_{2.2}| \ll \frac{Y^2L^2}{H}.$$

Оценим сумму $W_{2.1}$. Применяя к сумме по b_1 преобразование Абеля, приходим к неравенству:

$$|W_{2.1}| \ll \sum_{d\le N^2\beta L/X_1} \frac{1}{d} \sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/X_1 d} \sum_{d_1\le X/X_1} \frac{1}{d_1}\times$$

$$\times \sum_{N/(dd_1)<a_1\le N_2/(dd_1)} \frac{1}{a_1} \sum_{0<n_4-dd_1a_1\beta\le c_3N\beta L/H} \frac{d}{N^2\beta}\left|W_{2.3}\right|, \tag{14}$$

где

$$W_{2.3} = \sum_{M<b_1\le M_1} \exp\left(iX\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1b_1n_4}\right)\right),$$

$M = N/(dd_1)$, и $N/(dd_1) < M_1 \le N_4/(dd_1)$ — некоторое фиксированное число. Применяя к сумме $W_{2.3}$ лемму о замене тригонометрической суммы интегралом и полагая в ней

$$a = M,\ b = M_1,\ f(x) = \frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{d_1xn_4}\right),$$

$$\left|f'(x)\right| = \left|\frac{Xl_1}{2\pi x(d_1n_4x+l_1)}\right| \ll \frac{X^2N\beta L}{X_1^3} < X^{-0,1} < 1,$$

находим

$$W_{2.3} = \left|\int_M^{M_1} e^{2\pi i f(x)}dx\right| + O(1).$$

Оценивая последний интеграл по первой производной, имеем:

$$\left|\int_M^{M_1} e^{2\pi i f(x)}dx\right| \ll \frac{N^3}{Xl_1d^2d_1}.$$

Тем самым получаем:

$$W_{2.3} \ll \frac{N^3}{Xl_1d^2d_1^2} + 1.$$

Подставляя последнюю оценку в (14), приходим к неравенству:

$$|W_{2.1}| \ll \frac{Y^2L^3}{H}.$$

Из оценок для $W_{2.1}$ и $W_{2.2}$ следует, что

$$W_2 \ll \frac{Y^2L^3}{H}. \tag{15}$$

Оценим теперь сумму W_1 сверху. Можно считать, что N не меньше, чем $X_1^{1/2-\varepsilon/2}$. Если это не так, то $1 \le l_1 \le \beta LX^{-\varepsilon} < 1$. Из условия $da\beta < n_4$ следует, что $db\beta < (bn_4+l_1)/a$. Таким образом, если пропустим условие

$$0 < \frac{bn_4+l_1}{a} - db\beta \le \frac{c_2N\beta L}{H},$$

то сумма W_1 изменится на величину $O\left(e^{-0{,}01L^2}\right)$. Кроме этого, имеет место равенство

$$\exp\left(2\pi i\left(\frac{X}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{bn_4}\right)\right)\right)=\exp\left(2\pi i\left(\frac{Xl_1}{2\pi bn_4}\right)\right)+O\left(X^{-0{,}7}\right).$$

Далее, применяя к суммам по b и n_4 преобразование Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получаем:

$$W_1\ll\frac{L^4}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\sum_{N/d<a\le N_2/d}\frac{1}{a}S+O\left(X^{-0{,}075-\varepsilon}\right),\tag{16}$$

где

$$S=\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\neq 0}}\sum_{\substack{N/d<b\le N_4/d\\ (b,a)=1\\ ad\beta<n_4\le N_5\beta}}\exp\left(\frac{iXl_1}{bn_4}\right)\exp\left(\frac{2\pi ix(n_4+l_1\bar{b})}{a}\right),$$

$N<N_4\le N_2$, $ad<N_5\le ad+c_3NL/H$.

Применим преобразование Абеля к сумме по b в S, потом освободимся от зависимости предела суммирования по b от переменного интегрирования. Получаем:

$$S=S_1+S_2,\tag{17}$$

где

$$S_1=\frac{1}{a}\sum_{-a/2\leqslant y<a/2}\int_{N/d}^{N_4/d}\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\neq 0}}\sum_{\substack{N/d<b\le N/d+a\\ (b,a)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i(xl_1\bar{b}+yb)}{a}\right)\times$$

$$\times\sum_{N/d<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\sum_{ad\beta<n_4\le N_5\beta}\frac{1}{n_4}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi un_4}\right)\right)\frac{iXl_1}{u^2}du,$$

$$S_2=\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\neq 0}}\sum_{\substack{N/d<b\le N_4/d\\ (b,a)=1\\ ad\beta<n_4\le N_5\beta}}\exp\left(\frac{2\pi ixl_1\bar{b}}{a}\right)\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4n_4}\right)\right).$$

Разобъем сумму S_1 на 3 суммы: $S_{1.1}$ отвечает таким слагаемым, у которых $x<$ $<Xl_1a/(2\pi uN_5^2\beta^2)$, $S_{1.2}$ — слагаемым, у которых $Xl_1a/(2\pi uN_5^2\beta^2)\leqslant x<Xl_1a/(2\pi ua^2d^2\beta^2)$ и $S_{1.3}$ — остальным слагаемым. Тогда из (16) и (17) следует

$$W_1\ll\frac{L^4}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\sum_{N/d<a\le N_2/d}\frac{S_{1.1}+S_{1.2}+S_{1.3}+S_2}{a},\tag{18}$$

Разобъем сумму в правой части последнего неравенства на 4 суммы W_3, W_4, W_5, W_6, соответственно суммам $S_{1.1}$, $S_{1.2}$, $S_{1.3}$, S_2.

1) Оценим W_6. Имеет место неравенство:

$$|W_6|\le\frac{L^5}{N^2\beta}\sum_{d\le N^2\beta L/X_1}\sum_{1\le l_1\le N^2\beta L/(X_1d)}\sum_{N/d<a\le N_2/d}\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<a/2\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{a^{0{,}5-\varepsilon_1}}|E|,$$

где

$$E=\sum_{ad\beta<n_4\le N_5\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4n_4}\right)\right).$$

Здесь мы воспользовались оценкой, (см. [22, с. 50]):

$$\sum_{\substack{N/d<b\leqslant N/d+a\\(b,a)=1}}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xl_1\overline{b}+yb}{a}\right)\right)<_{\varepsilon_1} a^{0,5+\varepsilon_1}\sqrt{(xl_1,a)}L, \tag{19}$$

где $0<\varepsilon_1<0,01\varepsilon$ — произвольная малая постоянная.

Если x не принадлежит $[Xl_1/(32\pi N^2\beta^2), 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2))$, то для оценки E воспользуемся леммой о замене тригонометрической суммы интегралом (см. [20, гл. 3]). Получаем:

$$E=\int_{ad\beta}^{N_5\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1d}{2\pi N_4z}\right)\right)dz+O(1).$$

Применяя к интегралу в правой части лемму об оценке интеграла по первой производной (см. [21, гл. 4]), найдём оценку

$$E\ll a/\left|x\right|.$$

Если $Xl_1/(32\pi N^2\beta^2)<x\leq 2Xl_1/(\pi N^2\beta^2)$, то для оценки E воспользуемся теоремой Ван дер Корпута (см. [20, с. 362]). Полагая $f(n_4)=xn_4/a+Xl_1d/(2\pi N_4n_4)$, $k=2$, найдём $E\ll N^2/\sqrt{Xl_1d}$.

Из полученных оценок для E следует, что

$$W_6\ll\frac{1}{H}.$$

2) Оценим W_3. Имеет место неравенство

$$W_3\ll\frac{XL^6}{N^3\beta}\sum_{d\leq N^2\beta L/X_1}d\sum_{1\leq l_1\leq N^2\beta L/(X_1d)}l_1\sum_{N/d<a\leq N_2/d}a^{-0,5+\varepsilon_1}\times$$

$$\times\sum_{\substack{-a/2\leqslant x<Xl_1a/(2\pi u_0N_5^2\beta^2)\\x\neq0}}\sqrt{(xl_1,a)}\left|\sum_{ad\beta<n_4\leq N_5\beta}\frac{1}{n_4}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0n_4}\right)\right)\right|, \tag{20}$$

где u_0 — некоторое число из промежутка $[N/d, N_4/d]$. Через Q обозначаем сумму по n_4 в правой части последнего неравенства. Применяя к Q преобразования Абеля, потом переходя от получившего равенства к неравенству, получаем:

$$Q\ll\frac{1}{N\beta}Q_1,$$

где

$$Q_1=\left|\sum_{ad\beta<n_4\leqslant N_6\beta}\exp\left(\frac{xn_4}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0n_4}\right)\right|,$$

где $ad<N_6\leqslant N_5$ — некоторое фиксированное число. Если $x<0$, то Q_1 оценивается по аналогии с оценкой E в пункте 1). Получаем оценку $Q\ll a/(N\beta\left|x\right|)$. А если $0<x<Xl_1a/(2\pi u_0N_5^2\beta^2)$, то применяя к Q_1 теорему о замене тригонометрической суммы интегралом, приходим к неравенству:

$$|Q|\leqslant\frac{1}{N\beta}\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0z}\right)\right)dz\right|+O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Оценивая последний интеграл по второй производной, получаем

$$\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right)dz\right| \ll \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}}.$$

С другой стороны, так как $0 < x < Xl_1 a/(2\pi u_0 N_5^2\beta^2)$, то по теореме об оценке интеграла по первой производной, имеем

$$\left|\int_{ad\beta}^{N_6\beta} \exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi u_0 z}\right)\right)dz\right| \ll \left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0(N_6\beta)^2}\right\|^{-1}.$$

Таким образом, справедлива оценка для Q:

$$Q \ll \frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u_0(N_6\beta)^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1 d}}\right)+\frac{1}{N\beta}.$$

Пусть $q=(xl_1,a)$, $a=mq$, $xl_1=sq$, $x=x_1q_1$, $l_1=l_2q_2$, $q_1q_2=q$. Собирая выше полученные оценки для Q, из (20) получаем

$$W_3 \ll \frac{XL^6}{N^4\beta^2}\sum_{d\leq N^2\beta L/X_1} d\sum_{q_2\leqslant N_2/d} q_2^{1+\varepsilon_1}\sum_{1\leq l_2\leq N^2\beta L/(X_1dq_2)} l_2\left(\sum_{q_1<2N/d} q_1^{\varepsilon_1}\times\right.$$

$$\times\sum_{m\asymp N/(dq_1q_2))} m^{-0,5+\varepsilon_1}\sum_{-mq_2/3\leqslant x_1<0}\frac{mq_2}{|x_1|}+\sum_{q_1\ll X/X_1} q_1^{\varepsilon_1}\sum_{m\asymp N/(dq_1q_2)} m^{-0,5+\varepsilon_1}\times$$

$$\left.\times\sum_{1\leqslant x_1\ll Xl_2q_2/(N^2\beta^2)}\min\left(\left\|\frac{x_1}{mq_2}-\frac{Xl_2q_2}{2\pi iu_1(N_7\beta)^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_2q_2d}}\right)\right)+O(H^{-1}).$$

Применяя к сумме по x_1 лемму из [23, с. 94], получаем:

$$W_3 \ll \frac{1}{H}.$$

4) Сумму W_5 оценим по аналогии с W_3:

$$W_5 \ll \frac{1}{H}.$$

5) Оценим теперь сумму W_4. Через P будем обозначать сумму по n_4 в $S_{1.3}$. Применяя к этой сумме лемму о замене тригонометрической суммы интегралом (см. [20, гл. 3]), получаем:

$$P=\int_{ad\beta}^{N_5\beta}\frac{1}{z}\exp\left(2\pi i\left(\frac{xz}{a}+\frac{Xl_1}{2\pi uz}\right)\right)dz+O\left(\frac{1}{N\beta}\right).$$

Далее, применим к последнему интегралу метод стационарной фазы (см. [20, гл. 3]). Получаем

$$P=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi ua}{Xl_1x}\right)^{1/4}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)+O(R),$$

где

$$R=\frac{1}{N\beta}+\frac{N^2}{Xl_1}+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u(ad\beta)^2}\right\|^{-1}, \frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right)+$$

$$+\frac{1}{N\beta}\min\left(\left\|\frac{x}{a}-\frac{Xl_1}{2\pi u(N_5\beta)^2}\right\|^{-1},\frac{N^2\beta^{3/2}}{\sqrt{Xl_1d}}\right).$$

Подставляя это равенство в формулу, определяющую W_4, потом переходя от получившего равенства к неравенству и пользуясь неравенством (19), получаем:

$$W_4\ll\frac{X^{3/4}L^5}{N^2\beta}\sum_{d\leq N^2\beta L/X_1}\sum_{1\leq l_1\leq N^2\beta L/(X_1d)}l_1^{3/4}\sum_{N/d<a\leq N_2/d}a^{-5/4+\varepsilon_1}\sum_{-a/2\leqslant y<a/2}\times$$

$$\times\sum_{x\asymp Xl_1/(N\beta)^2}\frac{\sqrt{(xl_1,a)}}{x^{1/4}}\left|\int_U^{U_1}\sum_{N/d<r\leqslant u}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{7/4}}du\right|+O\left(\frac{1}{H}\right),\quad(21)$$

где

$$U=max\left(\frac{N}{d},\frac{Xl_1a}{2\pi xN_5^2\beta^2}\right)\asymp\frac{N}{d},U_1=min\left(\frac{N_4}{d},\frac{Xl_1a}{2\pi xa^2d^2\beta^2}\right)\asymp\frac{N}{d}.$$

Через G будем обозначать интеграл в правой части (21). Меняем порядок интегрирования и суммирования по r в G, потом интегрируем по частям. Получаем

$$G=\sum_{N/d<r\leqslant U}e^{-2\pi iyr/a}\int_U^{U_1}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{7/4}}du-\frac{\sqrt{2\pi a}}{2\pi iU_1^{1/4}\sqrt{Xl_1x}}\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi U_1a}}\right)\times$$

$$\times\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)-\frac{\sqrt{2\pi a}}{8\pi i\sqrt{Xl_1x}}\int_U^{U_1}\sum_{U<r\leqslant u}\exp-\left(\frac{2\pi iyr}{a}\right)\exp\left(4\pi i\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ua}}\right)\frac{1}{u^{5/4}}du+$$

$$+\frac{\sqrt{2\pi a}}{2\pi i\sqrt{Xl_1x}}\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)\frac{1}{r^{1/4}}.\quad(22)$$

Через S будем обозначать сумму по r в последнем слагаемом равенства (22). Применяя к S преобразование Абеля, потом переходя к неравенству, получаем:

$$S\ll\left(\frac{d}{N}\right)^{1/4}\left|\sum_{U<r\leqslant U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)\right|,$$

где $U<U_2\leqslant U_1$ — некоторое фиксированное число. Далее, к сумме по r применим лемму о замене суммы интегралом. Получаем:

$$\sum_{U<r\leqslant U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yr}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi ra}}\right)\right)=\int_U^{U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right)dv+O(1).$$

Оценивая первый интеграл в правой части (22) по первой производной и пользуясь неравенством

$$\left|\sum_{U<r\leqslant U_1}\exp\left(-\frac{2\pi iyr}{a}\right)\right|\ll\frac{a}{|y|+1},$$

приходим к неравенству

$$G\ll\sqrt{\frac{a}{Xl_1x}}\left(\frac{d}{N}\right)^{1/4}\left(\frac{a}{|y|+1}+\left|\int_U^{U_2}\exp\left(2\pi i\left(-\frac{yv}{a}+2\sqrt{\frac{Xl_1x}{2\pi va}}\right)\right)dv\right|+1\right).$$

Оценим последний интеграл зависимости от значения y. Обозначим этот интеграл через V. Если $y = 0$, то для оценки V воспользуемся теоремой об оценке по первой производной. Получаем

$$V \ll \sqrt{\frac{N^3 a}{X l_1 x d^3}} \asymp \frac{N^3}{X l_1 d^2}.$$

Если

$$y < -\sqrt{\frac{2X l_1 x a d^3}{\pi N^3}} = M \text{ или } \frac{a}{2} > y > -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{X l_1 x a d^3}{\pi N^3}} = M_1 \text{ и } y \neq 0,$$

то оценивая интеграл V по аналогии с пунктом 1), найдем

$$V \leqslant \frac{a}{|y|}.$$

В случае когда $M \leqslant y \leqslant M_1$, применяя к V теорему об оценке интеграла по второй производной, получаем

$$V \ll \sqrt[4]{\frac{N^5 a}{X l_1 x d^5}} \asymp \frac{N^2}{\sqrt{d^3 X l_1}}.$$

Собирая полученные оценки, из (21) следует

$$W_4 \ll \frac{X^{1/4} L^5}{N^{9/4}\beta} \sum_{d \le N^2\beta L/X_1} d^{1/4} \sum_{1 \le l_1 \le N^2 \beta L/(X_1 d)} l_1^{1/4} \sum_{N/d < a \le N_2/d} a^{-3/4+\varepsilon_1} \times$$

$$\times \sum_{x \asymp X l_1/(N\beta)^2} \frac{\sqrt{(x l_1, a)}}{x^{3/4}} \left(\sum_{\substack{y \notin [M, M_1] \\ y \neq 0}} \frac{a}{|y|} + \frac{N^3}{X l_1 d^2} + \sum_{M \leqslant y \leqslant M_1} \frac{N^2}{\sqrt{X l_1 d^3}} \right) + O\left(\frac{1}{H}\right).$$

После несложных вычислений получим

$$W_4 \ll \frac{1}{H}.$$

Из (15), (18), и оценок для сумм W_j, $j = 3, 4, 5, 6$, получаем:

$$W \ll \frac{1}{H}.$$

Из (12), (13) и оценки для W следует:

$$I_1 \ll \frac{X_1 Y^2 L^3}{H}.$$

Подставляя это неравенство в (11), получаем

$$J_1 \ll \frac{X_1 Y^2 L^5}{H}. \tag{23}$$

Из (7), (10) и (23) следует утверждение леммы.

Следствие 1. *Пусть δ — произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_2 — множество таких T из интервала $[X, X + X_1]$, для которых выполняется неравенство*

$$W^2(T) \geq \frac{X_1^{1-\delta} Y^8 L^5}{H}.$$

Тогда для меры множества E_2 справедлива оценка $\mu(E_2) \ll X_1^{\delta}$.

3. Доказательство основной теоремы

В следствии 1 полагаем $\delta = 1 - 4/7\varepsilon$. Будем рассматривать те числа T из $X \le T \le X + X_1$, которые не принадлежат множеству E_2; для них выполняется оценка

$$W^2(T) < \frac{Y^8 L^5}{\sqrt{H}}. \tag{24}$$

Далее, доказательство проводится по схеме работы А. А. Карацубы [13]. Введём теперь функцию

$$\Phi(s) = \zeta(s) f(s), \quad f(s) = \sum_{\nu < Y} \delta(\nu) \nu^{1-s}.$$

Применим теорему 11 из [20, с. 324] к $\Phi(s)$ и прямоугольнику с вершинами $s = 0,5 + iT$, $s = 0,5 + i(T+H)$, $s = 3 + iT$, $s = 3 + i(T+H)$. Получаем

$$2\pi \int_{0,5}^{3} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma = 2\pi \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma =$$

$$= \int_T^{T+H} (\log|\Phi(0,5+it)| - \log|\Phi(3+it)|) +$$

$$+ \int_{0,5}^{3} (\arg \Phi(\sigma + i(T+H)) - \arg \Phi(\sigma + iT)) \, d\sigma.$$

Пользуясь теоремой 12 из [20, с. 325], оценим второй интеграл величиной $O(\log T)$. Вторая подынтегральная функция первого интеграла есть величина порядка $O(1)$. Применяя теорему 2 из [20, с. 345] к первому интегралу, получаем

$$2\pi \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) d\sigma \le \frac{H}{2} \log\left(\frac{J}{H}\right) + O(H),$$

где

$$J = \int_T^{T+H} |\zeta(0,5+it)|^2 \, |f(0,5+it)|^2 \, dt.$$

Пользуясь приближенным функциональным уравнением для $\zeta(s)$ ([21, с. 82]), получаем

$$J \le 8J_1 + O\left(HT^{-0,5} Y L^4\right),$$

где

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} \right|^2 |f(0,5+it)|^2 \, dt.$$

Вспоминая определение $f(s)$, можно переписать J_1 так:

$$J_1 = \int_T^{T+H} \left| \sum_{m \le P_1} a(m) m^{it} \right|^2 dt,$$

где числа $a(m)$ определены в (6). Имеет место цепочка соотношений

$$J_1 \le e \int_T^{T+H} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2 \right) \left| \sum_{m \le P_1} a(m) m^{it} \right|^2 dt \le eH \sum_{m_1, m_2 \le P_1} a(m_1) a(m_2) \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\left(v - iv\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right)dv =$$

$$= e\sqrt{\pi}H\sum_{m_1,m_2\le P_1} a(m_1)a(m_2)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\log\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right) \le e\sqrt{\pi}H\left(\Sigma + 2\left|W(T)\right|\right),$$

где Σ и $W(T)$ определены в леммах 1 и 2. В силу леммы 1 и оценки (24) получаем:

$$J_1 = O(H), \quad J = O(H), \quad \int_{0,5}^{1} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T)d\sigma = O(H).$$

Пусть $\sigma > 0,5$ и $\sigma_1 = 0,5 + 0,5(\sigma - 0,5) < \sigma$. Определяем

$$g(\alpha) = N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T).$$

Заметим, что $g(\alpha_2) \le g(\alpha_1)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$. Отсюда следует, что

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) \le \frac{1}{\sigma - \sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T)d\alpha \le$$

$$\le \frac{2}{\sigma - 0,5}\int_{0,5}^{1} N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T)d\alpha = O\left(\frac{H}{\sigma - 0,5}\right).$$

Далее, утверждение теоремы следует из следствия 1.

4. Заключение

В нашей работе границу $H = X^{\varepsilon}$ определяет лемма 1. Это объясняется тем, что надо «успокоить» достаточно длинный отрезок ряда Дирихле, которым определяется дзета-функция Римана. В дальнейшем интересно было бы рассмотреть задачу для существенно более коротких промежутков окрестности критической прямой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. 479 с.
2. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt. Rend. Acad. Sci. 1914, vol. 158, pp. 1012–1014.
3. Hardy G. H. & Littlewood, J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Mathematische Zeitschrift. 1921. vol. 10, pp. 283–317.
4. Littlewood J. E. On the zeros of the Riemann zeta-function // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1924 Vol. 22. pp 295–318 doi:10.1017/S0305004100014225
5. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10. pp. 1–59.
6. Levinson N. More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$ // Adv. in Math. 1974, v. 13, p. 383–436.
7. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157, с. 49–63.

8. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, №3. С. 569–584.

9. Карацуба А. А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, №6. С. 1214–1224.

10. Карацуба А. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 167, С. 167–178.

11. Карацуба А. А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2+it)$ // УМН. 1985. Т. 40, №4. С. 171–172.

12. Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40, №5. С. 23–82.

13. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985 Т. 49, вып. 2. С. 326–333.

14. Карацуба А. А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, №2. С. 372–397.

15. Карацуба А. А. Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на отрезках критической прямой, некоторых рядов Дирихле // УМН. 1992. Т. 47, №2. С. 193–194.

16. Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, №3. С. 483–514.

17. Киселева Л. В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на “почти всех” коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 479–500.

18. Киселева Л. В. О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Матем. заметки. 1989 Т. 46, вып. 4. С. 114–115.

19. До Дык Там О нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 71–89.

20. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. // М.: Физматлит, 1994. 376 с.

21. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана // М.: Мир, 1953. 406 с.

22. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР 1962. Т. 65. С. 3–212.

23. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.

REFERENCES

1. Riemann, B. 1948, “Sochineniya.” (Russian) [The works], *OGIZ*, Moskva–Leningrad. 479 p.

2. Hardy, G. H. 1914, “Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann” [On the zeros of the function $\zeta(s)$ Riemann], *Compt. Rend. Acad. Sci.,* vol. 158, pp. 1012–1014.

3. Hardy, G. H. & Littlewood, J. E. 1921. “The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line”, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, pp. 283–317.

4. Littlewood, J. E. 1924, "On the zeros of the Riemann zeta-function," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 22. pp 295-318 doi:10.1017/S0305004100014225

5. Selberg, A. 1942, "On the zeros of Riemann's zeta-function", *Skr. Norske. Vid. Akad Oslo*, vol. 10, pp. 1–59.

6. Levinson, N. 1974, "More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$", *Adv. in Math.,* vol. 13, pp. 383–436.

7. Karatsuba, A. A. 1981, "On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 157 , pp. 49–63. (Russian)

8. Karatsuba, A. A. 1984, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 48, no 3, pp. 569–584. (Russian)

9. Karatsuba, A. A. 1984, "The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 48, no 6, pp. 1214–1224. (Russian)

10. Karatsuba, A. A. 1985, "Zeros of the Riemann zeta function on the critical line", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 167 , pp. 167–178. (Russian)

11. Karatsuba, A. A. 1985, "On the real zeros of the function $\zeta(1/2 + it)$", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, no 4, pp. 171–172. (Russian)

12. Karatsuba, A. A. 1985, "The Riemann zeta function and its zeros", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 40, no 5, pp. 23–82. (Russian)

13. Karatsuba, A. A. 1986, "On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical lin", *Math. USSR-Izv.,* vol. 26, no 2, pp. 307–313.

14. Karatsuba, A. A. 1992, "On the number of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all short intervals of the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol 56, no 2, pp. 372–397. (Russian)

15. Karatsuba, A. A. 1992, "A refinement of theorems on the number of zeros lying on intervals of the critical line of certain Dirichlet series", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 47, no 2, pp. 193–194. (Russian)

16. Karatsuba, A. A. 1992 "On the zeros of a special type of function connected with Dirichlet series", *Math. USSR-Izv.,* vol. 38, no 3, pp. 471–502.

17. Kiseleva, L. V. 1988, "The number of zeros of the function $\zeta(s)$ on "almost all" short intervals of the critical line." (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 52, no. 3, pp. 479–500; translation in Math. USSR-Izv. 32 (1989), no. 3, 475–499.

18. Kiseleva, L.V. 1989 "On the zeros of the function $\zeta(s)$ in the neighborhood of the critical line." Zbl 0691.10032 *Mat. Zametki* vol. 46, no 4, pp. 114–115.(Russian)

19. Tam, D. D. 2015 "On the zeros of the Rieman zeta function, lying in almost all short intervals of the critical line." *Chebyishovski Sbornhik.* vol. 17, no 1, pp. 71–89.

20. Voronin, S. V. & Karatsuba, A. A. 1994, "Zeta-funkcia Rimana." (Russian) [The Riemann zeta-function], *Fizmatlit*, Moscow, 376 p.

21. Titchmarsh, E. K. 1953, "Teoriya dzeta-funkcii Rimana." (Russian)[Теория дзета-функции Римана], *Mir*, Moscow, 409 p.

22. Malysev, A. V. 1962, “On the representation of integers by positive quadratic forms.” (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 65, pp. 3-212.

23. Karatsuba, A. A. 1983, “Osnovui analiticheskoi teorii chisel.” (Russian) [Fundamentals of analytic number theory], *Nauka*, Moscow, 240 p.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет.
Получено 11.06.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.