ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 3.

УДК 514.76

ОБОБЩЕННЫЙ ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ ВАГНЕРА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

С. В. Галаев (г. Саратов)

Аннотация

На многообразии с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ и эндоморфизмом $N : D \to D$ вводится понятие N-продолженной связности $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. Найден эндоморфизм $N : D \to D$, при котором тензор кривизны N-продолженной связности совпадает с тензором кривизны Вагнера. Доказывается, что тензор кривизны внутренней связности равен нулю тогда и только тогда, когда на многообразии M существует атлас адаптированных карт, для которых коэффициенты внутренней связности обращаются в нуль. Строится взаимно-однозначное соответствие между множеством N-продолженных связностей и множеством N-связностей. Показано, что класс N-связностей включает в себя связность Танака-Вебстера и связность Схоутена-ван Кампена. Получено равенство, выражающее N-связность через связность Леви-Чивита. Исследуются свойства тензора кривизны N-связности, названного в работе обобщенным тензором кривизны Вагнера. Доказывается, в частности, что обращение в нуль обобщенного тензора кривизны Вагнера в случае контактного метрического пространства влечет существование постоянного допустимого векторного поля любого направления. Показано, что тождественное равенство нулю обобщенного тензора кривизны Вагнера возможно лишь в случае нулевого эндоморфизма $N : D \to D$.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N-продолженная связность, обобщенный тензор кривизны Вагнера, связность Танака–Вебстера, связность Схоутена–ван Кампена.

GENERALIZED WAGNER'S CURVATURE TENSOR OF ALMOST CONTACT METRIC SPACES

S. V. Galaev (Saratov)

Аннотация

On a manifold with an almost contact metric structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ and an endomorphism $N : D \to D$ the notion of an N-prolonged connection $\nabla^N = (\nabla, N)$, where ∇ is an interior connection, is introduced. An endomorphism $N : D \to D$ found such that the curvature tensor of the N-prolonged connection coincides with the Wagner curvature tensor. It is proven that the curvature tensor of the interior connection equals zero if and only if on the manifold M exists an atlas of adapted charts for that the coefficients of the interior connection are zero. A one-to-one correspondence between the set of N-prolonged and the set of N-connections is constructed. It is shown that the class of N-connections includes the Tanaka-Webster Schouten-van Kampen connections. An equality expressing the N-connection in the terms of the Levi-Civita connection is obtained. The properties of the curvature tensor of the N-connection are investigated; this curvature tensor is called in the paper the generalized Wagner curvature tensor. It is shown in particular that if the generalized Wagner curvature tensor in the case of a contact metric space is zero, then there exists a constant admissible vector field oriented in any direction. It is shown that the generalized Wagner curvature tensor may be zero only in the case of the zero endomorphism $N : D \to D$.

Key words: almost contact metric structure, N-prolonged connection, generalized Wagner curvature tensor, Tanaka–Webster connection, Schouten–van-Kampen connection.

1. Введение

В последние годы на гладком многообразии M с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ все чаще, наряду со связностью Леви–Чивита, используются как метрические так и не метрические связности с кручением. В настоящей работе все линейные связности $\nabla^N_{\vec{x}}$, заданные на многообразии M с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ и однозначно определяемые условиями

1) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}} g(\vec{y},\vec{z}) = 0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$;

4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$, где $S(\vec{x},\vec{y})$ — кручение связности, $N : D\to D$ — эндоморфизм распределения структуры, объединены в один класс связностей, названных N-связностями. Тензор кривизны $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ N-связности, названный в работе обобщенным тензором кривизны Вагнера, находится по формуле $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y},\vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x},\vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{x}}N)\vec{z})$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(TM)$, где $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ — тензор кривизны Схоутена [1].

N-связность может быть отождествлена с парой (∇,N), где ∇ — внутренняя связность, осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых.

Идея построения N-связностей берет начало в геометрической теории неголономной механики. С геометрической точки зрения уравнения движения неголономной динамической системы интерпретируются как уравнения геодезических внутренней связности [1] – [2], заданной на неголономном многообразии — конфигурационном пространстве механической системы. Интегрирование уравнений движения во многом зависит от удачного выбора системы координат [2]. В некоторых случаях, геометрические свойства неголономного многообразия позволяют выбрать такую специальную систему координат, в которой уравнения движения неголономной динамической системы принимают наиболее простой вид. Поиск необходимых геометрических инвариантов приводит В. В. Вагнера к построению тензора кривизны неголономного многообразия, называемого сегодня тензором кривизны Вагнера. Нами показано, что в случае контактного многообразия тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны некоторой связности в векторном расслоении (D,π,M), пространством которого является распределение D контактной структуры $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi)$. Необходимую для получения тензора кривизны Вагнера связность будем называть связностью Вагнера. Задание связности Вагнера сводится к продолжению внутренней связности до связности в векторном расслоении с помощью эндоморфизма $N : D\to D$, имеющего специальное строение.

В настоящей работе, с одной стороны, конструкция Вагнера уточняется для случая многообразия с почти контактной метрической структурой, а с другой стороны, мы обобщаем построения Вагнера, используя наперед заданный эндоморфизм $N : D\to D$. Полученная таким образом в векторном расслоении (D,π,M) связность получает название N-продолженной связности. Всякой N-продолженной связности естественным образом соответствует некоторая N-связность. Вообще говоря, N-связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ не является метрической связностью. Выбирая соответствующим образом эндоморфизм N, можно получить часто используемые в геометрии почти контактных метрических пространств N-связности: связность Танака–Вебстера, связность Схоутена–ван Кампена и другие связности [3] – [8].

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Во втором разделе на почти контактном метрическом многообразии M определяются внутренняя и N-продолженная связности и изучаются их основные свойства. В третьем разделе устанавливается соответствие между классом N-продолженных связностей и подклассом линейных связностей на многообразии с почти контактной метрической структурой. Дается описание как уже хорошо известных N-связностей — связности Танака–Вебстера [3] – [5] и связности Схоутена–ван Кампена [6], так и совсем недавно получивших свое развитие — связности Бежанку [7] и φ-связности [8].

В четвертом разделе определяется обобщенный тензор кривизны Вагнера, и изучаются его свойства. Доказывается, что обращение в нуль обобщенного тензора кривизны Вагнера влечет существование постоянного допустимого векторного поля любого направления.

2. Внутренняя и N-продолженная связности

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$, $m > 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [9], где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. Мы требуем, чтобы $\vec{\xi} \in \ker\omega$, где $\omega = d\eta$. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$ — его оснащение: $TX = D \oplus D^\perp$. В контактном случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = Span(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Будем называть D распределением почти контактной метрической структуры. В работе, в частности, рассматривается пространство (многообразие) Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [9]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Условие $\vec{\xi} \in \ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид: $t = t^{a_1...a_p}_{b_1...b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes ... \otimes dx^{b_q}$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами

$$h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x}),\ C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{x}, \vec{y}),\ g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y}),\ L\vec{x} = C\vec{x} - \psi\vec{x},\ \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM).$$

В адаптированных координатах получаем: $h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da} C_{db}$, $\psi^c_a = g^{bc}\omega_{ab}$.

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви–Чивита тензора g: $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\widetilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab},\ \widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab},\ \widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a,\ \widetilde{\Gamma}^n_{na} = \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$

где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [9] понимается отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}};$$
$$2) \nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$
$$3) \nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где

$$A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}, \tag{1}$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b. \tag{2}$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности обычным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, M). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределеоние $\widetilde{D} = \pi^{-1}_*(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где (x^{n+a}) — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В настоящей работе уточняется введенное ранее [11] понятие продолженной связности. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b}\partial_{n+a}$.

Под кручением N-продолженной связности будем понимать кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ — внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство $\nabla^N_{\vec{\xi}} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0$.

Если не оговорено противное, на протяжении всей работы под связностью ∇ будет пониматься внутренняя симметричная метрическая связность.

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = 1 - P$, названо Вагнером [1] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$. Тензор кривизны Схоутена возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных: $2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^c = R^c_{abe}v^e + 4\omega_{ba}\partial_n v^c$.

Обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Из формул (1), (2) следует, что частные производные $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(\vec{x}, \vec{y})$.

Для K-контактных [9] пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - \Gamma^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b}\partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc}x^{n+c}dx^b + N^a_b x^{n+b}dx^n)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba}N^c_d + R^c_{bad})\partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}(\partial_n\Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d)\partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c},$$

$$[\vec{u}, \partial_{n+a}] = N^c_a\partial_{n+c}.$$

Из (3), (4) получаем выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}, \tag{5}$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{x})\vec{y} = P(\vec{x}, \vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y}, \tag{6}$$

где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Как следует из (5), (6), тензор кривизны N-продолженной связности полностью определяется допустимыми тензорными полями. Если положить в адаптированных координатах

$N^a_b = \frac{1}{4m}\omega^{cd}R^a_{cdb}$, то соответствующую N-продолженную связность и ее тензор кривизны будем называть связностью Вагнера и тензором кривизны Вагнера соответственно. В более общем случае назовем тензор кривизны N-продолженной связности обобщенным тензором кривизны Вагнера. Для связности Вагнера будем использовать обозначение ∇^W. Эндоморфизм $N^a_b = \frac{1}{4m}\omega^{cd}R^a_{cdb}$ получен Вагнером [1] при построении тензора кривизны неголономного многообразия коразмерности 1.

Выбор эндоморфизма N определяется предпочитаемыми свойствами конструируемой связности.

Теорема 2. *На многообразии с контактной метрической структурой существует N-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

1. $\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y})$ (свойство метричности),

2. $\nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}] = 0$ (отсутствие кручения),

3. N — симметрический оператор, такой, что

$$g(N\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{x},\vec{y}), \tag{7}$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$ — сечения распределения D.

Доказательство. Первые два условия теоремы однозначно определяют внутреннюю метрическую связность [1]. В случае, когда $L_{\vec{\xi}}g = 0$, полагаем $N = 0$. Пусть, теперь, $L_{\vec{\xi}}g \neq 0$. Альтернируя вторую ковариантную производную, получаем: $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}$.

Предполагая, что существует N-продолженная метрическая связность, удовлетворяющая условиям теоремы, и, сравнивая полученный результат с (7), находим явное выражение для эндоморфизма N:

$$N^f_b = \frac{1}{4m}\omega^{ea}(R^f_{eab} + g_{bd}g^{cf}R^d_{eac})$$

Далее, с помощью прямого вычисления убеждаемся в справедливости равенства $\nabla_n g_{ab} = 0$ для найденного выше эндоморфизма N. Тем самым теорема доказана. □

3. N-продолженные связности и специальные связности в почти контактном метрическом пространстве

Пусть ∇^N — N-продолженная связность на многообразии с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$. Поставим в соответствие связности ∇^N линейную связность на многообразии M, обозначаемую тем же символом ∇^N и удовлетворяющую следующим условиям:

1) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z}) = 0$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;

4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, где $S(\vec{x},\vec{y})$ — кручение связности $\nabla^N_{\vec{x}}$.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда на многообразии M существует единственная связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ такая, что выполняются следующие условия:*

$$S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM), \tag{8}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z}) = 0, \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D), \tag{9}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = 0, \vec{x} \in \Gamma(TM), \tag{10}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0, \vec{x} \in \Gamma(TM), \tag{11}$$

где $N : D \to D$ распределения D.

Доказательство. Из предположения существования связности, докажем ее единственность. Получим явное выражение для коэффициентов $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ связности $\nabla^N_{\vec{x}}$ в адаптированных координатах. Условия (8), (9) определяют коэффициенты $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. Из условий (10), (11) следует справедливость следующих равенств: $\Gamma^a_{bn} = \Gamma^n_{an} = \Gamma^a_{nn} = \Gamma^n_{ab} = \Gamma^n_{nb} = \Gamma^n_{nn} = 0$. Повторно используя условие (8), получаем, что $\Gamma^b_{na} = N^b_a$. Что и доказывает единственность. Определим теперь отличные от нуля коэффициенты связности $\nabla^N_{\vec{x}}$, положив $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$, $\Gamma^b_{na} = N^b_a$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям (8)-(11). Теорема доказана. □

Теорема 3 указывает на биективное соответствие между множеством N-продолженных связностей и множеством N-связностей. Следующее утверждение позволяет построить N-связность, используя связность Леви–Чивита.

Теорема 4. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда определяемая с помощью равенства*

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\widetilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$$

связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ совпадает с N-связностью с соответствующим эндоморфизмом $N : D \to D$.

Доказательство теоремы сводится вычислению коэффициентов связности в адаптированных координатах.

Используя равенства (5), (6), получаем выражение для тензора кривизны N-связности $\nabla^N_{\vec{x}}$:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y}, \vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x}, \vec{z}) - (\nabla^N_{P\vec{x}}N)\vec{z}),$$

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$.

Назовем тензор кривизны N-связности, также как и тензор кривизны соответствующей N-продолженной связности, обобщенным тензором кривизны Вагнера. Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \to D$, получаем специальные классы N-связностей:

1. Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку [7] определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} = \widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\widetilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна K-контактности контактной метрической структуры. N-связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \to D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$.

2. Связность Танака-Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$,
2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$,
3) $\nabla^{TW}g = 0$,
4) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$,
5) $S(\vec{\xi}, \varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N-связностью для $N = C$.

3. Связность Схоутена-ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства [6]:

$$\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y} = (\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^h)^h + (\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^v)^v,$$

где $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена-ван Кампена является N-связностью для случая, когда $N = C - \varphi$.

4. Совсем недавно было введено понятие φ-связности [8]. Для K-контактных метрических пространств φ-связность совпадает со связностью Схоутена–ван Кампена.

4. Свойства кривизны N-продолженной связности

Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тем самым на многообразии M определена внутренняя симметричная метрическая связность ∇ с коэффициентами $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma^a_{bc} = 0$.*

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Как показано в [1], обращение в нуль тензора Схоутена влечет независимость коэффициентов связности Γ^a_{bc} от последней координаты: $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc} = 0$. Покажем, что на многообразии M можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах.

$$\partial_a f^{b'} = A^{b'}_a, \partial_a A^{c'}_b = \Gamma^c_{ab} A^{c'}_c. \tag{12}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям: $S^c_{ab} A^{c'}_c = 0$, $R^d_{abc} A^{d'}_d = 0$, которые выполняются тождественно. Следовательно, система (12) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы. □

Теорема 6. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $N = 0$ и существует постоянное допустимое векторное поле любого направления.*

Доказательство. Предположим, что обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю. Из равенства (5) заключаем, что $2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \vec{0}$. В качестве следствия легко проверяемого тождества $R^d_{[abc]} = 0$, получаем равенство $N^b_a(m-1) = 0$. Т.к. $m > 1$, то отсюда следует, что $N = 0$. Что, в свою очередь, влечет обращение в нуль тензора Схоутена. Оставшиеся рассуждения можно провести, опираясь на теорему 5. □

5. Заключение

N-продолженные связности естественным образом возникают в различных разделах математики и теоретической физики [13-15]. Так, например, в работе [13] с помощью N-продолженной симплектической связности определяются обобщенные классы Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных метрических пространств. Доказывается, что все характеристические классы Маслова вполне геодезических лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств равны нулю. Во многих случаях знание строения обобщенного тензора кривизны Вагнера позволяет значительно упростить проводимые исследования. При интегрировании уравнений движения системы, Вагнер, используя геометрические свойства тензора кривизны неголономного многообразия [2], подбирает такую систему координат, в которой уравнения движения принимают наиболее простой вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер, В. В. Геометрия $(n-1)$– мерного неголономного многообразия в n — мерном пространстве / В. В. Вагнер// Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173-255.

2. Вагнер, В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем / В. В. Вагнер// Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301-327.

3. Tanaka, N. On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections / N. Tanaka // Japan J. Math. 20 (1976), 131–190.

4. Tanno, S. Variational problems on contact Riemannian manifolds / S. Tanno // Trans. Amer. Math. Soc., 1989 314, № 1. P. 349–379.

5. Webster, S. M. Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface / S. M. Webster // J. Diff. Geom. 1978. № 13. P. 25–41.

6. Schouten, J. Zur Einbettungs-und Krummungstheorie nichtholonomer Gebilde / J. Schouten, E. van Kampen // Math. Ann. 1930. № 103 P. 752–783.

7. Bejancu A. Kähler contact distributions / A. Bejancu // Journal of Geometry and Physics, 2010. Vol. 60, iss. 12. P. 1958–1967.

8. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью / А. В. Букушева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. — Белгород: Изд-во НИУ "Белгу 2015. Вып.40, № 17(214). С. 20–24.

9. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий / С. В. Галаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 1. С. 16-22.

10. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. Вузов, Математика. 2013, № 4. С. 10-18.

11. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны / С. В. Галаев // Изв. Вузов, Математика. 2014. № 8. С. 42-52.

12. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ, 2015. Т. 22. № 1. С. 25-34.

13. Галаев С. В. О характеристических классах Маслова лежандровых подмногообразий почти контактных кэлеровых пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: межвуз. темат. сб. науч. тр. Калининград : Изд-во БФУ им. И. Канта, 2015. Вып. 46. С.68-75.

14. Krym V. R., Petrov N. N. The curvature tensor and the Einstein equations for a four-dimensional nonholonomic distribution. Vestnik St. Petersburgskogo Un-ta. Math. 2008. Vol. 41, № 3. P. 256-265.

15. Bejancu A., Călin, C. 4D Einstein equations in a general gauge Kaluza-Klein space. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.. 2015. Vol. 12, № 3, 1550036, 18 pp.

doi: 10.1142/S021988781550036X

REFERENCES

1. Vagner V. V. 1941, "The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space" , *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow Univ. Press, Moscow, issue 5, pp. 173–255 (Russian).

2. Vagner V. V. 1941, "Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems" , *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow Univ. Press, Moscow, issue 5, pp. 301-327 (Russian).

3. Tanaka N. 1976, "On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections" , *Japan J. Math.* № 20, pp. 131–190.

4. Tanno S. 1989, "Variational problems on contact Riemannian manifolds" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 314, № 1. pp. 349–379.

5. Webster S. M. 1978, "Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface" , *J. Diff. Geom.* № 13. pp. 25–41.

6. Schouten J. 1930, "Zur Einbettungs-und Krummungstheorie nichtholonomer" , Gebilde. Math. Ann. № 103 pp. 752–783.

7. Bejancu A. 2010, "Kähler contact distributions" , *Journal of Geometry and Physics*, vol. 60, issue 12. pp. 1958–1967.

8. Bukusheva A. V. 2015, "On geometry of the contact metric spaces with φ-connection" , *Belgorod State University. Scientific Bulletin. Mathematics. Physics.* № 17(214), issue 40, pp. 20-24 (Russian).

9. Galaev S. V. 2012, "The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds" , *Izvestiya Saratovskogo un-ta. Seriya «Matematika. Informatika. Mekhanika»*, vol. 12, issue 1, pp. 16–22 (Russian).

10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. 2013, "Connections on distributions and geodesic sprays" , , *Izvestija vuzov. Mat. (Russian Mathematics (Izvestija VUZ. Mathematika))*, № 4, pp. 10-18 (Russian).

11. Galaev S. V. 2014, "Almost contact Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature" , *Izvestiya vuzov. Mat. (Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika))*, № 8. pp. 42-52 (Russian).

12. Galaev S. V. 2015, "Almost contact metric structure determined by N-extended connection" , *Yakutian Mathematical Journal*, vol. 22, № 1, pp. 25-34 (Russian)

13. Galaev S. V. 2015, "Characteristic classes Maslov Legendre submanifolds of almost contact Kähler spaces *Differential geometry of manifolds of figures*, Izd-vo BFU im. I. Kanta, Kaliningrad, issue 46. pp. 68-75 (Russian).

14. Krym V.R., Petrov N.N. 2008, "The curvature tensor and the Einstein equations for a four-dimensional nonholonomic distribution" , *Vestnik St. Petersburgskogo Un-ta. Math.*, vol. 41, № 3, pp. 256-265.

15. Bejancu A., Călin C. 2015, "4D Einstein equations in a general gauge Kaluza-Klein space" , *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 12, № 3, 1550036, 18 pp. doi: 10.1142/S021988781550036X

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
Получено 8.02.2016 г.
Принято в печать 13.09.2016 г.