ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 2.

УДК 511.3

ОБ УНИВЕРСИТЕТЕ И УЧЕНИКАХ

В. И. Гаврилов[1] (г. Москва)

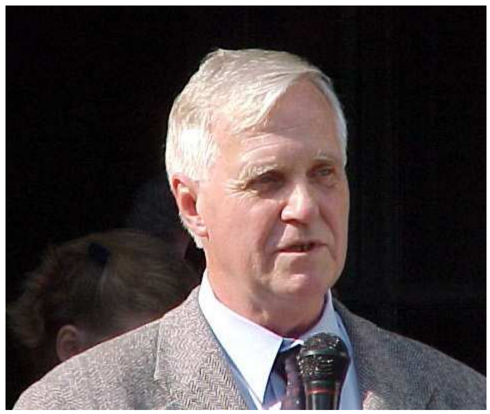

Рис. 1: Валериан Иванович Гаврилов

1. Биографическая справка

Валериан Иванович Гаврилов родился 29 января 1935 года в Москве в семье служащих. Его отец — Гаврилов Иван Дорминдонтович после окончания известной в то время Промакадемии находился на партийной работе в авиационной промышленности; мать — Чехова Лидия Михайловна работала в школе учительницей младших классов.

В 1952 году окончил в Москве среднюю школу с золотой медалью и по результатам собеседования поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, с которым оказалась связанной вся его дальнейшая жизнь. В 1957 году окончил факультет и был принят в его аспирантуру к Алексею Ивановичу Маркушевичу, в научную школу которого вошёл на третьем курсе факультета. В 1960 году окончил аспирантуру и был зачислен на кафедру математического анализа в должности ассистента. В 1962 году защитил кандидатскую диссертацию в Математическом институте АН СССР имени В. А. Стеклова (официальные оппоненты — член-корреспондент АН СССР Сергей Никитович Мергелян, профессоры Алексей Фёдорович Леонтьев, Павел Петрович Белинский). В 1963 году В. И. Гаврилов переведён на должность доцента кафедры математического анализа, в 1965 году получил аттестат доцента.

В 1968–1970 годы В. И. Гаврилов работает в Бомбейском Технологическом Институте (I.I.T., Bombay, India) в должности Visiting Professor, руководит научной работой двух преподавателей института, которые впоследствии защитили Ph.D. диссертации по предложенным им научным темам. В тот же период им опубликованы по представлению профессора P. C. Jain две заметки в журнале Notices of American Mathematical Society и две статьи в ведущих математических журналах Японии, на основании которых был принят членом American Mathematical Society; завершил членство в 1999 году.

[1]Профессор Валериан Иванович Гаврилов скончался 26 мая 2016г. на 82-ом году жизни.

С 1971 года по 1979 год В. И. Гаврилов занимал должность заместителя декана механико-математического факультета по учебной работе и с того времени входит в состав Учёного Совета факультета. В разные годы он входил в Учёные Советы факультетов педагогического образования (заместитель председателя), СУНЦ МГУ — школа имени А. Н. Колмогорова (заместитель председателя, член), факультета фундаментальной физико-химической инженерии, а также в составы Специализированных советов по защите докторских диссертаций на мехмате, факультете педагогического образования (учёный секретарь), по защите кандидатских диссертаций в МОПИ имени Н. К. Крупской; член редакции Черногорского математического журнала Mathematica Montisnigri с момента его основания в 1993 году.

В 1979 году защитил докторскую диссертацию в Тбилисском государственном университете (официальные оппоненты — член-корреспондент АН СССР, академик АН Грузинской ССР, А. В. Бицадзе, член-корреспондент АН Грузинской ССР Б. В. Хведелидзе, профессор Е. Д. Соломенцев; отзыв ведущей организации подписан членом-корреспондентом АН СССР А. Ф. Леонтьевым). Диссертация утверждена ВАК СССР в 1981 году.

За 55 лет работы в МГУ В. И. Гавриловым прочитаны обязательные курсы по математическому анализу и специальные курсы по многим разделам современного комплексного анализа на механико-математическом факультете, на многих естественных факультетах, а также в других высших учебных заведениях страны и за рубежом, материалы которых вошли в учебники, учебные пособия, монографии — V. I. Gavrilov, Ž. Pavićević. “Mathematićka Analiza I.” Podgorića Uniræx, 535 str.; В. И. Гаврилов. Математический анализ. Курс лекций, М. школа имени А. Н. Колмогорова СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова, Изд-во “Самообразование”; Часть 1, — 1999, 76 с; Часть 2, — 2000, 80 с.; В. И. Гаврилов, В. Н. Афанасьева. Начала математического анализа и элементарные функции. Учебное пособие, Якутск, Изд-во ЯГУ: Часть 1, — 2000, 108 с; Часть 2, — 2001, 80 с; В. И. Гаврилов, Ю. Н. Макаров, В. Г. Чирский. Математический анализ (Университетский учебник. Сер. “Высшая математика и её приложения к химии”), М., Издательский центр “Академия”, 2013, 330 с.; В. И. Гаврилов, А. В. Субботин, Д. А. Ефимов. Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад). М., Изд-во Московского Университета, 2013, 264 с.

Лекционная деятельность В. И. Гаврилова началась в 1965 году чтением обязательных курсов по высшей математике на вечерних отделениях химического и географического факультетов.

В 70-е годы им был прочитан ряд специальных курсов на механико-математическом факультете. Летом 1980 года кафедра математического анализа поручила ему чтение обязательного курса математического анализа — одного из самых ответственных учебных курсов на обоих отделениях мехмата продолжительностью в 4 семестра с четырьмя недельными лекционными часами и таким же количеством часов для семинарских занятий.

Чтение этого курса значительно усложнилось тем обстоятельством, что в том году в Москве проводились Олимпийские Игры, и вступительные экзамены на факультет проводились в конце августа, когда они уже завершились в вузах страны. Пришлось экзаменовать абитуриентов, не прошедших по конкурсу в других вузах. Была, конечно, традиционная для мехмата группа школьников, которые связывают свою судьбу только с факультетом. В общем же приём на факультет оказался заметно ниже по уровню школьной подготовки, чем обычно.

В сложившихся обстоятельствах возникла задача, в какой манере читать курс, чтобы его материал был понятен слушателям и одновременно наименее отклонялся бы от традиционного мехматовского уровня. Был использован такой педагогический приём: поскольку курс предстояло преподавать на отделении механики факультета, в учебных курсах которого большинством учебных примеров служат объекты гладкой структуры, В. И Гаврилов предложил прочитать вариант гладкого математического анализа, в котором основные понятия излагались на основе только открытых множеств. Параллельно в качестве спецкурса читался традиционный мехматовский вариант курса (правда, его посещаемость была очень низкой). Примененный приём позволил сохранить для дальнейшего обучения на факультете подавляющее большинство студентов курса.

Во второй половине 2000-х годов В. И. Гаврилов перешел преподавать математический анализ на открывшийся новый факультет фундаментальной физико-химической инженерии. Пришлось снова изменить методику преподавания предмета, которую в окончательном виде ему, к сожалению, завершить не удалось.

Учебная деятельность В. И. Гаврилова отмечена медалью Университета Camerino (Италия, 1985), Ломоносовской премией за педагогическую деятельность (МГУ, 1998), присуждением почётного звания Заслуженный профессор Московского университета (2002).

2. Об Университете и учениках

С середины 40-х до начала 80-х годов прошедшего века на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносов работал научно-исследовательский семинар по комплексному анализу, руководимый Алексеем Ивановичем Маркушевичем (1908-1979 гг). Как рассказывал сам А. И., семинар был задуман как продолжение работавшего в Московском Университете с начала XX века знаменитого семинара по теории функций, созданного и руководимого классиками отечественной математики Дмитрием Федоровичем Егоровым, Николаем Николаевичем Лузиным, Иваном Ивановичем Приваловым, но прекратившего свою работу в 1941 году в связи с началом Великой Отечественной Войны и кончиной в том же году последнего его руководителя — И. И. Привалова.

Тематика семинара И. И. Привалова была поистине многогранной; она охватывала многочисленные разделы теории функций действительного и комплексного переменных, теории гармонических и субгармонических функций, граничные свойства и краевые задачи, проблемы теории полианалитических функций, теории квазиконформных отображений, приложения методов функционального анализа к задачам теории функций. Научные результаты участников семинара и его руководителя опубликованы в нескольких широко известных монографиях, последняя из которых вышла под названием И. И. Привалов "Граничные свойства однозначных аналитических функций" в Издательстве Московского Университета в 1941 году — в год кончины её автора.

Я не знаю, был ли организованный А. И. Маркушевичем семинар изначально также общемосковским, каковым являлся семинар И. И. Привалова. Но уже в первые годы его работы учениками Маркушевича — Николаем Алексеевичем Давыдовым, Генрихом Целестиновичем Тумаркиным, Генрихом Ароновичем Фридманом, Семеном Яковлевичем Хавинсоном — были получены настолько значительные результаты, что возникла потребность в переиздании последней монографии И. И. Привалова, ставшей уже в то время библиографической редкостью.

Громадные экономические трудности, переживаемые нашей страной в первые послевоенные годы, естественно не позволяли возможности расширения объема нового издания, и, как сообщает во введении к нему его редактор — А. И. Маркушевич — "перед пишущим эти строки…встал вопрос о том переиздавать ли книгу в том виде, в котором она вышла в свет ещё при жизни автора, или подвергнуть её более или менее значительной переработке. Сознавая всю ответственность, которая возлагается на меня принятым решением, я встал на второй путь…Из первоначального текста в настоящем издании сохранено не более 50%…Это дало также возможность включить в книгу принадлежащие им (ученикам А. И. — В. Г.) оригинальные результаты."

Второе издание монографии И. И. Привалова под названием "Граничные свойства аналитических функций" вышло в 1950 году и было затем переведено на несколько иностранных языков. Я ещё вернусь к этим мужественным словам моего учителя.

Однако во второй половине 50-х годов, когда я — студент мехмата МГУ — стал посещать заседания руководимого А. И. Маркушевичем семинара, проходившие по понедельникам с 18 до 20 часов в аудитории 14-13 нового Главного Здания МГУ, я могу засвидетельствовать, что семинар стал общемосковским и даже, можно сказать, общесоюзным, поскольку на нём часто выступали учёные многих математических центров страны и на его основе проводились многочисленные всесоюзные конференции и симпозиумы. Привожу по памяти имена постоянных участников семинара (с извинениями о неполноте списка, которым я не располагаю, и даже не уверен, вёлся ли он регулярно): Борис Владимирович Шабат, Иван Евгеньевич Базилевич, Евгений Дмитриевич Соломенцев, Алексей Федорович Леонтьев, Борис Абрамович Фукс, Виктор Иосифович Левин, Марат Андреевич Евграфов, Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон. Сравнительно часто семинар посещали Василий Сергеевич Владимиров, Сергей Никитович Мергелян, Андрей Александрович Гончар. Постоянными участниками были аспиранты многих вузов Москвы.

Теперь мне приятно сказать несколько слов об необыкновенно заботливой, дружественной атмосфере, царившей в научной школе А. И. Маркушевича. В студенческие годы выбор направлений моих научных интересов, тем курсовых работ предлагал и обсуждал Алексей Иванович, а выполнение курсовых и моей дипломной работы курировал его ученик — Г. А. Фридман. Далее, только на факультетской комиссии по распределению я узнал, что по письменному представлению Алексея Ивановича я рекомендован в аспирантуру факультета.

В аспирантские годы на выбор моей научной тематики радикально повлиял Г. Ц. Тумаркин, обративший мое внимание на свежеопубликованную статью финских математиков О. Лехто и К. И. Виртанена (O. Lehto , K. I. Virtanen), в которой был рассмотрен новый для исследований объект — нормальные мероморфные функции. К моменту окончания аспирантуры (осень 1960 года) полученные мною результаты по новой тематике составили содержание нескольких статей, представленных по рекомендации Алексея Ивановича в журнале “Доклады Академии Наук СССР” Ректором МГУ Иваном Георгиевичем Петровским.

С декабря 1960 года, опять же по рекомендации Алексея Ивановича и по приглашению Николая Владимировича Ефимова, я занял позицию ассистента кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, на которой работаю по настоящее время.

Мои статьи вышли в “ДАН СССР” в 1961 году и теперь они общеприняты пионерскими в теории нормальных функций (наряду с работами американских математиков Ф. Багемила и В. Зейделя (F. Bagemihl, W. Seidel); первая же моя публикация состоялась в 1960 году в журнале “Доклады Академии Наук Белорусской ССР” и содержала результаты моей дипломной работы, в которой существенно уточнялся размер универсальной постоянной Э. Коллингвуда и Ж. Валирона (E. Collingwood , G. Valiron, 1926), связанной со скоростью стремления к своим асимптотическим значениям целых функций.

В те годы запрещалось проводить защиты кандидатских диссертаций по месту постоянной работы соискателя и при непосредственном содействии Ивана Георгиевича Петровского защита моей кандидатской диссертации состоялась 22 февраля 1962 года на Учёном Совете Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР с официальными оппонентами: Сергеем Никитовичем Мергеляном, Павлом Петровичем Белинским, Алексеем Фёдоровичем Леонтьевым. Кандидатский диплом подписан Иваном Матвеевичем Виноградовым.

Г. Ц. Тумаркину принадлежит инициатива поручить мне перевод на русский язык вышедшей в 1960 году монографии K. Noshiro “Cluster sets”, материал которой существенно дополнял содержание монографии И. И. Привалова. Перевод под редакцией Г. Ц. Тумаркина вышел в свет в 1963 году в издательстве ИЛ под названием К. Носиро “Предельные множества”. Эта книга, наряду с теорией нормальных функций, определила направление моей научной работы на весь последующий период моей жизни.

В 1963 году я ввел в научный оборот новое понятие P-последовательности для мероморфных функций, определенных в единичном круге на комплексной плоскости, а в 1965 году — аналогичное понятие $M^{(p)}$ - последовательностей для мероморфных функций, определенных на всей комплексной плоскости.

Вначале эти понятия использовались для изучения распределения значений мероморфных функций, для их классификации по скорости роста сферической производной (классы W_p, $p \geqslant 1$, мероморфных функций на плоскости и в единичном круге), а также установления условий окончательного характера в граничных теоремах единственности (см., например, мои статьи : 1) О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными // Матем. Сб., 1965 , т. 67, №1, с. 408–422; 2) Мероморфные в единичном круге функции с заданным ростом сферической производной // Матем. Сб., 1966 , т. 71, № 3, с. 386–404; 3) О некоторых классах мероморфных функций, характеризуемых сферической производной // Известия АН СССР, сер. матем., 1968, т. 32, № 4, с. 735–742 ; 4) Gavrilov V. I. On a uniquence theorem // Nagoya Math. J., 1969, v. 35, 151–157).

Из конкретных результатов отмечу обнаружение и изучение ранее не изучавшегося подкласса мероморфных функций в классическом классе функций, исключительных в смысле Жюлиа, и полную характеристику множества нормальных мероморфных функций в терминах P-последовательностей.

В 1968–1970 годы я занимал позицию Visiting Professor в Бомбейском технологическом институте (I.I.T., Bombay). Моя миссия, как её сформулировал декан математического факультета института профессор Джеин (P.C. Jain), состояла в том, чтобы довести до уровня Ph. D. диссертаций двух молодых сотрудников факультета — С. Кришнамурти (S. Krishnamoorthy) и Н. Шиварамакришнана (N. Sivaramakrishnan). Я определил каждому тему диссертации, ежедневно курировал их занятия, читал специальные курсы. К концу моего пребывания один из них имел научную публикацию (S. Krishnamoorthy // Math. Zeitsh. 1970, b. 114, no. 2, p. 93–100), другой готовил материал к публикации. В дальнейшем они сообщили мне, что успешно защитили свои Ph. D. диссертации.

По возвращении на факультет Алексей Иванович рекомендовал мне начать чтение специальных курсов и ведение учебно-научного семинара для студентов старших курсов. Такой семинар начал работать с осени 1971 года, и к моему удивлению в нём стали участвовать не только студенты, но и аспиранты родственных кафедр факультета, одним из которых был Курбанов Курбан Османович, занявшийся изучением свойств введенных мною классов W_p мероморфных функций.

Неожиданно для себя я обнаружил, что занятия со студентами на семинаре оказывают самое благотворное влияние на мои собственные научные занятия; в частности, я открыл для себя наличие тесной связи понятия P-последовательности с предельными множествами мероморфных функций.

Первый результат здесь состоял в том, что используя свойства P-последовательностей мне удалось в 1974 году разделить изучаемое с 1927 года граничное множество точек Абрама Иезекииловича Плеснера на три непересекающихся подмножества: для каждой точки первого подмножества каждая оканчивающаяся в ней хорда круга содержит P-последовательность мероморфной функции; в точках второго подмножества ни одна из хорд не содержит P-последовательностей и предельное множество функции по каждой хорде накрывает сферу Римана (насыщенная точка Плеснера); а третье подмножество мало в метрическом и топологическом смыслах.

Этот результат позволил существенно уточнить две классические теоремы теории граничных свойств мероморфных функций — теорему А. И. Плеснера (1927 г.) и теорему К. Мейера (K. Meier, 1961) (см. мою статью “Поведение вдоль хорд мероморфных функций в единичном круге” // Доклады АН СССР , 1974, т. 216 , № 1 , 21-23; статья представлена к публикации

Василием Сергеевичем Владимировым).

В декабре 1974 года К. О. Курбанов защитил на мехмате МГУ кандидатскую диссертацию, в которой он получил ряд глубоких критериев принадлежности классам W_p, $p > 1$, и некоторым их подклассам мероморфных функций на комплексной плоскости и в единичном круге. В диссертацию не вошел опубликованный позднее (1977 г.) наш совместный критерий (в терминах предельных множеств), когда луч на комплексной плоскости становится лучом Жюлиа для исключительных в смысле Жюлиа функций. После защиты К. О. Курбанов преподавал в Дагестанском государственном университете в Махачкале и опубликовал несколько статей, в которых развивал результаты своей диссертации. В настоящее время он работает заведующим кафедрой математики и информатики Махачкалинского филиала Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета.

С середины 70-х годов состав участников семинара стал заметно расти за счёт стажёров из научных центров союзных республик и зарубежных университетов, с которыми Московский Университет имел договоры о научном сотрудничестве. Расширился спектр научных тем, разрабатываемых на семинаре, поскольку часто стажёры приезжали со своими оригинальными замыслами и предварительными результатами.

В сентябре 1977 года на мехмате МГУ защитил кандидатскую диссертацию стажёр Ереванского университета Аркадий Николаевич Айрапетян. Чтобы охарактеризовать результаты диссертации А. Н. Айрапетяна, надо упомянуть, что в 1974 году мною (см. “Матем. Сб., 1974, т.94, № 1, 3-15”) было получено уточнение результатов М. Цудзи (M. Tsuji , 1950) и Л. Карлесона (L. Carlesson, 1950), состоящее в дополнительном утверждении о спрямляемости образов хорд в подклассах Карлесона функций ограниченного вида.

Эти результаты я предварительно докладывал на семинаре А. И. Маркушевича, Семён Яковлевич Хавинсон заметил, что значительная доля предварительных утверждений, представляющих техническую часть доказательства основного результата, никак не связана со свойством мероморфности функции, а справедливо для произвольных измеримых функций. Этому замечанию я последовал в окончательном опубликованном тексте статьи. Это простое на первый взгляд замечание оказалось очень глубоким и впоследствии использовалось не только в диссертации А. Н. Айрапетяна, но и в исследованиях, Жарко Павичевича (Žarko V. Pavićević) в связи с изучением мер Карлесона и обратных к моему результату теорем, Ново Лабудовичем (Novo Labudović), С. Л. Берберяном, В. С. Захаряном.

Я очень сожалею, что именно здесь, а не в статье, я впервые упоминаю свою оплошность. Частичным извинением может служить традиция семинара обсуждать каждый доклад по его окончании в дружелюбной профессиональной атмосфере. В диссертации А. Н. Айрапетяна этот результат распространён на более подробное, чем у Карлесона, разбиение функций ограниченного вида на подклассы, когда малость исключительных граничных множеств измеряется не шкалой нулевых α-ёмкостей (Л. Карлесон), а шкалой нулевых ёмкостей относительно последовательностей. Кроме того, он распространил на случай орициклических углов упомянутое выше моё уточнение теоремы К. Мейера. Сергей Никитович Мергелян указал весьма неожиданный для специалистов пример ограниченной в круге голоморфной функции с несуммируемой по площади производной. В совместной работе А. Н. Айрапетяна и студента мехмата МГУ Анатолия Николаевича Канатникова в 1976 году доказано, что такие функции составляют большинство в топологическом смысле в каждом классе Харди H^p, $0 < p \leqslant +\infty$, где они образуют остаточное множество типа G_δ.

В настоящее время А. Н. Айрапетян преподаёт в одном из Ереванских институтов, занимая в нём в течение нескольких десятилетий должность заведующего кафедрой высшей математики.

Новое направление в работу семинара, связанное с приложением методов функционального анализа к теории функций комплексного переменного, внёс стажёр из ГДР Жак Майер

(Jakues Mayer). Это направление стало традиционным в работе семинара, но наивысшего своего развития оно достигло во второй половине 90-х годов и первом десятилетии XXI века (об этом речь пойдёт позже). Ж. Майер полностью описал линейные изометрии банаховых пространств аналитических функций в круге, производные n-го порядка которых принадлежат пространствам Харди H^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, и изометрии пространств аналитических функций в круге, производные которых растут при приближении к границе со степенной скоростью. Существенно новым моментом в его исследовании служит идея использования для описания изометрий не всей границы Шоке банаховых пространств, а её части — множества точек пика. Эти результаты составили его кандидатскую диссертацию, защищенную на мехмате МГУ в декабре 1979 года.

По возвращении на родину Ж. Майер преподавал в Берлинском университете им. Гумбольдта; в настоящее время он преподаёт в Техническом институте Западного Берлина.

Период с 1981 года по 1983 год оказался самым плодотворным по числу защищённых диссертаций участниками семинара: в апреле 1981 года кандидатскую диссертацию защитил стажёр Ереванского университета Мельсик Мамиконович Мирзоян; в ноябре 1981 года — выпускник и аспирант мехмата Анатолий Николаевич Канатников; в ноябре 1981 года — стажёр из Колумбии Хорхе Энрике Мехия Лаверда (Jorge Enrice Mejia Laverda); в феврале 1982 года — выпускница мехмата Галина Дмитриевна Лёвшина; в октябре 1982 года — стажёр Ереванского университета Самвел Левонович Берберян; в марте 1983 года — выпускница мехмата Надежда Борисовна Малышева; в июне 1983 года — аспирант мехмата Петр Васильевич Довбуш; в декабре 1983 года защитил докторскую диссертацию в Белградском университете стажёр Университета Черногории Жарко В. Павичевич (Žarko V. Pavićević).

Чтобы охарактеризовать результаты М. М. Мирзояна, необходимо сделать предварительно следующее замечание.

Хотя понятие предельного множества возникло в комплексном анализе, но по своей природе оно является чисто топологическим. На это обстоятельство, по-видимому, впервые обратил внимание английский тополог Дж. Уэстон (J. Weston) в 1958 году. Его замечание не привлекло внимание большинства специалистов по теории предельных множеств возможно потому, что, в основном, они были специалистами по комплексному анализу.

Заслуга М.М. Мирзояна состоит в том, что он заметил, что ключевую для теории предельных множеств функций комплексного переменного теорему Э. Коллингвуда (E. F. Collingwood, 1957) о максимальности можно распространить на отображения топологических пространств, причём в окончательном виде, усиливая при этом результаты Дж. Уэстона и результат Р. Фейока (R. E. Feiock, 1974) о множестве точек отсутствия свойства непрерывности по совокупности переменных у многомерных функций, непрерывных по каждому переменному. Другая часть диссертации М. М. Мирзояна состоит в распространении упомянутых выше результатов Э. Коллингвуда (1957 г.) и В. И. Гаврилова (1974 г.), относящихся к некасательному подходу к границе, на случай касательных путей со степенным порядком подхода.

М. М. Мирзоян преподаёт в должности доцента в одном из институтов Еревана, ведя при этом активную публикацию новых результатов, связанных с тематикой диссертации.

Результаты А. Н. Канатникова по теории предельных множеств следует признать выдающимися. Во-первых, ему принадлежит полное обращение теорем К. Мейера (1961 г.) и А. М. Плеснера (1927 г.), являющихся топологическим и метрическим канонами в описании граничных особенностей мероморфных функций в круге; до этого в нашей совместной статье (1977 г.) утверждение теоремы К. Мейера приобрело окончательный вид. Во-вторых, А. Н. Канатникову принадлежит введение нового типа предельных множеств — предельные множества по последовательностям компактов (анонсировано в журнале "Доклады АН СССР, 1980, т. 253, №1, 14–17"), систематически изученное в работе, опубликованной в журнале "Известия АН СССР, сер. матем., 1984, т. 48, № 6, 1196–1213". Это понятие возникло в связи с замечательным результатом С. М. Воронина о свойстве универсальности дзета-функции Римана. К сожалению, С. М. Воронину не удалось доказать, что дзета-функция обладает этим свойством в полном виде, и вопрос остается открытым до сего времени. Однако, с другой стороны, в статье В. И. Гаврилова, А. Н. Канатникова // Доклады АН СССР, 1982, т.265, №2, 74–76, отмечено, что если ряд Дирихле, образующий дзета-функцию, сделать знакочередующим, то получающаяся при этом функция обладает свойством универсальности в полном объеме. Но, как рассказывал мне Сергей Михайлович, даже в неполном виде его теорема играет ключевую роль в некоторых современных разделах теоретической физики. Глубокие исследования А. Н. Канатникова обнаружили связи нового понятия предельного множества по последовательностям компактов, распределения значений функций (в частности, с P-последовательностями) и другими разделами. В дальнейшем это понятие изучалось, под другим названием, профессором Виктором Ивановичем Кругликовым (1997 г.) и его учеником — доцентом Антоном Павловичем Девятковым (2006–2008 гг).

В настоящее время А. Н. Канатников является признанным учёным, специалистом не только по теории предельных множеств, но и по теории управления, в которой он защитил докторскую диссертацию.

А. Н. Канатников — профессор МГТУ имени Н. Э. Баумана, автор многих научных монографий и вузовских учебников, лауреат премии Президента Российской Федерации.

Х. Э. Мехия Л. ввёл новый класс функций, названных эквиморфными функциями. Поскольку, как известно, каждое однолистное квазиконформное отображение является эквиморфизмом, то множество эквиморфных функций содержит все псевдомероморфные функции, граничное поведение которых изучается с конца 20-х годов прошедшего века, и, как показал Х. Э. Мехия Л. это вложение строгое. Его кандидатская диссертация посвящена систематическому изучению граничных свойств эквиморфных функций, включая свойства введённых им для эквиморфных функций P-последовательностей и структуру граничных особенностей. В настоящее время Х. Э. Мехия Л. является профессором Университета города Меделина (Колумбия), активно работающим в теории динамических систем.

Г. Д. Лёвшиной принадлежит дальнейшее плодотворное развитие возникшего в работе семинара направления, связанного с приложениями методов функционального анализа к задачам комплексного анализа. В её диссертации полностью описаны множества линейных изометрий и коэффициентных мультипликаторов в липшицевых пространствах аналитических функций с произвольным модулем непрерывности с указанием явного вида изометрий и мультипликаторов. Все предыдущие исследования относились к частному случаю модуля непрерывности степенного вида, причём используемые в них техники принципиально не переносились на общий случай. Поэтому результаты Г. Д. Лёвшиной получены новым, принадлежащим ей оригинальным методом. Новой даже для частного случая оказалась её теорема о совпадении множеств коэффициентных мультипликаторов в липшицевых пространствах и в пространствах с интегральным условием Липшица. Указаны приложения к исследованию суммируемости рядов Фурье непрерывных и суммируемых функций.

Во второй части диссертации впервые вводятся необходимые и достаточные условия для мероморфной функции, порождающей нормальные или абсолютно гипернормальные семейства на подгруппах группы конформных автоморфизмов единичного круга.

Исследования по названным направлениям были успешно ею продолжены после защиты диссертации. Результаты Г. Д. Лёвшиной отмечены в недавней монографии В. И. Гаврилов, А. В. Субботин, Д. А. Ефимов “Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад).” М.: Изд-во Московского Университета, 2013, стр. 161–166.

Г. Д. Лёвшина преподаёт в Москве в Институте стали и сплавов, является автором многих учебных пособий по различным разделам высшей математики, была официальным оппонентом по нескольким кандидатским диссертациям.

С. Л. Берберян предложил семинару свою тематику, состоящую в изучении граничных свойств и свойств нормальности гармонических, субгармонических, непрерывных функций. Его кандидатская диссертация состоит из двух частей.

В первой части начатые А. Н. Айрапетяном исследования подклассов функций ограниченного вида в шкале ёмкостей относительно последовательностей получили своё завершение в форме результатов окончательного характера.

Во второй части рассматривается граничное поведение субгармонических функций, систематическое изучение которых начато работами И. И. Привалова, Е. Д. Соломенцева, М. Цудзи (M. Tsuji). Основное внимание уделяется определённым в единичном круге субгармоническим функциям, удовлетворяющим условию Дж. Литтлвуда (J. E. Littlewood), когда субгармоническая функция представима в виде разности гармонической функции и потенциала Грина. Установлены условия, при которых потенциал Грина имеет конечные пределы по почти всем хордам в каждой точке единичной окружности, за возможным исключением точек множества нулевой ёмкости относительно последовательностей. Этот результат позволил распространить указанное выше заключение на субгармонические функции при выполнении дополнительных условий.

Диссертация завершается изучением граничного поведения нормальных субгармонических функций и субгармонических функций, нормальных относительно гиперболической подгруппы конформных автоморфизмов круга (т.е. функций классов N^θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$). В частности, доказано, что субгармоническая функция класса $N^* = \bigcup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} N^\theta$, удовлетворяющая условию Литтлвуда, обладает конечными угловыми пределами почти всюду на границе.

Во второй половине двухтысячных годов С. Л. Берберян защитил в Институте математики Национальной Академии Наук Армении диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук и в настоящее время работает профессором Российско-Армянского (Славянского) Университета в Ереване.

Диссертация Н. Б. Малышевой посвящена систематическому изучению предельных множеств отображений топологических пространств.

В ней впервые отмечена принципиальная роль в изучаемой проблематике универсальной топологии Андрея Николаевича Тихонова 1936 года.

Так, Н. Б. Малышевой установлено, что предельные множества произвольного отображения топологических пространств образуют многозначное отображение, непрерывное в универсальной топологии Тихонова. В диссертации установлены эквивалентные характеристики понятия предельного множества как предела некоторой обобщённой последовательности замкнутых множеств в экспоненциальной топологии и как минимального предела в смысле Владимира Ивановича Пономарева в универсальной топологии Тихонова. Доказаны теоремы о максимальности и теоремы о непрерывности отображений, порождаемых предельными множествами. Эти результаты имеют окончательный характер относительно категории и типа исключительных множеств. Изучаются качественные предельные множества и устанавливается их эквивалентность обычным предельным множествам для непрерывных отображений. Исследуется также свойство линейной связности образов некоторых классов граничных кривых при отображении, порождаемом предельными множествами комплекснозначных функций.

После окончания аспирантуры Н. Б. Малышева преподаёт на мехмате в должности доцента; она — автор и соавтор нескольких учебников и учебных пособий по высшей математике для естественных факультетов МГУ.

Научным руководителем П. В. Довбуша в годы учёбы на мехмате МГУ был Б. В. Шабат и П. В. получил солидную подготовку в области многомерного комплексного анализа. После его зачисления в аспирантуру факультета, Борис Владимирович обратился ко мне с просьбой определить для П. В. Довбуша направление научной работы и курировать её. Так в начале 1979 года появился новый участник семинара.

К этому времени были достигнуты основополагающие результаты в теории нормальных мероморфных функций одного комплексного переменного и её приложений. Поэтому выбор тематики для исследований определился сам собой — распространить теорию нормальных функций на многомерный случай.

Активно включившись в разработку поставленных задач, П. В. Довбуш уже в 1981 году опубликовал две статьи, которые и следует считать началом теории нормальных функций нескольких комплексных переменных (причём рукопись первой статьи была сдана в редакцию журнала уже в июле 1979 года). В следующем 1982 году были опубликованы ещё одна статья автора и наша совместная работа, содержавшая приложение новой теории к изучению граничных особенностей, порождаемых предельными множествами произвольных голоморфных функций нескольких комплексных переменных. В 1983 году П. В. Довбуш защитил в Московском университете кандидатскую диссертацию — первую в мире диссертацию по теории нормальных функций нескольких комплексных переменных.

Диссертация начинается обобщением на голоморфные функции нескольких комплексных переменных классического одномерного критерия Ф. Марти (F. Marty; 1931) нормальности семейства мероморфных функций. Аналогичный результат публикует американский математик Р. Тимони (R. M. Timoney), но статья последнего сдана в печать 17 октября 1979 г., в то время как статья П. В. Довбуша — 18 июля 1979 г. Обобщённый критерий Марти используется для доказательства критерия нормальности голоморфных функций в ограниченных однородных областях в $\mathbb{C}^n$. Однако в многомерном случае часто трудно установить является ли область однородной, и, более того, большинство областей не являются однородными даже среди строго псевдовыпуклых областей. Поэтому П. В. Довбуш вводит свойство нормальности функции в произвольной области из $\mathbb{C}^n$ посредством обобщения на многомерный случай одномерного понятия P-последовательности. Это позволило доказать несколько критериев нормальности голоморфных функций в однородных, строго псевдовыпуклых областях и в произвольных областях с невырожденной метрикой Бергмана. Далее изучаются некоторые вопросы асимптотического поведения нормальных функций; в частности, доказано, что нормальная в строго псевдовыпуклой области функция, имеющая некасательный асимптотический предел в граничной точке области, обладает в этой точке равным ему допустимым пределом (по Кораньи).Эта теорема содержит в себе известный результат Е. М. Чирки (1973 г.) Диссертация завершается приложениями к изучению граничных особенностей произвольных голоморфных функций и, в частности, доказательством многомерного аналога одномерной теоремы К. Мейера, содержащегося в нашей совместной публикации.

В настоящее время П. В. Довбуш является признанным специалистом в многомерной теории нормальных функций. В июне 2004 года на Специализированном Учёном Совете в Кишинёвском Университете, в который входили несколько зарубежных учёных, им была защищена диссертация на соискание учёной степени доктора хабилитат физико-математических наук, что соответствует докторской диссертации в СССР и Российской Федерации. Он работает в Институте математики Национальной академии Наук Молдовы в г. Кишинёве.

В заключение отмечу, что достаточно полный обзор достижений в многомерной теории нормальных функций содержит статья В. И. Гаврилов, П. В. Довбуш “Нормальные отображения” // Mathematica Montisnigri, 2001, v. 14, p. 5–61.

С 1980 по 1983 гг на основе Договора о научном сотрудничестве между МГУ и Черногорским Университетом в работе семинара участвовал талантливый стажёр Университета Черногории Ж. Павичевич. За указанный короткий период времени, войдя в совершенно новую для него тематику, он получил настолько значимые результаты, что они составили предмет его докторской диссертации, защищённой в Белградском Университете в конце 1983 года.

В диссертации изучаются условия метрического и топологического характера, при которых равномерная сходимость на внутренних компактах последовательностей мероморфных функций из подклассов Л. Карлесона функций ограниченного вида и последовательностей аналитических функций из аналогичных подклассов пространства Харди H^p влекут сходимость последовательностей угловых граничных значений входящих в названные последовательности функций к угловым граничным значениям предельных функций. Аналогичная задача решается в гиперболическом классе H^1_h. В третьей главе диссертации рассмотрена локализация указанных выше задач, когда граничное поведение изучается не на всей границе области определения, а на её борелевских подмножествах.

Участники семинара середины 90-х годов.

Фото 1:

Фото 2:

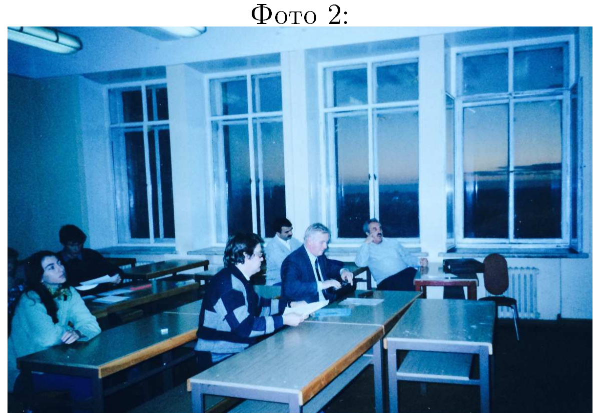

Фото 3:

Фото 4:

На фото 1 изображены: в первом ряду (справа налево) Н. Лабудович, Р. Мештрович, В. И. Гаврилов и С. В. Кравцев; во втором ряду — Ж. Павичевич (в центре ряда). На фото 2 изображены: в первом ряду (справа налево) Н. Лабудович, Ж. Павичевич, В. И. Гаврилов и С. В. Кравцев; в последнем ряду справа — А. В. Субботин. На фото 3 изображены: в первом ряду (справа налево) Н. Лабудович, В. И. Гаврилов и С. В. Кравцев; во втором ряду — Ж. Павичевич (справа). На фото 4 изображены участники семинара, включая Н. Лабудовича, Р. Мештровича и Барри Бабукара (крайний справа).

Ж. Павичевич является самым молодым из сотрудников Черногорского Университета, получавших степень доктора, звание профессора и создававших свои научные школы. Под его руководством защищены три докторские диссертации, а его ученик Ново Лабудович (Novo Labudović) защитил в 1990 году первую в истории Черногорского Университета докторскую диссертацию по математике. Все три диссертации тесно связаны с тематикой семинара, а их авторы регулярно докладывали на нём свои результаты. Сейчас профессор Н. Лабудович находится на пенсии, а два ученика Ж. Павичевича — Ромео Мештрович (Romeo Meštrović) и Ела Шушич (Jela Šušić) — работают профессорами Черногорского Университета. Профессор Ж. Павичевич — научный руководитель многих магистерских диссертаций по математике и педагогике.

В настоящее время профессор Ж. Павичевич — самый известный математик Черногории, специалист по теории нормальных семейств и нормальных функций, по теории динамических систем, теории F-пространств аналитических функций. Его результаты печатают ведущие журналы России, стран Европы, Новой Зеландии и др. Последние частично представлены в монографии R. Meštrović and Ž. Pavićević, "Privalov Spaces on the Unit Disk (research monograph)." Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Montenegro, Podgorica, 2009, ISBN 978-9940-551-00-1, 143 str.

Профессор Ж. Павичевич внёс значительный вклад в развитие Черногорского Университета и всего образования Черногории. В 1992–1994 гг он работал заместителем декана природно-математического факультета Черногорского Университета, а в 1994-1998 гг — деканом факультета. В 1993 г. Он организовал научный журнал "Mathematica Montisnigri" и является его бессменным главным редактором. Статьи журнала полностью реферируются реферативными журналами России, США, ФРГ. В 1994 году опубликован университетский учебник V. I. Gavrilov, Ž. Pavićević. "Mathematićka Analiza I." Podgorića Uniræx, 535 str., который используют также преподаватели некоторых университетов Сербии.

В двухтысячные годы профессор Ж. Павичевич был организатором и руководителем двух популярных журналов: "Mathematiųku Mosauk" и "Mathematiče-Računarske Mozaik" — для учеников начальной школы и учеников 5–8 классов основной школы. В 10-е годы XXI века он в соавторстве опубликовал два дидактических комплекта "Нова математика 1" (три книжки) и "Нова математика 2" (три книжки) для школьников первого и второго классов начальной школы.

Профессор Ж. Павичевич является многие годы Председателем Форума университетских профессоров и исследователей Черногории. Он награждён высшими наградами: "13 jul", "19 decembar", "Oktoih".

В последующие четыре года с 1984 по 1987 гг кандидатские диссертации защитили еще пять участников семинара: стажёр из Сирии Абду Аль Рахман Хасан (Abdu Al' Rahman Hassan) — в марте 1984 года; аспирант мехмата Игорь Борисович Ошкин — в апреле 1985 года; аспирант мехмата Сергей Владимирович Кравцев — в июне 1985 года; выпускник мехмата, аспирант МОПИ им. Н. К. Крупской Шамиль Анасович Махмутов — в июне 1985 года; аспирант мехмата Александр Анатольевич Симушев — в декабре 1987 года.

В диссертации А. Р. Хасана изучаются предельные множества функций одного комплексного переменного вдоль касательных граничных путей с произвольной функцией подхода к границе. В определённом смысле в ней подводится некоторый итог исследованиям структуры граничных особенностей, порождаемых предельными множествами произвольными и мероморфными в односвязных областях комплексной плоскости функциями. Случай некасательного подхода к границе является классическим; достигнутые здесь результаты изложены в монографиях И. И. Привалова (1941 г., 1950 г.), К Носиро (1960 г.; русский перевод — 1963 г.), Э Коллингвуда и А. Ловатера (1966 г.; русский перевод — 1971 г.). Изучался также случай касательного подхода степенного характера. Для произвольной функции подхода в диссертации выделяются два класса касательных граничных путей, порождаемых этой функцией, которые совпадают только для степенных функций подхода. В каждом из этих классов строится своя теория граничных особенностей и указывается тот из классов, для которого сохраняется большинство результатов относящихся к некасательному подходу к границе. Построены примеры, указывающие на окончательный характер результатов диссертации.

Начавшаяся в нашей стране "перестройка" повлияла на судьбу А. Р. Хасана: он перестал заниматься математикой, посвятив себя коммерческой деятельности в нашей стране. О его положении в настоящий момент мне ничего не известно.

В диссертации И.Б. Ошкина доказан признак нормальности семейства голоморфных функций, который составил основу нового плодотворно развиваемого направления в теории нормальных семейств аналитических функций, как это отмечено в монографии новозеландского математика Дж. Шиффа (Joel L. Schiff. Normal families. 1993. Springer–Verlag, New York, Inc. p.133, 151). Другой замечательный результат состоит в значительном уточнении нижней оценки классической константы Блока для мероморфных функций в зависимости от роста числа точек локальной неоднолистности.

Во второй части диссертации доказан неожиданный критерий нормальности мероморфных функций относительно параболических и гиперболических подгрупп конформных автоморфизмов единичного круга в терминах непрерывного продолжения в точки пространства максимальных идеалов алгебры H^∞. Установлен также критерий абсолютной гипернормальности мероморфной функции относительно произвольного семейства автоморфизмов.

В дальнейшем И. Б. Ошкин перешёл в другие области математической науки и его работы до сих пор остаются закрытыми.

Диссертация С. В. Кравцева относится относится к ещё одному оригинальному направлению в работе семинара. В ней изучаются свойства фуксовых групп и автоморфных функций и форм, порождаемых такими группами. Фуксовой группой традиционно называют разрывную подгруппу группы движений двумерного гиперболического пространства. В качестве модели такого пространства обычно используют открытый единичный круг на комплексной плоскости, в котором расстояние между точками измеряется в гиперболической метрике (модель плоскости в геометрии Н. И. Лобачевского). В этом случае фуксовыми группами служат дискретные подгруппы группы конформных автоморфизмов круга.

Одной из важных характеристик фуксовых групп в этой модели является скорость роста считающей функции их орбит, поскольку от её поведения зависят многие важные свойства как самой фуксовой группы, так и автоморфных относительно группы функций и форм. Поэтому на получение оценок роста и асимптотики считающей функции были направлены усилия многих математиков, среди которых М. Цудзи (M. Tsuji; 1959), С. Хубер (S. Huber; 1959), П. Николлс (P. J. Nicholls; 1974, 1977, 1981), С. Паттерсон (S. J. Patterson; 1957), Й Ленер (J. Lehner; 1977). С. В. Кравцеву принадлежит новая оценка, справедливая для широкого класса фуксовых групп. Эта оценка позволила ему получить новые результаты о последовательностях тейлоровских коэффициентов автоморфных функций и форм, а также уточнить некоторые теоремы вложения для функциональных пространств, образуемых такими объектами.

С. В. Кравцев исследовал также геометрические свойства фуксовых групп особого типа — групп с массивной фундаментальной областью, выделенных в исследованиях финского математика Р. Ауласкари (R. Aulaskari, 1978). С. В. Кравцев предложил рассматривать подкласс фуксовых групп с равномерно локально-конечной фундаментальной областью, который оказался шире класса Ауласкри групп с массивной фундаментальной областью, но сохраняет многие интересные свойства таких групп.

В диссертации продолжены начатые А. Беардоном и П. Никколсом (A. F. Beardon, P. J. Nicholls; 1982) исследования о строении предельных множеств фуксовых групп. В частности, в ней уточнены топологические и метрические размеры особого подмножества предельного множества — множества точек Гарнет, о котором было известно из работ А. Беардона и П. Никколса, что оно имеет линейную лебегову меру нуль. С. В. Кравцев доказал, что множество точек Гарнет обязано быть σ-пористым множеством в смысле Е. П. Долженко. Кроме того, получены новые характеристики других подмножеств предельного множества в терминах топологического строения и ёмкостей. Построены примеры фуксовых групп и автоморфных форм относительно таких групп, обладающие неординарными и интересными топологическими свойствами.

После окончания аспирантуры С. В. Кравцев преподаёт на мехмате МГУ; опубликовал около 30 статей и книг.

В диссертации Ш. А. Махмутова подробно изучаются классы W_h мероморфных функций на комплексной плоскости и в единичном круге, в которых рост регулируется посредством произвольной положительной числовой функции $h(x)$, определённой, соответственно, либо на промежутке числовой оси от нуля до $+\infty$, либо на отрезке от нуля до единицы, и бесконечно малой при $x \to +\infty$, либо при $x \to 0+$.

Начальные результаты в обоих классах, полученные, соответственно в терминах M_h- и μ_h-последовательностей и P_h- и ρ_h-последовательностей, анонсированы в статьях Gavrilov V.I.// Amer. Math. Soc. Abstracts , 1969, v.16. p. 11 и Gavrilov V. I.// Amer. Math. Soc. Abstracts , 1969, v.16. p. 568. Для степенных функций h с показателем степени $p \geqslant 1$ классы W_p, как отмечалось, изучались ранее В. И. Гавриловым (1965 г.) и К. О. Курбановым (1974 г.). В случае плоскости и $p = 1, 2$ получаем класс мероморфных функций, исключительных в смысле Жюлиа (G. Julia , 1924), и класс К. Иосиды (K. Yosida, 1934), а в случае круга и $p = 1$ — класс нормальных мероморфных функций.

В диссертации, как для плоскости, так и для круга доказаны критерии принадлежности функций классу W_h посредством условия на последовательности их a-точек, а также критерий нормальности мероморфной функции в терминах равномерного роста ее неванлинновой характеристической функции. Установлен критерий принадлежности мероморфной функции классу W_h в терминах свойства нормальности порождаемых ею определённого вида последовательностей функций. Последний критерий позволяет выделить и детально изучить в классах W_h определённые подклассы W_h^0. Впервые указаны приложения излагаемой теории к изучению мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений: предложены условия, при которых эти решения принадлежат классам W_p и W_p^0.

Интерес к классам W_h (особенно к W_p) возник у отечественных и зарубежных математиков сразу после их введения; отметим имена Г. А. Барсегяна, А. А. Гольдберга, А. Н. Канатникова, Й. Винклера (J. Winhler), Т. Дзинно (T. Zinno), С. Ямаситы (Sh. Yamashita). Классы W_p изучались с позиций нестандартного анализа (K. D. Stroyan. // Proceedings Non-Standard Anal., Amsterdam–London, 1972 , h. 47-64).

Развивая изложенную выше классификацию мероморфных функций на плоскости, японский математик Х. Иосида (H. Yoshida, 1976) предложил и изучил своё разбиение таких функций на функции первого и второго типа в смысле Гаврилова. Следует сказать, что в статьях зарубежных авторов почти постоянно использовалась иная терминология: вместо классов W_p в круге использовался термин α-нормальные функции, вместо классов W_h — термин φ-нормальные функции (R. Aulaskari, J. Rättyä // Michigan Math. J., 2011, v. 60, p. 93–111). И только немецкий математик Н. Штеинмец (N. Steinmetz // Journal d'Analyse Mathematiques , 2012 , v.117, no.1, p. 347–404) использует обозначение W_p для классов, которым, как он доказывает, принадлежат мероморфные решения дифференциальных уравнений Пенлеве.

В дальнейшем Ш. А. Махмутов преподавал в Башкирском государственном педагогическом институте (г. Уфа) и в Уфимском государственном авиационно-техническом университете. В 1993–1997 гг он проходил научную стажировку в Hokkaido University, Sapporo, Japan, где в 1997 году защитил диссертацию на соискание учёной степени Doctor of Science. В настоящее время он занимает позицию Associate Professor в Султан Кабус Университете в Омане, является признанным специалистом в области комплексного анализа, имеющим оригинальные и совместные публикации с математиками США, Финляндии, Японии и других стран, получающим приглашения для чтения лекций от многих университетов мира, участник международных математических съездов и конференций.

Диссертация А. А. Симушева содержит глубокие исследования нормальных квазимероморфных отображений в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Сначала рассматриваются квазимероморфные отображения, определенные в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, для которых свойство нормальности ещё в предыдущих работах финского математика М. Вуоринена (M. Vuorinen, 1980) определяется через группу автоморфизмов шара. А. А. Симушев доказывает здесь три критерия выполнения свойства нормальности, аналогичные известным критериям для мероморфных функций комплексного переменного.

Первый — аналог критерия О. Лехто и К.И. Виртанена (O. Lehto, K. I. Virtanen, 1957); второй — аналог критерия А. Ловатера и Кр. Поммеренке (A. J. Lohwater, Ch. Pommerenke, 1973); третий — аналог критерия в терминах P-последовательностей (В. И. Гаврилов, 1963); при этом понятие P-последовательности для пространственных квазимероморфных отображений вводится в диссертации.

Далее рассматриваются квазимероморфные отображения, определённые в произвольных ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, группы автоморфизмов которых тривиальные. Свойство нормальности для квазимероморфных отображений таких областей вводится посредством использования в качестве определения третьего из указанных выше критериев нормальности, что позволяет распространить на этот случай и второй критерий нормальности.

Отмечу также изящный локальный критерий нормальности семейства K — квазимероморфных отображений в точке произвольной области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, существенно усиливающий результат американской ученой Р. Минёвиц (R. Miniowitz, 1982).

Во второй главе диссертации изучаются асимптотические свойства нормальных квазимероморфных отображений. Сначала рассматривается случай нормальных отображений, определённых в единичном шаре, и доказывается теорема типа теорем Линделёфа (E. Lindelöf, 1915), когда существование предела отображения по сравнительно “тощему” множеству точек, накапливающихся к точке единичной сферы, влечёт существование равного ему предела по конусам с вершинами в граничной точке. Затем рассматриваются нормальные квазимероморфные отображения, определённые в произвольных ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Чтобы распространить на этот случай теорему, доказанную для шара, автор вводит новые понятия криволинейного угла и ёмкостной плотности множества относительно криволинейного угла, переходящие в случае шара в известные понятия конуса и нижней ёмкостной плотности множества. Получаемое при этом утверждение содержит и усиливает все известные до этого родственные результаты. Следует отметить, что в доказательствах обоих процитированных утверждений существенно использованы результаты монографии Анатолия Викторовича Сычёва “Модули и пространственные квазиконформные отображения.” — Новосибирск, Наука, 1983, 152 с.

В третьей главе диссертации доказаны две теоремы единственности для пространственных квазимероморфных отображений, усиливающих соответствующий результат признанных в этой теории финских математиков О. Мартио и С. Рикмана (O. Martio, S. Rickman, 1972) по двум направлениям: 1) расширяется класс допустимых отображений; 2) устраняется условие существования радиальных пределов отображений.

К большому сожалению, А. А. Симушев опубликовал в открытой печати только аннотации своих результатов без доказательств. Возможно по этой причине многие его результаты в дальнейшем передоказывались зарубежными математиками без ссылок на начальный источник. Положение, на мой взгляд, может исправить публичное издание диссертации А. А. Симушева.

В настоящее время А. А. Симушев преподаёт в Московском Энергетическом институте, является автором многих учебных пособий по вузовской тематике.

В трудные годы конца 80-х и в 90-е семинар стал резко сокращаться. Из науки уходили многие способные молодые люди, имеющие даже публикации, как Е. Ф. Буркова, Л. М. Ганжула, стажёр из Вьетнама Во Ким Ань (последний, возможно, защитил диссертацию на родине). Продолжили участие в работе семинара и защитили кандидатские диссертации: стажёр из Армении Оганесян Жора Сарибекович — в октябре 1990 года; стажёр из Бенина Айите Альфонс (A. Ayite, Benin) — в марте 1992 года; болгарский студент и аспирант мехмата Станев Мартин Атанасов (M. A. Stanev; Bulgaria) -в мае 1993 года; стажёр из Сенегала Барри Бубакар (B. Barry, Senegal) — в апреле 1997 года.

И, как дар небес, в самые трудные годы середины 90-х в семинаре стал работать один из самых талантливых за всё время существования семинара участник — студент третьего курса мехмата Алексей Владимирович Субботин, защитивший кандидатскую диссертацию в декабре 1999 года накануне своего двадцатипятилетия, и оставленный для работы на факультете.

В диссертации Ж. С. Оганесяна продолжено начатое в диссертации А. Р. Хасана изучение предельных множеств функций вдоль касательных граничных путей с произвольной функцией подхода к границе. Первая её глава содержит результаты о структуре граничных особенностей, аналогичные соответствующим результатам из диссертации А. Р. Хасана, но полученные для произвольных множественнозначных функций и для функций подхода h из более широких классов квазивыпуклых и слабо квазивыпуклых функций. Для оценки исключительных множеств на границе автор вводит новое понятие σh-пористости множества. Во второй главе диссертации изучаются предельные множества и граничные особенности эквиморфных функций. Здесь результаты диссертации Х.Э. Мехия, установленные для эквиморфных функций по некасательным граничным путям, распространяются на случай касательных путей с произвольной выпуклой функцией подхода к границе. На этот случай распространены также результаты статьи Abdu Al'Rahman Hassan, V.I. Gavrilov, “The set of Lindelöf points for meromorphic functions” // Математички Весник, 1988, книга 40, свесна 3–4, 181–184.

В настоящее время Ж. С. Оганесян преподаёт в одном из Ереванских вузов.

В диссертации А. Айите изучаются мероморфные и голоморфные функции, образующие нормальные семейства относительно произвольной подгруппы G группы T конформных автоморфизмов единичного круга на комплексной плоскости: обозначим множества таких функций символами N_G и B_G соответственно. Полученные результаты обобщают исследования многих авторов, относящиеся к случаям, когда G — гиперболическая или параболическая подгруппа. В первой главе диссертации доказаны три критерия принадлежности мероморфной функции множеству N_G в терминах роста сферической производной, существования P-последовательностей и интегральный критерий, являющийся новым даже в случае, когда $G = T$ (т. е., для нормальных мероморфных функций); аналогичный интегральный критерий доказан для некоторого естественного подмножества N_G^0 в N_G. Установлены также критерий принадлежности голоморфной функции классу B_G в терминах роста её производной и интегральный признак, ранее не отмечавшийся даже в случае $G = T$ (т. е., для функций Блока); аналогичный интегральный критерий доказан для некоторого естественного подмножества B_G^0 в B_G.

Во второй главе диссертации изучаются функциональные свойства во множестве B_G и подмножестве B_G^0. На B_G вводится инвариантная норма, относительно которой, как доказывает автор, B_G образует полное нормированное, т. е., банахово пространство, а B_G^0 является замкнутым сепарабельным подпространством в B_G, совпадающим с замыканием полиномов в топологии, порожденной нормой в B_G. Доказывается также критерий принадлежности голоморфной функции подпространству B_G^0, переходящий в случае $G = T$ в критерий Дж. Андерсона, Дж. Клуни, Кр. Поммеренке (J. M. Anderson, J. Clunie, Ch. Pommerenke, 1974).

В настоящее время А. Айите преподаёт в одном из университетов Монреаля в Канаде.

В диссертации М. А. Станева продолжено дальнейшее развитие направления, связанного с приложением методов функционального анализа к задачам комплексного анализа. Развивая методику диссертации Ж. Майера, автор получает полное описание изометрических изоморфизмов равномерных пространств (т. е., замкнутых подпространств нормированного пространства непрерывных комплекснозначных функций) над хаусдорфовыми компактами посредством изучения, как и у Майера, некоторой части границы Шоке единичного шара в сопряжённых пространствах (а именно, множества точек пика). Затем доказываются глубокие теоремы, характеризующие изометрические изоморфизмы весовых банаховых пространств голоморфных функций медленного роста в шаре из $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$.

В конце 90-х годов М. А. Станев преподавал в Софийском Университете, Болгария; сейчас его положение мне не известно.

Диссертация Барри Б., состоящая из двух частей, содержит дальнейшее развитие введённого А. Н. Канатниковым понятия предельного множества мероморфной функции по последовательностям компактов. В работах А. Н. Канатникова это понятие используется в случае некасательного подхода к границе.

В первой части диссертации рассматривается введённая ранее в диссертации А. Р. Хасана геометрия касательных граничных кривых в единичном круге, определяемая посредством произвольной функции подхода, и в этой геометрии доказываются теоремы о максимальности для предельных множеств по последовательностям компактов (для S-множеств в терминологии диссертации). Установлена характеристика граничного множества максимальной неопределённости в терминах S-множеств и проведено сравнение граничных множеств относительно их S-множеств и полных предельных множеств.

Во второй части диссертации понятие предельного множества по последовательностям компактов распространяется на множественнозначные отображения в топологические пространства и в отмеченной выше геометрии касательных граничных путей доказываются теоремы о максимальности, симметричной максимальности для произвольных множественнозначных отображений в топологические пространства в терминах нового общего понятия предельного множества. Эти теоремы обобщают на случай касательных путей результаты статьи Gavrilov V. I., Kanatnikov A. N., Pighetti Ć, “Ensembles d’accumulation generalice’s” // Comp. Rendu, Paris, Ser.1, 1981, v.292, №7, p. 293–296.

Во время своей стажировки на мехмате МГУ Барри Б. работал в Посольстве Сенегала в Москве и в 1999 году защитил в Институте Африки РАН кандидатскую диссертацию на соискание учёной степени кандидата исторических наук. Его положение в настоящее время мне не известно.

Прежде, чем излагать научные результаты А. В. Субботина, я обязан вернуться к началу этих заметок к словам А. И. Маркушевича из предисловия ко второму изданию монографии И. И. Привалова о том, что “из первоначального текста (в издание — В. Г.) вошло не более 50%”. Теперь можно считать историческим казусом, что Алексей Иванович, считающийся первым отечественным математиком, применившим в своих исследованиях по комплексному анализу методы функционального анализа, не включил во второе издание объекты (частично рассмотренные самим И. И. Приваловым, ставшие недоступными для зарубежных и потерявших интерес для отечественных математиков), которые наиболее восприимчивы к функциональным методам. Таковыми оказались введённые и изученные И. И. Приваловым подклассы функций ограниченного вида; они заново передоказывались в 70-е годы зарубежными учёными (разумеется без указания приоритета И. И. Привалова). Одной из основных заслуг А. В. Субботина следует считать восполнение этого пробела.

В первой главе диссертации рассматриваются известные факты относительно одномерных классов Привалова, а предметом изучения предлагаются многомерные классы Привалова. Доказаны свойства голоморфной функции, эквивалентные принадлежности классу Привалова, с помощью техники, развитой У. Рудиным в монографиях (W. Rudin, 1960 и 1980) по поликругу и единичному шару в $\mathbb{C}^n$. Эти методы распространяются также на общие классы голоморфных функций, определяемые посредством произвольной неубывающей выпуклой функции $\varphi(t)$ вместо функции $\varphi(t) = t^q$, $q > 1$, соответствующей классу Привалова N^q. Устанавливается также, что теорема Ф. и М. Риссов (F. and M. Riesz, 1923) переносится с классов Харди на многомерные классы Привалова.

Вторая глава имеет дело с топологическими свойствами классов Привалова в топологии, определяемой естественными метриками этих классов. Показывается, что классы Привалова образуют сепарабельные F-пространства относительно этих метрик и обычных линейных операций над функциями и, более того, также F-алгебры относительно поточечного умножения функций. Полностью охарактеризованы ограниченные и вполне ограниченные подмножества классов Привалова, как линейно-топологических пространств.

В третьей главе рассматривается метрическая структура классов Привалова N^q и ассоциированных с ними максимальных классов Привалова M^q (совпадающих с обычными классами Привалова как множества и как топологические пространства). Полностью охарактеризованы множества инъективных и группы сюръективных линейных изометрий пространств Привалова и показано, что множества инъективных линейных изометрий пространства Привалова и множества инъективных линейных изометрий максимальных пространств Привалова различны, так что метрические структуры этих пространств — разные. Применением метода описания линейных изометрий пространств Привалова в полную силу получен общий вид сюръективных линейных изометрий максимальных пространств Привалова, правда только для натуральных показателей q, что является вторым основным результатом третьей главы.

Все результаты диссертации А. В. Субботина вошли в монографию В. И. Гаврилова, А. В. Субботина, Д. А. Ефимова "Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад)." М.: Изд-во Моск. Унив., 2013, 262 стр. Другие функциональные свойства F-алгебр Привалова содержит монография R. Meštrović and Ž. Pavićević, "Privalov Spaces on the Unit Disk (research monograph)." Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Montenegro, Podgorica, 2009, ISBN 978-9940-551-00-1, 143 str. По инициативе авторов монографий в современной мировой математической литературе установилось название "пространства и F-алгебры Привалова".

Ещё до окончания аспирантуры А. В. Субботин был зачислен на факультет, на котором преподавал до конца двухтысячных. За это время он опубликовал более 20 статей, из которых выделю статью: Гаврилов В. И., Субботин А. В. // Mathematica Montisnigri, v. XIL, p. 17–31, в которой введены и изучены новые F-алгебры голоморфных функций нескольких комплексных переменных, содержащие многомерное пространство Неванлинны–Островского (не образующее F-алгебру), и статьи методического характера, опубликованные в журнале "Математика в высшем образовании" (2003, 2004, 2007, 2008 гг).

В настоящее время А. В. Субботин работает в НТЦ ОАО РКК "Энергия" С. П. Королёва.

В двухтысячные годы число постоянных участников семинара продолжало редеть. За весь период были защищены только две кандидатские диссертации: студентом и аспирантом факультета Дмитрием Александровичем Ефимовым — в ноябре 2007 года и аспирантом факультета Максимом Александровичем Дорофеевым — в марте 2009 года.

Диссертация Д. А. Ефимова добавила новый аспект в сложившееся на семинаре направление приложений функционального анализа к задачам комплексного анализа. В ней рассмотрены структурные и линейно-метрические свойства F-алгебр голоморфных функций в полуплоскости; в этом случае возникает принципиально иная методика исследования.

Интерес к изучению пространств голоморфных функций в областях с границей бесконечной меры впервые возник в начале 30-х годов прошедшего века в связи с исследованиями Р. Пэли и Н. Винера (R. Paley, N. Wiener, 1934) свойств преобразования Фурье. В работах Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина (E. Hille, J. D. Tamarkin, 1933, 1935) рассмотрены классы $H^p(D)$, $p > 1$, голоморфных в верхней комплексной полуплоскости D функций, аналогичные пространствам Харди H^p в случае круга. Немногими годами позже советский математик В. И. Крылов (1939 г.) провёл системное исследование более широких, чем $H^p(D)$, классов голоморфных функций в полуплоскости (в частности, введённого им аналога класса Неванлинны в круге).

Дальнейший интерес к данной тематике возник в самом конце XX века, когда японские математики Н. Мачизуки (N. Machizuki, 1991) и Я. Иида (Y. Iida, 2000) продолжили исследования В. И. Крылова. В то же время Л.М. Ганжула (2000 г.) рассмотрела новый вид максимальных классов (а именно, пространство $M(D)$) и доказала, что $M(D)$ образует F-алгебру относительно определённой в $M(D)$ естественной инвариантной метрики.

В диссертации изучаются общие классы $M^q(D)$, $q > 0$, голоморфных в D функций и отмечается, что каждый $M^q(D)$, $q > 0$, содержит классы Харди $H^p(D)$ для всех $0 < p \leqslant q$. Аналоги классов $M^q(D)$, $q > 0$, в круге и шаре рассмотрены В. И. Гавриловым и А. В. Субботиным (2000 г). Параллельно изучаются классы $N^q(D)$, $q > 0$, голоморфных в D функций, служащие аналогами классов И.И. Привалова для круга. В диссертации установлены связи изучаемых классов с известными классами в полуплоскости, в частности, доказано, что $M^q(D)$ и $N^q(D)$ совпадают как множества в случае $q > 1$. Исследовано граничное поведение и получены оценки роста для функций классов $M^q(D)$ и $N^q(D)$, $q > 0$. Предложено новое факторизационное представление функций из $M^q(D)$, $q > 0$, с помощью произведения Бляшке, построенного по нулям этих функций. Доказано, что классы $M^q(D)$ и $N^q(D)$, $q > 0$, образуют F-алгебры относительно естественных метрик. Установлены критерии свойств ограниченности и полной ограниченности подмножеств в пространствах $M^q(D)$, $q > 0$. Указан общий вид линейных изометрий в $N^q(D)$, $q > 0$.

Результаты Д. А. Ефимова вошли в цитируемую выше монографию (2013 г.) трех авторов.

По окончании аспирантуры Д. А. Ефимов был оставлен на мехмате в качестве преподавателя, но в начале 10-х годов нашего века он покинул МГУ и преподает в Американском Университете Шарджи (American University of Sharjah, UAE). Изменились и его научные интересы: теперь они связаны с приложением математических методов к задачам машинного обучения и исследования данных, где Д. А. Ефимов приобрёл надёжный авторитет. Он — обладатель нескольких престижных грантов, победитель международных соревнований по машинному обучению, участник и член организационных комитетов международных конгрессов и конференций, рецензент зарубежных журналов.

В диссертации М. А. Дорофеева изучается структура множества особых точек произвольного отображения из полупространства $\mathbb{R}^n_+ : x_n > 0$, $n \geqslant 3$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, в регулярное локально компактное пространство со счетной базой, характеризуемого предельными множествами отображения по областям, подходящим к границе $\mathbb{R}^n_+$ касательным образом. Сначала, в важном частном случае трехмерного пространства, такие области образуются посредством касающихся плоскости Ox_1x_2 эллипсов вращения, оси вращения которых параллельны оси Ox_3. Затем для $\mathbb{R}^n_+$, $n \geqslant 3$, рассмотрен глубокий общий случай касания с произвольной функцией подхода. Доказывается, что в обоих случаях множество особых точек являются совершенными σ-пористыми множествами в смысле С. В. Колесникова, и что совокупности таких множеств одинаковы для произвольных отображений и для ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^n_+$. Последнее обстоятельство указывает на определённую завершённость проделанных исследований.

В качестве приложения проведённых исследований устанавливается, что множество точек Гарнет произвольной фуксовой группы, действующей в $\mathbb{R}^n_+$, является совершенным σ-пористым множеством на $\partial\mathbb{R}^n_+$, что представляет собой новый результат в случае $n \geqslant 3$, а в случае $n = 2$ уточняет соответствующий результат С. В. Кравцева (1984 г).

Результаты М. А. Дорофеева высоко оценил Сергей Михайлович Никольский, представивший их для публикации в журнале “Доклады РАН”.

Ближе к середине 10-х годов семинар стал собираться всё реже и реже, в основном, когда в МГУ приезжали отечественные или зарубежные гости. Одними из последних, кто выступил на семинаре с серией лекций, были H. Yoshida и Ж. Павичевич. Много ли времени дано работать семинару? Я вспоминаю всех его участников с любовью и благодарностью, желая каждому жизненного и творческого долголетия, жизненных и творческих успехов.

Благодарю Д. А. Ефимова и С. В. Кравцева за создание электронной версии текста.

Май 2015.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Получено 21.12.2015 г.
Принято в печать 10.06.2016 г.