

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 2

УДК 517.9

О РЕШЕНИИ БИЛИНЕЙНОГО
МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ¹

С. М. Чуйко (г. Славянск, Украина)

Аннотация

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра широко используются в теории устойчивости движения, теории управления, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли, при решении уравнений в частных производных, а также в задачах восстановления изображений. Если структура общего решения однородной части уравнения Ляпунова хорошо изучены, то решение неоднородного уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова достаточно громоздко. Наиболее распространенным требованием при решении матричных уравнений Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова, является условие единственности решения.

Ранее, в статье А. А. Бойчука и С. А. Кривошеи с использованием теории обобщенных обратных операторов, установлен критерий разрешимости матричных уравнений $AX - XB = D$ и $X - AXB = D$ типа Ляпунова и исследована структура семейства их решений. В статье А. А. Бойчука и С. А. Кривошеи использовано псевдообращение линейного матричного оператора $\mathcal{L}$, соответствующего однородной части уравнений $AX - XB = D$ и $X - AXB = D$ типа Ляпунова.

Используя технику псевдообратных (по Муру–Пенроузу) матриц и проекторов, в статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного билинейного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра, в общем случае, когда линейный матричный оператор $\mathcal{L}$, соответствующий однородной части билинейного матричного уравнения не имеет обратного. Найдено выражение для семейства линейно независимых решений неоднородного билинейного матричного уравнения и, в частности, уравнения Сильвестра с использованием проекторов и псевдообратных (по Муру–Пенроузу) матриц. Этот результат является обобщением соответствующих результатов, полученных в статье А. А. Бойчука и С. А. Кривошеи, на случай билинейного матричного уравнения.

Предложенные условия разрешимости, а также схема построения частного решения неоднородного билинейного матричного уравнения подробно проиллюстрированы на примерах.

Ключевые слова: матричное уравнение Сильвестра, матричное уравнение Ляпунова, псевдообратные матрицы.

Библиография: 17 названий.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

ON THE SOLUTION OF THE BIILINEAR MATRIX EQUATION

S. M. Chuiko (Slov'yansk, Ukrain)

Abstract

Lyapunov matrix equations and their generalizations — linear matrix Sylvester equation widely used in the theory of stability of motion, control theory, as well as the solution of differential Riccati and Bernoulli equations, partial differential equations and signal processing. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation is quite cumbersome. By using the theory of generalized inverse operators, A. A. Boichuk and S. A. Krivosheya establish a criterion of the solvability of the Lyapunov-type matrix equations $AX - XB = D$ and $X - AXB = D$ and investigate the structure of the set of their solutions. The article A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya based on pseudo-inverse linear matrix operator $\mathcal{L}$, corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov type equation.

Using the technique of Moore–Penrose pseudo inverse matrices, we suggest an algorithm for finding a family of linearly independent solutions of the bilinear matrix equation and, in particular, the Sylvester matrix equation in general case when the linear matrix operator $\mathcal{L}$, corresponding to the homogeneous part of the bilinear matrix equation, has no inverse. We find an expression for family of linearly independent solutions of the bilinear matrix equation and, in particular, the Sylvester matrix equation in terms of projectors and Moore–Penrose pseudo inverse matrices. This result is a generalization of the result article A. A. Boichuk and S. A. Krivosheya to the case of bilinear matrix equation.

The suggested the solvability conditions and formula for constructing a particular solution of the inhomogeneous bilinear matrix equation is illustrated by an examples.

Keywords: matrix Sylvester equation, matrix Lyapunov equation, pseudo inverse matrices.

Bibliography: 17 titles.

MSC: 15A24, 34B15, 34C25

1. Введение

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1, 2, 3, 4, 5] широко используются в теории устойчивости движения [3, с. 245], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли. В статьях [6, 7] предложены условия разрешимости, а также схема построения решения матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра; кроме того, в статье [8] исследовано обобщенное уравнение Сильвестра, содержащее неизвестные матрицы различных размерностей. В данной статье предложены условия разрешимости, а также схема построения решения общего билинейного матричного уравнения, содержащего неизвестные матрицы различных размерностей.

2. Условия разрешимости

Линейный по $X \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и $Y \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ матричный функционал

$$\mathcal{L}(X, Y) : \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \times \mathbb{R}^{\gamma \times \delta} \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}$$

будем называть билинейным, если для любых действительных чисел $\zeta, \xi \in \mathbb{R}^1$ и любых матриц $X, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, а также $Y, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ имеют место равенства

$$\mathcal{L}(\zeta X_1 + \xi X_2, Y) = \zeta \mathcal{L}(X_1, Y) + \xi \mathcal{L}(X_2, Y),$$

$$\mathcal{L}(X, \zeta Y_1 + \xi Y_2) = \zeta \mathcal{L}(X, Y_1) + \xi \mathcal{L}(X, Y_2).$$

Исследуем задачу о построении решений $X \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и $Y \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ билинейного матричного уравнения

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{A}. \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{L}(X, Y)$ — билинейный ограниченный матричный функционал, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}$ — заданная матрица. Обозначим

$$\left\{ \Theta_j \right\}_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad \left\{ \Xi_j \right\}_{j=1}^{\gamma \cdot \delta} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$$

естественные [11] базисы пространств $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и $\mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$. Общее решение уравнения (1) ищем в виде сумм

$$X = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Theta_j x_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{\gamma \cdot \delta} \Xi_j y_j, \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}^1.$$

Последнее выражение приводит уравнение (1) к виду

$$\sum_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} \mathcal{L}(\Theta_i, 0) x_i + \sum_{j=1}^{\gamma \cdot \delta} \mathcal{L}(0; \Xi_j) y_j = \mathcal{A}.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы A , а также обратный оператор [8]

$$\mathcal{M}^{-1} \left[\mathcal{B} \right] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Обозначим матрицы

$$Q_\Theta := \left\{ \mathcal{M} \mathcal{L}(\Theta_i, 0) \right\}_{i=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\lambda \mu \times \alpha \beta}, \quad Q_\Xi := \left\{ \mathcal{M} \mathcal{L}(0; \Xi_j) \right\}_{j=1}^{\gamma \cdot \delta} \in \mathbb{R}^{\lambda \mu \times \gamma \delta}$$

и

$$Q := \begin{bmatrix} Q_\Theta; Q_\Xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\lambda \mu \times (\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta)}, \quad c := \text{col}(x, y) \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta}.$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно следующему

$$Q c = \mathcal{M}[\mathcal{A}]. \quad (2)$$

Здесь Q^+ — псевдообратная по Муру–Пенроузу матрица [1],

$$P_Q : \mathbb{R}^{(\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta) \times (\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta)} \rightarrow \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*} : \mathbb{R}^{\lambda \mu \times \lambda \mu} \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$$

— ортопроекторы, соответственно, матриц Q и Q^* . Обозначим также матрицу P_{Q_r} , составленную из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_Q . Условия существования и вид решения билинейного матричного уравнения (1) определяет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Билинейное матричное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$P_{Q^*} \mathcal{M}[\mathcal{A}] = 0. \quad (3)$$

При условии (3) и только при нем, уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений

$$X(c_r) = \Phi(c_r) + \Lambda(\mathcal{A}), \quad \Phi(c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} I_{\alpha \cdot \beta} & O \end{bmatrix} P_{Q_r} c_r \right\}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

$$Y(c_r) = \Psi(c_r) + \Pi(\mathcal{A}), \quad \Psi(c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} O & I_{\gamma \cdot \delta} \end{bmatrix} P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right\},$$

где

$$\Lambda(\mathcal{A}) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} I_{\alpha \cdot \beta} & O \end{bmatrix} \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\}, \quad \Pi(\mathcal{A}) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} O & I_{\gamma \cdot \delta} \end{bmatrix} \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, выше показана равносильность билинейного матричного уравнения (1) и традиционного линейного алгебраического уравнения (2), как известно [6, 7], разрешимого тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии (3) и только при нем уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений

$$X = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Theta_j x_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{\gamma \cdot \delta} \Xi_j y_j,$$

где

$$x = \begin{bmatrix} I_{\alpha \cdot \beta} & O \end{bmatrix} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right\}, \quad y = \begin{bmatrix} O & I_{\gamma \cdot \delta} \end{bmatrix} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right\}.$$

Применяя к векторам $x \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta}$ и $y \in \mathbb{R}^{\gamma \cdot \delta}$ обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}$, получаем r -параметрическое семейство решений $X(c_r)$, $Y(c_r)$ билинейного матричного уравнения (1).

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для билинейного матричного уравнения (1) имеет место критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо лишь для тех неоднородностей $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (3). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для билинейного матричного уравнения (1) имеет место не критический случай, при этом уравнение (1) разрешимо для любой неоднородности $\mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Билинейное матричное уравнение (1) в не критическом случае ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) разрешимо для любой неоднородности $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}$. В этом случае уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений

$$X(c_r) = \Phi(c_r) + \Lambda(\mathcal{A}), \quad Y(c_r) = \Psi(c_r) + \Pi(\mathcal{A}), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, выше показана равносильность билинейного матричного уравнения (1) и традиционного линейного алгебраического уравнения (2), как известно [6, 7], разрешимого тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ требование (3) выполнено, следовательно уравнение (2) разрешимо

$$c = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] + P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

при этом уравнение (1) имеет r -параметрическое семейство решений

$$X(c_r) = \Phi(c_r) + \Lambda(\mathcal{A}), \quad \Phi(c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} I_{\alpha \cdot \beta} & O \end{bmatrix} P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right\}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

$$Y(c_r) = \Psi(c_r) + \Pi(\mathcal{A}), \quad \Psi(c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} O & I_{\gamma \cdot \delta} \end{bmatrix} P_{\mathcal{Q}_r} c_r \right\},$$

где

$$\Lambda(\mathcal{A}) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} I_{\alpha \cdot \beta} & O \end{bmatrix} \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\}, \quad \Pi(\mathcal{A}) := \mathcal{M}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} O & I_{\gamma \cdot \delta} \end{bmatrix} \mathcal{Q}^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\}.$$

3. Псевдорешения билинейного матричного уравнения

Предположим далее, что условие (3) не выполнено: $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{A}] \neq 0$, при этом система (2) неразрешима, однако она всегда имеет псевдорешение [12], минимизирующее невязку в решении системы (2), при этом среди всех векторов $c \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta}$, для которых невязка достигает своего наименьшего значения, вектор $c^+ \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta}$ имеет наименьшую длину.

ЛЕММА 1. *Билинейное матричное уравнение (1) при условии $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{A}] \neq 0$ не разрешимо, однако имеет псевдорешение, наилучшее (в смысле наименьших квадратов)*

$$X^+ := \Lambda(\mathcal{A}), \quad Y^+ = \Pi(\mathcal{A}),$$

минимизирующее невязку

$$\left\| \mathcal{Q} c - \mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\|_{\mathbb{R}^{\lambda \cdot \mu}} \rightarrow \min$$

в решении системы (2). При этом норма невязки Δ равна норме выражения, входящего в левую часть выражения (2)

$$\Delta := \left\| \mathcal{Q} c^+ - \mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\|_{\mathbb{R}^{\lambda \cdot \mu}} = \left\| P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{A}] \right\|_{\mathbb{R}^{\lambda \cdot \mu}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, выше показана равносильность билинейного матричного уравнения (1) и линейного алгебраического уравнения (2). Как известно при условии $P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[\mathcal{A}] \neq 0$ линейное алгебраическое уравнение (2) не разрешимо, однако имеет псевдорешение [12] $c^+ := \mathcal{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, наилучшее (в смысле наименьших квадратов), минимизирующее невязку в решении системы (2). Билинейное матричное уравнение (1) при этом имеет псевдорешение, наилучшее (в смысле наименьших квадратов)

$$X^+ := \Lambda(\mathcal{A}), \quad Y^+ = \Pi(\mathcal{A}).$$

ПРИМЕР 1. *Билинейное матричное уравнение*

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 15 & 124 & 6 & -124 \\ 21 & -160 & 21 & 97 \\ 6 & 133 & 15 & 638 \end{pmatrix} \quad (4)$$

разрешимо при

$$\mathcal{L}(X, O) := \int_0^1 \int_0^1 \Phi(t, s) X \Psi(t, s) dt ds, \quad \mathcal{L}(O, Y) := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 S_i Y R_j;$$

здесь

$$\begin{aligned} \Phi(t, s) &:= 12 \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & s \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad \Psi(t, s) := \begin{pmatrix} s & s & 0 & 0 \\ 0 & s & t & 0 \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix}, \\ S_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $P_{Q^*} \neq 0$, постольку для билинейного матричного уравнения (4) имеет место критический случай, при этом выполнено условие (3), следовательно, поставленная задача разрешима. Искомое $r := 4$ — параметрическое семейство решений билинейного матричного уравнения (4) определяют $r = 4$ линейно независимых столбцов матрицы-ортотектора P_Q :

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение билинейного матричного уравнения (4) представимо в виде (здесь $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^1$ — произвольные константы)

$$X(c_r) = \Phi(c_r) + \Lambda(\mathcal{A}), \quad \Phi(c_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 5 & \frac{239}{7} & -\frac{457}{14} \\ \frac{3}{2} & -\frac{496}{7} & \frac{531}{7} \end{pmatrix},$$

$$Y(c_r) = \Psi(c_r) + \Pi(\mathcal{A}), \quad \Psi(c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ -2c_1 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \Pi(\mathcal{A}) = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 8573 & 0 \\ -8389 & 0 \\ 92 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2. Билинейное матричное уравнение

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

не разрешимо; здесь $\mathcal{L}(X, Y)$ — функционал, определенный в примере 1.

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, постольку для матричного уравнения (5) имеет место критический случай, при этом условие (3) не выполнено: $P_{Q^*} \mathcal{M}[\mathcal{A}] \neq 0$; здесь

$$P_{Q^*} \mathcal{M}[\mathcal{A}] = \frac{1}{257} \begin{pmatrix} 129 & -25 & 103 & -13 & -91 & 13 & 103 & -25 & 129 & 13 & -91 & -13 \end{pmatrix}^*,$$

следовательно, матричное уравнение (5) не разрешимо. Искомое псевдорешение уравнения (5)

$$X^+ = \frac{1}{3084} \begin{pmatrix} 512 & -792 & 483 \\ -309 & 792 & -280 \end{pmatrix}, \quad Y^+ = \frac{1}{771} \begin{pmatrix} 83 & 0 \\ 83 & 0 \\ 83 & 0 \end{pmatrix},$$

наилучшее (в смысле наименьших квадратов), определяет матрица

$$Q^+ \mathcal{M}[\mathcal{A}] = \frac{1}{3084} \begin{pmatrix} 512 & -309 & -792 & 792 & 483 & -280 & 332 & 332 & 332 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

В случае некорректно поставленной задачи [12, 13] билинейное матричное уравнение (1) может быть регуляризовано аналогично [14, 15].

ПРИМЕР 3. *Билинейное матричное уравнение*

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (6)$$

разрешимо при

$$\mathcal{L}(X, O) := \int_0^1 \int_0^1 \Phi(t, s) X \Psi(t, s) dt ds, \quad \mathcal{L}(O, Y) := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 S_i Y R_j;$$

здесь

$$\Phi(t, s) := 3 \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & s \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad \Psi(t, s) := 4 \begin{pmatrix} s & 0 \\ t & s \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{Q^*} = 0$, постольку для билинейного матричного уравнения (6) имеет место не критический случай, следовательно, поставленная задача разрешима. Обозначим проекторы $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2 : \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Искомое $r := 6$ — параметрическое семейство решений билинейного матричного уравнения (6) представимо в виде

$$X(c_r) = \Phi(c_r) + \Lambda(\mathcal{A}), \quad \Phi(c_r) = \begin{pmatrix} \Phi(c_r) \mathcal{P}_1 & \Phi(c_r) \mathcal{P}_2 & \Phi(c_r) \mathcal{P}_3 \end{pmatrix},$$

$$Y(c_r) = \Psi(c_r) + \Pi(\mathcal{A}), \quad \Psi(c_r) = \begin{pmatrix} \Psi(c_r) \tilde{\mathcal{P}}_1 & \Psi(c_r) \tilde{\mathcal{P}}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda(\mathcal{A}) = \frac{1}{190\ 618\ 864} \begin{pmatrix} -137\ 387\ 822 & 74\ 134\ 441 & -66\ 871\ 292 \\ 103\ 493\ 487 & 99\ 476\ 308 & 234\ 994\ 809 \end{pmatrix},$$

$$\Pi(\mathcal{A}) = \frac{1}{190\ 618\ 864} \begin{pmatrix} -6\ 3770\ 948 & 125\ 065\ 746 \\ -62\ 603\ 495 & 36\ 235\ 764 \\ -125\ 206\ 990 & 72\ 471\ 528 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$\Phi(c_r)\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -35322376a - 19563182b + 4(-9781591c + 6431169d + 1330298(e + 2f)) \\ 64838468a + 31384575b + 62769150c - 18775234d - 10046020e - 20092040f \end{pmatrix},$$

$$\Phi(c_r)\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 48607452a + 26892217b + 53784434c + 9328946d - 19441244e - 38882488f \\ -4(12440516a + 6036103b + 12072206c + 4659990d - 4198564e - 8397128f) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(c_r)\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -4(4315780a + 10193407b + 20386814c - 15232906d + 453372e + 906744f) \\ 1661436a + 21796313b + 43592626c - 41047694d + 8205668e + 16411336f \end{pmatrix},$$

$$\Psi(c_r)\tilde{\mathcal{P}}_1 = \begin{pmatrix} 4(78510956a - 10694417b - 2(10694417c + 2700625d + 1671442e + 3342884f)) \\ -42777668a + 349581017b - 2(31656711c + 2112871d + 4465358(e + 2f)) \\ -2(42777668a + 31656711b - 127305442c + 4225742d + 8930716e + 17861432f) \end{pmatrix},$$

$$\Psi(c_r)\tilde{\mathcal{P}}_2 = \begin{pmatrix} -2(10802500a + 2112871b + 4225742c - 122755314d + 36000044e + 72000088f) \\ -4(3342884a + 2232679b + 4465358c + 18000022d - 82937620e + 24743624f) \\ -8(3342884a + 2232679b + 4465358c + 18000022d + 12371812e - 22911092f) \end{pmatrix}.$$

Здесь $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^1$ — произвольные константы.

4. Заключение

Найденные условия разрешимости и предложенная формула решения билинейного матричного уравнения могут быть использованы при решении традиционных матричных уравнений Сильвестра [7], матричных уравнений Ляпунова [6], а также матричных дифференциально-алгебраических краевых задач [16, 17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 367 с.
3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
5. Boichuk, A. A., Krivosheya, S. A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. 1998. Vol. 50, № 8. pp. 1162—1169.

6. Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета ім. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. 2014. № 1120. С. 85–94.
7. Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Серия: математика и механика. 2014. Т. 19, Вып. 1 (21). С. 49–57.
8. Чуйко С. М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 52–66.
9. Захар-Иткин М. Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований // Успехи мат. наук. 1973. Т. XXVIII, № 3. С. 83–120.
10. Деревенский В. П. Матричные уравнения Бернулли. I // Известия вузов. Серия: Математика. 2008. № 2. С. 14–23.
11. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
12. Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина линейной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Известия вузов. Серия: Математика. 2016. № 8. С. 74–83.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
14. Чуйко С. М., Чуйко. Е. В. Регуляризация периодической краевой задачи при помощи импульсного воздействия // Буковинский математический журнал. 2013. Т. 1, № 3–4. С. 158–161.
15. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 197, № 1, С. 138–150.
16. Chuiko S. M. A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). 2015. Vol 210, № 1. pp. 9–21.
17. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. 2015. Vol. 56, № 4. pp. 752–760.

REFERENCES

1. Gantmacher, F. R., 1959, "Theory of matrices AMS, Chelsea publishing.
2. Bellman, R. E., 1960, "Introduction to matrix analysis McGraw-Hill, New York.
3. Lancaster, P., 1972, "Theory of matrices Academic Press, New York-London.
4. Daletskii, Yu. L., Krein, M. G. 1970, "Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space"(in Russian), Nauka, Moscow.
5. Boichuk, A. A., Krivosheya, S. A., 1998, "Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type" , Ukrainian Mathematical Journal, vol. 50, no. 8, pp. 1162–1169.
6. Chuiko, S. M., 2014, "On the solution of the matrix Lyapunov equation", Visn. Kharkovskogo Univ. Ser. Mat. Mech., no. 1120, pp. 85–94.
7. Chuiko, S. M., 2014, "On the solution of the matrix Sylvester equation", Visn. Odesskogo Univ. Ser. Mat. Mech., vol. 19, no. 1(21), pp. 49–57.

8. Chuiko, S. M., 2014, "On the solution of the generalized matrix Sylvester equation", *Chebyshevskiy Sb.*, vol. 16, no. 1, pp. 52–66.
9. Zakhar-Itkin, M. X., 1973, "Matrix differential Riccati equation and a semigroup of linear-fractional transformation" , *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 28, no. 3, pp. 83–120.
10. Derevenskiy, V. P., 2008, "Matrix Bernoulli equation. I" , *Izvestia Vuzov. Mathematica*, no. 2, pp. 14–23.
11. Voevodin, V. V., Kuznetsov, Yu. A., 1984, "Matritsy i vychisleniya (in Russian). (Matrices and Calculations)", Nauka, Moscow.
12. Chuiko, S. M., "Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation" *Russian Mathematics*, vol. 60, no 8, pp. 64–73.
13. Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya. 1986, "Methods for Solving Ill-Posed Problems" , Nauka, Moscow.
14. Chuiko, S. M., Chuiko, E. V., 2013, "On the regularization of a periodical boundary-value problem by a degenerate pulsed action" , *Bukovinskiy Matematicheskij Zhurnal*, vol. 1, no. 3–4, pp. 158–161.
15. Chuiko, S.M., 2014, "On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action" , *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 197, no. 1, pp. 138–150.
16. Chuiko S. M., 2015, "A generalized matrix differential-algebraic equation" *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.)*, vol. 210, no 1, pp. 9–21.
17. Chuiko S. M., 2015, "The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem" *Siberian Mathematical Journal*, vol. 56, № 4. pp. 752–760.

Донбасский государственный педагогический университет.

Получено 02.03.2015 г.

Принято в печать 10.06.2016 г.