

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 2

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ

О. Г. Ровенская (г. Краматорск, Украина),

О. А. Новиков (г. Славянск, Украина)

Аннотация

Работа касается вопросов приближения периодических дифференцируемых функций высокой гладкости повторными средними арифметическими сумм Фурье. Одна из наиболее общих классификаций периодических функций в настоящее время — классификация, предложенная А. И. Степанцом, основанная на понятии (ψ, β) -дифференцирования. Она позволяет единым образом классифицировать суммируемые периодические функции, начиная от функций, ряд Фурье которых может расходиться, и заканчивая бесконечно дифференцируемыми функциями, включая аналитические и целые. При соответствующем выборе параметров, классы (ψ, β) -дифференцируемых функций совпадают с известными классами Вейля, классами Соболева W_p^l и классами сверток с фиксированными ядрами.

В течение последних десятилетий суммы Валле Пуссена и их особые случаи (суммы Фурье и суммы Фейера) интенсивно изучались многими выдающимися специалистами в теории функций.

В настоящее время, большой объем фактического материала накоплен в многочисленных публикациях. Одно из самых важных направлений в этой области — исследование приближающих свойств указанных сумм для различных классов функций.

Цель работы — систематизировать известные результаты, связанные с приближающими свойствами методов суммирования Валле Пуссена на классах интегралов Пуассона, а также представить новые факты, полученные для их обобщений.

В ряде случаев установлены асимптотические формулы для точных верхних граней отклонений в равномерной метрике тригонометрических полиномов $V_{n,p}^{(2)}(f; x)$, порождаемых повторным применением метода суммирования Валле Пуссена, на классах $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$, которые задаются мультипликаторами $\psi(k)$ и сдвигами по аргументу β при условии, что последовательности $\psi(k)$, определяющие указанные классы, убывают к нулю со скоростью геометрической прогрессии (в этом случае функции из классов $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$ допускают регулярное продолжение в соответствующую полосу комплексной плоскости).

В работе рассмотрены обобщенные суммы Валле Пуссена, изучены их приближающие свойства на классах аналитических периодических функций. Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений повторных сумм Валле Пуссена на классах интегралов Пуассона. В соответствующих случаях эти равенства гарантируют решение задачи Колмогорова-Никольского для повторных сумм Валле Пуссена и классов интегралов Пуассона. Указаны условия, при которых повторные суммы предоставляют лучший порядок приближения, чем обычные суммы Валле Пуссена.

Ключевые слова: ряд Фурье, метод Валле Пуссена, асимптотическая формула.

Библиография: 16 названий.

APPROXIMATION OF ANALYTIC PERIODIC FUNCTIONS BY LINEAR MEANS OF FOURIER SERIES

O. G. Rovenska (Kramatorsk, Ukraine),
O. O. Novikov (Slov'yansk, Ukraine)

Abstract

The work concerns the questions of approximation of periodic differentiable functions of high smoothness by repeated arithmetic means of Fourier sums. One of the classifications of periodic functions nowadays is the classification suggested by A. Stepanets which is based on the concept of (ψ, β) -differentiation. The given classification allows to distinguish all classes of summable periodic functions from the functions where the Fourier series can deviate to infinitely differentiable functions including analytical and entire ones. When choosing the parameters properly, classes of (ψ, β) -differentiable functions exactly coincide with the well-known classes of Vail differentiable functions, Sobolev classes W_p^l and classes of convolutions with integral kernels.

De la Vallee Poussin sums and their special cases (Fourier sums and Fejer sums) were extensively studied for many decades by many prominent experts in the theory of functions. At present, the large amount of factual material is accumulated in numerous publications. One of the most important directions in this field is the investigation of approximation properties of these sums for various classes of functions. The aim of the present paper is to systematize the known results related to the approximation properties of de la Vallee Poussin sums on classes of Poisson integrals and to present new facts obtained for their generalizations.

In certain cases asymptotic equalities are found for upper bounds of deviations in the uniform metric of the repeated de la Vallee Poussin sums on the classes $C_{\beta, \infty}^\psi$ and $C_\beta^\psi H_\omega$ which are generated by multipliers $\psi(k)$ and shifts on argument β provided that sequences $\psi(k)$ which define the specified classes tend to zero with the rate of geometrical progression. In doing so classes $C_{\beta, \infty}^\psi$ and $C_\beta^\psi H_\omega$ consist of analytic functions which can be regularly extended in the corresponding strip.

We introduce generalized de la Vallee Poussin sums and study their approximation properties for the classes of analytic periodic functions. We obtain asymptotic equalities for upper bounds of deviations of the repeated de la Vallee Poussin sums on classes of Poisson integrals. Under certain conditions, these equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for the repeated de la Vallee Poussin sums and classes of Poisson integrals. We indicate conditions under which the repeated sums guarantee a better order of approximation than ordinary de la Vallee Poussin sums.

Keywords: Fourier series, de la Vallee Poussin method, asymptotic formula.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Следуя А. И. Степанцу, обозначим $C_{\beta, \infty}^q$ и $C_\beta^q H_\omega$ — классы непрерывных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_\beta^q(t) dt,$$

в которой

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0; 1), \beta \in R$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(\cdot)$, соответственно, удовлетворяет условию $\text{esssup}|\varphi(\cdot)| \leq 1$ или

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in R,$$

где $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности.

Известно [1], что классы $C_{\beta,\infty}^q$ и $C_{\beta}^q H_{\omega}$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f , которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq \ln \frac{1}{q}$. Вопросы, связанные с решением экстремальных задач на классах аналитических функций, являются актуальными в настоящее время и широко изучаются в рамках различных направлений теории приближения (напр., [2, 3] и др.).

Обозначим через $S_n(f; x)$ частичные суммы ряда Фурье. Тогда суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ задаются соотношением [1]

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f, x).$$

Пусть p_1, p_2 — произвольные натуральные числа такие, что $p_1 + p_2 < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,p_1,p_2}(f, x) = V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f, x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^k S_m(f, x), \quad (1)$$

которые будем называть повторными суммами Валле Пуссена.

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю. В 1946 году С. М. Никольский [4] показал, что для верхних граней отклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C_{\beta,\infty}^q$,

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \|f(\cdot) - S_n(f; \cdot)\|_C,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad q = e^{-\alpha},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. В 1980 году С. Б. Стечкин [5] уточнил остаточный член в этой формуле, показав, что он равен $O(1) \frac{q^{n+1}}{(1-q)n}$.

Аналогичная задача для классов $C_{\beta}^q H_{\omega}$ была решена А. И. Степанцом. В работе [6] (также [7]) было показано, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}; S_n) = \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n),$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работах [9, 8] для верхних граней отклонений сумм Валле Пуссена на классах $C_{\beta,\infty}^q$ и $C_{\beta}^q H_{\omega}$ получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n,p}) = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t \, dt +$$

$$+O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), 1 < p < n,$$

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right)=\frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}+O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3}+\frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \quad (2)$$

А. С. Сердюком [10] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (2):

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right)=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q}+O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q}=\int_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p \cos pt+q^{2p}}}{1-2q \cos pt+q^2} dt, \quad s=s(p)=\begin{cases} 1, & p=1, \\ 3, & p=2,3,\dots \end{cases}$$

В работах [12, 11, 13] на классах $C_{\beta,\infty}^\psi$ получены асимптотические формулы для верхних граней отклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторным применением метода суммирования Валье Пуссена. В работах [15, 14, 16] рассмотрены вопросы приближения m -мерных аналогов таких классов прямоугольными суммами Фурье и прямоугольными суммами Валье Пуссена.

2. Основной результат

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n,\bar{p}}^{(2)}\right)=\sup_{f \in C_{\beta}^q H_{\omega}} |f(x)-V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f;x)|.$$

Получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q \in (0;1)$, $\beta \in R$ и $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, $p_1 + p_2 \stackrel{\text{df}}{=} \Sigma_{\bar{p}} < n$. Тогда при $n - p_1 - p_2 \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n,\bar{p}}^{(2)}\right)=\frac{4q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) e_{n-\Sigma_{\bar{p}}-1}(\omega) +$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}\omega((n-\Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{p_1 p_2 (n-\Sigma_{\bar{p}})(1-q)^5} + \frac{q^{n-p_1+1}\omega((n-p_1)^{-1})}{p_1 p_2 (1-q)^3} + \frac{q^{n-p_2+1}\omega((n-p_2)^{-1})}{p_1 p_2 (1-q)^3}\right), \quad (3)$$

где

$$e_{n-\Sigma_{\bar{p}}-1}(\omega)=\theta_n(\omega)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau(n-\Sigma_{\bar{p}}-1)^{-1})\sin\tau d\tau,$$

$\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, p_1, p_2, q, β ,

$$\Pi(n;k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1-n\sin^2u)\sqrt{1-k^2\sin^2u}}$$

— полный эллиптический интеграл третьего рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношения (1) имеем

$$\delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(f, x) \stackrel{\text{df}}{=} f(x) - V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f, x) = \frac{1}{p_1 p_2} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \sum_{m=k-p_2+1}^k \rho_m(f, x),$$

где

$$\rho_m(f, x) = f(x) - S_m(f, x).$$

Введем обозначение

$$b_m^{q,\beta}(t) = \frac{1 - 3q \cos t + 3q^2 \cos 2t - q^3 \cos 3t}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} \cos(mt + \frac{\beta\pi}{2}) + \\ + \frac{-3q \sin t + 3q^2 \sin 2t - q^3 \sin 3t}{(1 - 2q \cos t + q^2)^3} \sin(mt + \frac{\beta\pi}{2}).$$

Применяя рассуждения работы [8], получаем

$$\mathcal{E}(C_\beta^q H_\omega; V_{n,\bar{p}}^{(2)}) = \frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}}{\pi p_1 p_2} \sup_{f \in H_\omega} |J_{n,p_1,p_2}(f)| + \\ + O(1) \left(\frac{q^{n-p_1+1}}{\pi p_1 p_2} \sup_{f \in H_\omega} |J_{n,p_1,0}(f)| + \frac{q^{n-p_2+1}}{\pi p_1 p_2} \sup_{f \in H_\omega} |J_{n,0,p_2}(f)| + \frac{q^{n+1}}{\pi p_1 p_2} \sup_{f \in H_\omega} |J_{n,0,0}(f)| \right),$$

где

$$J_{n,p_1,p_2}(f) = J_{n,\bar{p}}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{2\pi} f(t) Z_q^3(t) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} + 1)t + \frac{\beta\pi}{2} + 3\xi(t)] dt.$$

$$Z_q(t) = (1 - 2q \cos t + q^2)^{-1/2}, \quad \xi(t) = \arctg \frac{q \sin t}{1 - q \cos t}.$$

Положим

$$\tau = \tilde{y}(t) = t + (n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1} (3\xi(t) + 2t + \beta\pi/2).$$

Тогда

$$J_{n,p_1,p_2}(f) = \int_0^{2\pi} f(t) Z_q^3(t) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tilde{y}(t)] dt.$$

Обозначим

$$Z_{q,n,\bar{p}}(t) = \left(\frac{n - \Sigma_{\bar{p}} + 1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} - \frac{2(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1) + 1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} q \cos t + \frac{n - \Sigma_{\bar{p}} - 2}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} q^2 \right)^{-1/2}.$$

Функция $\tilde{y}(t)$ имеет обратную функцию $t = y(\tau) = \tilde{y}^{-1}(\tau)$, $\tau \in R$. Поэтому существует функция

$$y'(\tau) = Z_{q,n,\bar{p}}^2(y(\tau)) Z_q^{-2}(y(\tau)).$$

Так как для любых $t \in R$ и $q \in (0; 1)$ выполняется $\tilde{y}'(t) > 1$, то для любых $\tau \in R$ и $q \in (0; 1)$ выполняется

$$0 < y'(\tau) < 1. \quad (4)$$

Выполним замену переменной в интеграле $J_{n,\bar{p}}(f)$, положив $t = y(\tau)$. Учитывая (4), имеем

$$J_{n,\bar{p}}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) Z_q^3(y(\tau)) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau(t)] d\tau + R_{n,\bar{p}}^{(1)}(f), \quad (5)$$

где

$$R_{n,\bar{p}}^{(1)}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau(t)] d\tau,$$

$$r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) = Z_q(y(\tau)) Z_{q,n,\bar{p}}^2(y(\tau)) - Z_q^3(y(\tau)).$$

Так как для любых $t \in R$ и $q \in (0; 1)$ $Z_q^2(t) > Z_{q,n,\bar{p}}^2(t)$, то для $\tau \in (\tilde{y}(0); \tilde{y}(2\pi))$ выполняется $r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) < 0$.

Покажем, что $\forall f \in H_\omega$ при $n \rightarrow \infty$

$$|R_{n,\bar{p}}^{(1)}(f)| = O(1)\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})(1 - q)^{-5}(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1}, \quad (6)$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по всем параметрам.

Изучим нули функции

$$\varphi(t) = r_{n,\bar{p}}^{(1)}(t) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)t].$$

Функция $r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau)$ по абсолютной величине на промежутке $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ строго убывает, а на промежутке $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$ строго возрастает. Не нарушая общности, можно считать, что $0 \leq \beta < 4$.

Пусть $x_k = \frac{k\pi}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1}$ и $\tau_k = x_k + \frac{\pi}{2(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)}$.

Числа $\alpha_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau] d\tau$ по абсолютной величине убывают и

$$\text{sign}(\alpha_k) = (-1)^k.$$

Поэтому для $r_{n,\bar{p}}^{(+)}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_{n - \Sigma_{\bar{p}}}} r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau] d\tau$ выполнено:

$$\text{sign}(r_{n,\bar{p}}^{(+)}(\tau_m)) = \text{sign}\left(\sum_{k=m}^{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \alpha_k\right) = (-1)^m.$$

Это значит, что на концах каждого отрезка $[\tau_k; \tau_{k+1}]$ функция $r_{n,\bar{p}}^{(+)}(\tau)$ принимает значения, различные по знаку. Поэтому она на каждом промежутке $[\tau_k; \tau_{k+1}]$, $k \in \{2, 3, \dots, n - \Sigma_{\bar{p}} - 1\}$, имеет единственный простой нуль $\bar{\tau}_k$.

Таким образом, для $k \in \{2, 3, \dots, n - \Sigma_{\bar{p}} - 1\}$ выполняется

$$\int_{\bar{\tau}_k}^{\bar{\tau}_{k+1}} r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau] d\tau = 0. \quad (7)$$

Аналогично показываем, что функция

$$r_{n,\bar{p}}^{(-)}(\tau) = \int_{\tau_{n - \Sigma_{\bar{p}} + 3}}^{\tau} r_{n,\bar{p}}^{(1)}(\tau) \cos(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau d\tau$$

такова, что на каждом промежутке $[\tau_k; \tau_{k+1}]$, $k \in \{n - \Sigma_{\bar{p}} + 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\bar{p}}) - 1\}$, имеет единственный простой нуль $\bar{\tau}_k$. Это значит, что для $k \in \{n - \Sigma_{\bar{p}} + 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\bar{p}}) - 1\}$ также имеет место (7), то есть выполнены требования леммы 5.1.3. работы [1, с. 206]. Применяя эту лемму, получаем, что $\forall f \in H_\omega$ имеет место оценка (6).

Следующий шаг состоит в дальнейшем упрощении интеграла в соотношении (5). С этой целью определим функцию $l_{n,\bar{p}}(\tau)$, положив

$$l_{n,\bar{p}}(\tau) = \begin{cases} Z_q(y(\tau_k)), & \tau \in [x_k; x_{k+1}], k = 2, 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\bar{p}}), \\ 0, & \tau \in [\tilde{y}(0), x_2] \cup (x_{2(n - \Sigma_{\bar{p}})}, \tilde{y}(2\pi)). \end{cases} \quad (8)$$

Тогда в силу соотношения (5)

$$J_{n,\bar{p}}(f) = \int_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_{\bar{p}}+1)}} f(y(\tau)) l_{n,\bar{p}}^3(\tau) \cos((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau) d\tau + R_{n,\bar{p}}^{(1)}(f) + R_{n,\bar{p}}^{(2)}(f), \quad (9)$$

где

$$R_{n,\bar{p}}^{(2)}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau) \cos((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau) d\tau, \quad r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau) = Z_q^3(y(\tau)) - l_{n,\bar{p}}^3(\tau). \quad (10)$$

Так как

$$\text{sign} \left(\frac{d}{d\tau} Z_q^3(y(\tau)) \right) = -\text{sign}(\sin y(\tau)),$$

то функция $Z_q^3(y(\tau))$ строго убывает на промежутке $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ и строго возрастает на промежутке $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$. Изучая вторую производную этой функции, заключаем, что она имеет ровно по одной точке перегиба на каждом из промежутков $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ и $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$.

Это значит, что для функции $g(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} Z_q^3(y(\tau))$ выполнены требования леммы 5.18.2. работы [1, с. 323]. Обозначим через τ^* точку перегиба функции $Z_q^3(y(\tau))$, находящуюся на промежутке $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$. Функция $Z_q^3(y(\tau))$ на промежутке $(\tilde{y}(0); \tau^*)$ выпукла вверх и строго убывает, а на промежутке $(\tau^*; \tilde{y}(\pi))$ выпукла вниз и строго убывает. Пусть числа k_1 и k_2 такие, что точка x_{k_1} есть ближайшая слева, а x_{k_2} — ближайшая справа от точки τ^* и пусть

$$\alpha_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau) \cos(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau d\tau.$$

Учитывая свойства функции $Z_q^3(y(\tau))$, приходим к выводу о том, что для $k = \overline{2, n - \Sigma_{\bar{p}}}$ выполняется условие

$$\text{sign} \alpha_k = (-1)^k.$$

Применяя теперь лемму 5.18.2. работы [1, с. 323], можно показать, что с ростом $k = \overline{2; k_1 - 1}$ числа $|\alpha_k|$ не убывают, а с ростом $k = \overline{k_2; n - \Sigma_{\bar{p}}}$ числа $|\alpha_k|$ не возрастают.

Пусть

$$\Phi_1(x) = \int_{x_2}^x r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau) \cos(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau d\tau, \quad \Phi_2(x) = \int_x^{x_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}} r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau) \cos(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau d\tau.$$

Так как $\text{sign} \Phi_1(x_m) = (-1)^{m-1}$, $m \in \{3, \dots, k_1\}$, то на концах каждого отрезка $[x_m; x_{m+1}]$ функция $\Phi_1(x)$ принимает значения различные по знаку. Поэтому функция $\Phi_1(x)$ на каждом промежутке $[x_k; x_{k+1}]$, $k \in \{2, 3, \dots, k_1 - 1\}$, имеет единственный простой нуль $\bar{x}_k$.

Аналогично для функции $\Phi_2(x)$ получаем, что она на каждом промежутке $[x_k; x_{k+1}]$, $k \in \{k_2; k_2 + 1; \dots; n - p_1 - p_2 - 1\}$, также имеет единственный простой нуль $\bar{x}_k$.

Для промежутка $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$ проведем аналогичные рассуждения. Принимая во внимание эти построения, и полагая

$$G(\tau) = f(y(\tau)) r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau) \cos(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau,$$

согласно (10), имеем

$$R_{n,\bar{p}}^{(2)}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau) d\tau + \int_{\tilde{y}(\pi)}^{\tilde{y}(2\pi)} G(\tau) d\tau \stackrel{df}{=} J_{n,\bar{p}}^{(1)}(f) + J_{n,\bar{p}}^{(2)}(f). \quad (11)$$

Изучим слагаемое $J_{n,\bar{p}}^{(1)}(f)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_{n,\bar{p}}^{(1)}(f) &= \int_{\tilde{y}(0)}^{x_2} G(\tau) d\tau + \int_{x_2}^{\bar{x}_{k_1-1}} G(\tau) d\tau + \int_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} G(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{\bar{x}_{k_2}}^{x_{n-p_1-p_2+1}} G(\tau) d\tau + \int_{x_{n-p_1-p_2+1}}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau) d\tau \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^5 i_j(f). \end{aligned}$$

Учитывая (10), $\forall f \in H_{\omega_0}$ находим

$$|i_1(f)| = O(1)\omega \left(\frac{1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \right) \frac{1}{(1-q)^3(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)}.$$

Применяя лемму 5.1.3 работы [1, с. 206], получаем

$$|i_2(f)| \leq \omega \left(\frac{4\pi}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \right) \int_{x_2}^{\bar{x}_{k_1-1}} |Z_q^3(y(\tau)) - l_{n,\bar{p}}^3(\tau)| d\tau.$$

Так как $|y'(\tau)| \leq 1$ и $\left| \frac{d}{d\tau} Z_q^3(y(\tau)) \right| \leq \frac{3q}{(1-q)^5}$, то $|r_{n,\bar{p}}^{(2)}(\tau)| \leq \frac{3q\pi}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1-q)^5}$. Следовательно,

$$|i_2(f)| = O(1)\omega \left(\frac{1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \right) \frac{q}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1-q)^5}.$$

Аналогично получаем, что такая же оценка справедлива для величин $|i_3(f)|$, $|i_4(f)|$, $|i_5(f)|$. Учитывая это, находим

$$|J_{n,\bar{p}}^{(1)}| = O(1)\omega \left(\frac{1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \right) \frac{1}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1-q)^5}.$$

Выполняя аналогичные рассуждения, получаем, что такая же оценка справедлива для величины $|J_{n,\bar{p}}^{(2)}|$. Поэтому в силу соотношения (11) приходим к выводу о том, что

$$|R_{n,\bar{p}}^{(2)}| = O(1)\omega \left(\frac{1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \right) \frac{1}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1-q)^5}. \quad (12)$$

Таким образом, согласно (6), (9), (12),

$$J_{n,\bar{p}}(f) = \int_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_{\bar{p}})}} f(y(\tau)) l_{n,\bar{p}}^3(\tau) \cos((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau) d\tau + O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1-q)^5}.$$

Учитывая (8), имеем

$$\begin{aligned} i_{n,\bar{p}}^q(f) &\stackrel{\text{df}}{=} \int_{x_2}^{x_{2(n-\Sigma_{\bar{p}}+1)}} f(y(\tau)) l_{n,\bar{p}}^3(\tau) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tau] d\tau = \\ &= \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\bar{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tilde{y}(t)] \tilde{y}'(t) dt, \quad t_k = y(x_k). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_{n,\bar{p}}^q(f)| \leq \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\bar{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) S_k(\omega), \quad (13)$$

где

$$S_k(\omega) = \sup_{f \in H_{\omega_0}} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \cos[(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tilde{y}(t)] \tilde{y}'(t) dt \right|. \quad (14)$$

Пусть $\rho_k(t)$ — функция, определенная на промежутке $[t_k; c_k]$ равенством

$$\int_{t_k}^t \psi(t) dt = \int_{t_k}^{\rho_k(t)} \psi(t) dt, \quad t_k \leq t \leq c_k \leq \rho_k(t) \leq t_{k+1}.$$

Тогда, в силу леммы Корнейчука-Стечкина (см., например, лемма 5.1.4. работы [1, с. 208]), для любого модуля непрерывности $\omega(t)$

$$S_k(\omega) \leq \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt. \quad (15)$$

Если при этом $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то в (15) имеет место знак равенства, и верхнюю грань реализует функция из класса H_{ω} вида $s_k \pm f_k(t)$, где s_k — произвольные постоянные, а

$$f_k(t) = \begin{cases} - \int_t^{c_k} \omega'(\rho_k(v) - v) dv, & t \in [t_k; c_k], \\ \int_{c_k}^t \omega'(v - \rho_k^{-1}(v)) dv, & t \in [c_k; t_{k+1}]. \end{cases}$$

где $\rho_k^{-1}(v)$ — функция, обратная к $\rho_k(v)$.

Объединяя соотношения (13), (14), (15), для любого модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ получаем

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_{n,\bar{p}}^q(f)| \leq \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\bar{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt. \quad (16)$$

Пусть теперь $\omega = \omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Руководствуясь снова леммой Корнейчука-Стечкина, построим функцию $f^* \in H_{\omega}$, для которой будет выполняться равенство

$$i_{n,\bar{p}}^q(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\bar{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt + O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1 - q)^5}. \quad (17)$$

Функцию $f^*(t)$ будем строить на основе функций $f_k(t)$. Заметим, что для величин

$$d_k = t_{k+1} - t_k, \quad t_k = y(x_k),$$

справедливо равенство

$$d_k - d_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[y'(\tau) - y' \left(\tau + \frac{\pi}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} \right) \right] d\tau. \quad (18)$$

Так как

$$y''(\tau) = \left(2 - \frac{2(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1) + 1}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} y'(\tau) \right) Z_{q,n,\bar{p}}^2(y(\tau)) q \sin(y(\tau)) y'(\tau),$$

то на промежутке $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$ функция $y'(\tau)$ возрастает, а на промежутке $(\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi))$ — убывает. Поэтому из (18) заключаем, что числа d_k сначала возрастают, а затем убывают. Пусть $\bar{k}$ — значение номера, при котором характер указанной монотонности изменяется. При этом $n - \Sigma_{\bar{p}} - 1 < \bar{k} < n - \Sigma_{\bar{p}} + 5$.

Отметив это, положим

$$f_0(t) = \begin{cases} (-1)^k f_k(t) + \gamma_k, & t \in [t_k; t_{k+1}), k = 2, 3, \dots, \bar{k}, \\ (-1)^k f_k(t) + \delta_k, & t \in (t_k; t_{k+1}], k = \bar{k} + 1, \dots, 2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1. \end{cases}$$

где $\gamma_2 = \delta_{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1} = 0$, а остальные γ_k и δ_k подобраны так, чтобы функция $f_0(t)$ была непрерывной на промежутках $(t_2; t_{\bar{k}+1})$ и $(t_{\bar{k}+1}; t_{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1})$. Вычислим величину $i_{n,\bar{p}}^q(f_0)$. В силу леммы Корнейчука-Стечкина для $k = 2, 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1$

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_0(t) \cos((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)\tilde{y}(t)) \tilde{y}'(t) dt \right| = \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt.$$

Поэтому

$$i_{n,\bar{p}}^q(f_0) = \sum_{k=2}^{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1} Z_q^3(\tau_k) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt. \quad (19)$$

Через $f^*(t)$ обозначим 2π -периодическую функцию, которая на периоде $[0; 2\pi]$ определяется равенством

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, c_2] \cup [c_{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1}, 2\pi], \\ f_0(t), & t \in [c_2, t_{\bar{k}}] \cup [t_{\bar{k}+2}, c_{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1}], \\ m(t), & t \in [t_{\bar{k}}, t_{\bar{k}+2}], f_0(t_{\bar{k}+1} - 0) > 0, \\ M(t), & t \in [t_{\bar{k}}, t_{\bar{k}+2}], f_0(t_{\bar{k}+1} - 0) < 0. \end{cases}$$

где

$$m(t) = \min\{f_0(t), f_0(t_{\bar{k}+1} - 0), f_0(t_{\bar{k}+1} + 0)\},$$

$$M(t) = \max\{f_0(t), f_0(t_{\bar{k}+1} - 0), f_0(t_{\bar{k}+1} + 0)\}.$$

Заметим, что на каждом из промежутков $[0; c_2]$, $[c_2; t_3]$, $[c_{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1}; 2\pi]$, $[t_k; t_{k+1}]$, $k = 3, \dots, 2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1$, функция $f^*(t)$ монотонна, причем на соседних промежутках характер ее монотонности противоположный. Кроме того,

$$f_k(t_{k+1}) - f_k(t_k) = f_k(\rho(t_k)) - f_k(t_k) = \omega(\rho_k(t_k) - t_k) = \omega(d_k).$$

Так как функции $f^*(t)$ и $f_0(t)$ отличаются только на промежутках $[0, c_2] \cup [c_{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1}, 2\pi]$, то

$$|i_{n,\bar{p}}^q(f_0) - i_{n,\bar{p}}^q(f^*)| = O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1 - q)^5}.$$

Это значит, что в силу (19)

$$i_{n,\bar{p}}^q(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n - \Sigma_{\bar{p}}) + 1} Z_{n,\bar{p}}^3(\tau_k) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt + O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1 - q)^5},$$

то есть для функции $f^*(t)$, выполняется соотношение (17). Применяя рассуждения работы [7], несложно показать, что $f^* \in H_{\omega_0}$.

Следовательно, в силу (16) и (17), справедливо равенство

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_{n,\bar{p}}^q(f)| = \sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\bar{p}})+1} Z_{n,\bar{p}}^3(\tau_k) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt + O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1 - q)^5}$$

для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$.

Применяя рассуждения работы [7], находим

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega(2\tau(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1}) \sin \tau}{n - \Sigma_{\bar{p}} - 1} d\tau + O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^2(1 - q)^2},$$

$$\sum_{k=2}^{2(n-\Sigma_{\bar{p}})+1} Z_q^3(\tau_k) = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 - 2q \cos t + q^2)^{3/2}} dt + O(1) \frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1})}{(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1 - q)^5}.$$

Следовательно, для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n,\bar{p}}^{(2)}) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi \left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)^{-1}) \sin \tau d\tau +$$

$$+ O(1) \left(\frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+1} \omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\bar{p}}-1}\right)}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}} - 1)(1 - q)^5} + \frac{q^{n-p_1+1} \omega\left(\frac{1}{n-p_1-1}\right)}{(1 - q)^3} + \frac{q^{n-p_2+1} \omega\left(\frac{1}{n-p_2-1}\right)}{(1 - q)^3} \right). \quad (20)$$

Отправляясь от формулы (20), и применяя лемму о выпуклой мажоранте произвольного модуля непрерывности, можно показать, что существует величина $\theta_n(\omega)$, такая, что справедлива формула (3).

3. Заключение

Решение задачи Колмогорова–Никольского формула (3) обеспечивает, если кроме $n - p_1 - p_2 \rightarrow \infty$, выполняются условия $p_1 \rightarrow \infty$, $p_2 \rightarrow \infty$.

Из определения обычных сумм Валле Пуссена видно, что параметр p определяет номера гармоник ряда Фурье (а именно, $n - p + 1, n - p + 2, \dots, n - 1$), которые домножаются на соответствующие коэффициенты $(\frac{p-1}{p}, \frac{p-2}{p}, \dots, \frac{1}{p})$, в отличие от первых гармоник, которые не изменяются. Если сравнивать обычные суммы Валле Пуссена и повторные, у которых изменяется одинаковое количество гармоник, то есть, когда $p = p_1 + p_2$, то несложно заметить, что повторные суммы Валле Пуссена на классе $C_{\beta}^q H_{\omega}$ могут обеспечивать более высокий (с точностью до постоянного множителя) порядок приближения (при $n \rightarrow \infty$), чем обычные суммы Валле Пуссена. Например, если $p_1 = p_2 = p/2$, то порядок приближения повторными суммами Валле Пуссена составляет $\frac{q^{n-p+1}}{p^2} \omega(1/(n - p))$, что в p раз лучше, чем порядок приближения соответствующими обычными суммами Валле Пуссена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 т. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Т. 1. 426 с.
2. Акоюн Р. Р. Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе аналитических в полосе функций // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, №1. С. 9–16.
3. Шамоян Р. Ф., Куриленко С. М. Некоторые замечания о дистанциях в пространствах аналитических функций в ограниченных областях с границей из C^2 и в допустимых областях // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 3. С. 115–130. (English).
4. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, №3. С. 207–256.
5. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.
6. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье интегралов Пуассона непрерывных функций // Докл. РАН. 2000. Т. 373, №2. С. 171–173.
7. Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. 2001. Т. 192, №1. С. 113–138.
8. Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближение аналитических периодических функций суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, №12. С. 1653–1668.
9. Рукасов В. И., Новиков О. А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Труды института математики НАН Украины. 1998. Т. 20. С. 228–241.
10. Сердюк А. С. Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, №1. С. 97–107.
11. Рукасов В. И., Новиков О. А., Ровенская О. Г. Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C_{\beta, \infty}^\alpha$. // Вестник Славянского государственного педагогического университета. 2008. Т. 1, №3. С. 33–41.
12. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелинейные колебания. 2010. Т. 13, №1. С. 96–99.
13. Новиков О. А., Стёпкин А. В., Волик С. В., Вагнер Г. В. Приближение интегралов Пуассона в равномерной метрике // Сборник научных трудов физико-математического факультета Донбасского государственного педагогического университета. 2016. Вып. 6. С. 26–34.
14. Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными суммами Фурье // Карпатские математические публикации. 2013. Т. 5, №1. С. 111–118.
15. Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными суммами Фурье // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2013. №5 (148). С. 88–97.
16. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными средними рядов Фурье // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4, №3. С. 521–529.

REFERENCES

1. Stepanec, A. I. 2002, "Methods of approximation theory", *Inst. Mat. NAN Ukr., Kiev*, volume 1, 426 p. (In Russian).
2. Akopyan, R. R. 2014, "Best approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in a strip", *Tr. Inst. Mat. i Meh. UrO RAN*, vol. 20, no. 1, pp. 9–16. (In Russian).
3. Shamoyan, R. & Kurilenko, S. 2014, "Some remarks on distances in spaces of analytic functions in bounded domains with C^2 boundary and admissible domains", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, issue 3, pp. 115–130.
4. Nikol'skiy, S. M. 1946, "Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean", *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, vol. 10, no. 3, pp. 207–256. (In Russian).
5. Stechkin, S. B. 1980, "Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions", *Tr. Mat. Inst. Acad. Nauk SSSR.*, vol. 145, pp. 126–151. (In Russian).
6. Stepanec, A. I. 2000, "Approximation of Poussin integrals of continuous functions by Fourier sums", *Dokl. RAN*, vol. 373, no 2, pp. 171–173. (In Russian).
7. Stepanec, A. I. 2001, "Solution of the Kolmogorov-Nikol'skii problem for the Poisson integrals of continuous functions", *Mat. Sb.*, vol. 192, no. 1, pp. 113–138. (In Russian).
8. Rukasov, V. I. & Chaichenko, S. O. 2002, "Approximation of classes of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums", *Ukrain. Mat. J.*, vol. 54, no. 12, pp. 1653–1658. (In Russian).
9. Rukasov, V. I. & Novikov, O. A. 1998, "Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums", *Trudu inst. mat. NAN Ukr.*, vol. 20, pp. 228–241. (In Russian).
10. Serdyuk, A. S. 2004, "Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums", *Ukr. Mat. J.*, vol. 56, no. 1, pp. 97–107. (In Russian).
11. Rukasov, V. I., Novikov, O. A. & Rovenska, O. G. 2008, "Integral representations of deviations of means of Fourier sums on classes $C_{\beta, \infty}^\alpha$ ", *Vestnik Slavyanskogo Gos. Ped. Univ.*, vol. 1, no 3, pp. 33–41. (In Russian).
12. Rovenska, O. G. & Novikov, O. A. 2010, "Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums", *Nelinejnye kolebaniya*, vol. 13, no. 1, pp. 96–99. (In Russian).
13. Novikov, O. A., Styopkin A. V., Volik S. V. & Vagner G. V. 2016, "Approximation of Poussin integrals in uniform metric", *Sb. nauch. trudov fiziko-matematicheskogo faculteta Donbasskogo Gos. Prd. Univ.*, issue 6, pp. 26–34. (in Russian).
14. Novikov, O. A. & Rovenska, O. G. 2013, "Approximation of periodic function of high smoothness by right-angled Fourier sums", *Karpatskie mat. publikacii*, vol. 5, no. 1, pp. 111–118. (in Ukrainian).
15. Novikov, O. A. & Rovenska, O. G. 2013, "Approximation of periodic function of high smoothness by right-angled of Fourier series", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo Gos. Univ. Ser. Mat. Fiz.*, no. 5 (148), pp. 88–97. (In Russian).
16. Rovenska O. G. & Novikov O. A. 2012, "Approximation of periodic functions of high smoothness by right-angled linear means of Fourier series", *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, vol. 4, no. 3, pp. 521–529. (in Russian).

Донбасская государственная машиностроительная академия.

Донбасский государственный педагогический университет.

Получено 10.03.2016 г.

Принято в печать 10.06.2016 г.