

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 2

УДК 511.3

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА
РЯДОВ ДИРИХЛЕ¹

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)

Аннотация

Исследуется задача аналитического поведения рядов Дирихле, которые имеют ограниченную сумматорную функцию, на оси сходимости $\sigma = 0$. Ранее эта задача изучалась в работах авторов в случае рядов Дирихле с коэффициентами, которые определяются конечнозначными числовыми характерами, что в свою очередь было связано с решением известной гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что конечнозначные числовые характеры, отличные от нуля почти для всех простых p , асимптотика сумматорных функций которых имеет линейный вид, являются характерами Дирихле. Эта гипотеза была высказана в 1950 году и до сих пор окончательно не решена. В одной из работ авторов было получено частичное решение этой гипотезы исходя из поведения соответствующего ряда Дирихле при подходе к мнимой оси. Есть основания полагать, что в этом направлении будет получено окончательное решение гипотезы Н. Г. Чудакова.

В нашем случае задача представляет интерес и в связи с получением аналитических условий почти периодичности ограниченной числовой последовательности, отличных от полученных ранее условий. Например, условий Сеге, заключающихся в наличии точек регулярности на границе сходимости соответствующего степенного ряда.

Отметим, что в основе исследований лежит, так называемый, метод редукции к степенным рядам, разработанный в начале 80х годов профессором В. Н. Кузнецовым, заключающийся в изучении взаимосвязи между аналитическими свойствами рядов Дирихле и граничным поведением соответствующих (с теми же коэффициентами, что и у рядов Дирихле) степенных рядов. В данном случае этот метод позволил показать, что все точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле для таких рядов Дирихле. Более того, этот метод позволил построить последовательность полиномов Дирихле, сходящихся в любом прямоугольнике, расположенном в критической полосе, к функции, определенной рядом Дирихле.

Ключевые слова: ряды Дирихле, сумматорная функция коэффициентов, аппроксимационные полиномы Дирихле, характеры Дирихле.

Библиография: 15 названий.

ON THE BOUNDARY BEHAVIOR OF A CLASS
OF DIRICHLET SERIES

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva (Saratov)

Abstract

In this paper we study the problem of analytical behavior of Dirichlet series with a bounded summatory function on its axis of convergence, $\sigma = 0$. This problem was also considered in the authors' earlier works in case of Dirichlet series with coefficients determined by finite-valued

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00399)

numerical characters, which, in turn, was connected with a solution for a well-known Chudakov hypothesis.

The Chudakov hypothesis suggests that generalized characters, which do not vanish on almost all prime numbers p and asymptotic behavior of whose summatory functions is linear, are Dirichlet characters. This hypothesis was proposed in 1950 and was not completely proven until now. A partial proof based on the behavior of a corresponding Dirichlet series when it approaches to the imaginary axis was obtained in one of authors' works. There are reasons to anticipate that this approach may eventually lead to a full proof of the Chudakov hypothesis.

In our case this problem is particularly interesting in connection with finding analytical conditions of almost periodic behavior of a bounded number sequence, different from those obtained before by various authors, for example, by Szego.

Our study is based on a so called method of reduction to power series. This method was developed by Prof. V. N. Kuznetsov in the 1980s and it consists in studying the relation between the analytical properties of Dirichlet series and the boundary behavior of the corresponding (i.e. with the same coefficients) power series.

In our case this method of reduction to power series allowed us to show that such Dirichlet series are continuous in the wide sense on the entire imaginary axis. Moreover, this method also helped to construct a sequence of Dirichlet polynomials which converge to a function determined by a Dirichlet series in any rectangle inside the critical strip.

Keywords: Dirichlet series, summatory function of coefficients, approximating Dirichlet polynomials, Dirichlet characters.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

коэффициенты которого имеют ограниченную сумматорную функцию, т.е.

$$S(x) = \sum_{n \leq x} a_n = O(1). \quad (2)$$

Рассмотрим также степенной ряд, имеющий те же коэффициенты, что и ряд Дирихле (1).

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n. \quad (3)$$

Будем предполагать, что степенной ряд (3) имеет конечный односторонний предел в точке единица, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \alpha_0.$$

Таким образом можно считать, что $g(x) \in C[0, 1]$. Более того, будем предполагать, что при $x \in [0, 1]$:

$$|g(x) - \alpha_0| \leq \frac{C}{|\ln^k(1-x)|}, \quad (4)$$

где k — любое натуральное, а константа C не зависит от k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что условие (4) будет иметь место в случае, когда степенной ряд вида (3) имеет в точке $x = 1$ конечный предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g'(x) = \alpha_1,$$

где $g'(x)$ — производная функции $g(x)$. В этом случае имеет место более сильное условие:

$$|g(x) - \alpha_0| < C(1 - x) \text{ для всех } x \in [0, 1).$$

В данной работе изучается поведение функций, определенных рядами Дирихле вида (1) при подходе к мнимой оси. Ранее эта задача изучалась в работах [1], [2] в случае мультипликативных коэффициентов. В основе исследований лежит, так называемый, метод редукции к степенным рядам, основные положения которого были разработаны в начале 80-х годов В. Н. Кузнецовым в работах [3], [4], [5]. Этот метод заключается в изучении взаимосвязи между аналитическими свойствами рядов Дирихле и граничными свойствами соответствующих (с теми же коэффициентами, что и у рядов Дирихле) степенных рядов. В данном случае этот метод позволил изучить поведение рядов Дирихле вида (1) при подходе к мнимой оси. Более того, он позволил указать последовательность полиномов Дирихле, сходящихся в критической полосе к функции, определённой рядом Дирихле вида (1). Нужно сказать, что метод редукции к степенным рядам неоднократно использовался авторами ранее при изучении поведения рядов Дирихле в критической полосе (см. [1], [2], [6], [7], [8]).

2. Поведение рядов Дирихле с ограниченной сумматорной функцией коэффициентов в критической полосе

Для рядов Дирихле вида (1) имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Ряд Дирихле вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2), (4), определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 0$ и ограниченную в области $0 < \sigma < 1$, $|t| \leq T$, $|s| \geq \delta$ константой, зависящей только от величин T и δ .*

Более того, существует последовательность полиномов Дирихле явного вида, равномерно сходящаяся к данной функции в любой замкнутой подобласти указанной выше области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известное интегральное представление

$$f(s) = s \int_1^\infty \frac{S(u)}{u^{s+1}} du$$

в силу условия (2) определяет функцию, заданную рядом Дирихле (1), регулярную в полуплоскости $\sigma > 0$.

Рассмотрим преобразование Меллина:

$$f(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx, \quad (5)$$

где $g(e^{-x}) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-nx}$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Запишем равенство (5) в виде

$$f(s)\Gamma(s) = \int_{\frac{1}{e^2}}^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int_0^{\frac{1}{e^2}} g(e^{-x})x^{s-1}dx. \quad (6)$$

Первый интеграл этого равенства абсолютно сходится при любом s . Действительно,

$$\left| \int_{\frac{1}{e^2}}^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx \right| \leq \int_{\frac{1}{e^2}}^\infty e^{-\frac{x}{2}} \left| \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-(n-\frac{1}{2})x} \right| x^{\sigma-1}dx < C. \quad (7)$$

Исследуем второй интеграл равенства (6).

$$\left| \int_0^{\frac{1}{e^2}} g(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| < \left| \int_0^{\frac{1}{e^2}} (g(e^{-x}) - \alpha_0) x^{s-1} dx \right| + \left| \int_0^{\frac{1}{e^2}} \alpha_0 x^{s-1} dx \right|. \quad (8)$$

В силу условия (4) имеем:

$$|g(e^x) - \alpha_0| \leq C \frac{1}{|\ln^k(1 - e^{-x})|} \leq C_1 \frac{1}{|\ln^k x|}.$$

Отсюда следует

$$\left| \int_0^{\frac{1}{e^2}} (g(e^{-x}) - \alpha_0) x^{s-1} dx \right| \leq C_2 \int_0^{\frac{1}{e^2}} \frac{1}{|\ln^k x|} x^{\sigma-1} dx.$$

Пусть k таково, что

$$\frac{1}{|\ln^k e^{-2}|} = \frac{1}{2^k} < \sigma.$$

Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{e^2}} \frac{1}{|\ln^k x|} x^{\sigma-1} dx \leq \frac{1}{2^k \sigma} \int_0^{\frac{1}{e^2}} x^{\sigma} = O(1),$$

где константа не зависит от σ .

Отсюда, с учётом того, что

$$\left| \int_0^{\frac{1}{e^2}} \alpha_0 x^{s-1} dx \right| = O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

где константа не зависит σ , в силу (8) получаем:

$$\left| \int_0^{\frac{1}{e^2}} \alpha_0 x^{s-1} dx \right| = O\left(\frac{1}{|s|}\right), \quad (9)$$

где константа также не зависит от σ .

Равенство (5) и оценки (6), (8) доказывают первую часть утверждения теоремы 1.

Построим последовательность полиномов Дирихле, сходящихся к функции $f(s)$, определённой рядом Дирихле (1), в критической полосе. Так как коэффициенты ряда Дирихле и, следовательно, степенного ряда (2) ограничены в совокупности, то согласно теореме 6.1 монографии [9] последовательность полиномов вида

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k r^k x^k, \quad 0 < r < 1,$$

сходится к функции $g(x)$ вида (2) на отрезке $[0, 1]$.

Пусть $Q_k(s)$ — последовательность полиномов Дирихле вида

$$Q_k(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k r^k}{k^s}.$$

Рассмотрим прямоугольник $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$, и покажем, что последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ сходится равномерно в прямоугольнике D_T к функции $f(s)$ вида (1). Действительно, имеет место оценка

$$\begin{aligned} |f(s) - Q_n(s)| &\leq \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left(\int_0^1 |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty e^{\lambda x} |\tilde{g}(e^{-x}) - \tilde{P}_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx \right) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{\sigma_0} + C\tilde{\varepsilon}_n, \end{aligned}$$

где $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $g(x) = x^\lambda \tilde{g}(x)$, $P_n(x) = x^\lambda \tilde{P}_n(x)$, $\tilde{\varepsilon}_n = \|\tilde{g}(e^{-x}) - \tilde{P}_n(e^{-x})\|$, и где константа C не зависит от σ_0 и n , а величины ε_n и $\tilde{\varepsilon}_n$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это завершает доказательство теоремы 1. $\square$

3. О поведении рядов Дирихле на границе сходимости

Представим полином Дирихле $Q_n(s)$ в следующем виде:

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int_{\frac{1}{e^2}}^\infty P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx + \int_0^{\frac{1}{e^2}} P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx \right].$$

Рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 1, позволяют говорить об ограниченности полиномов $Q_n(s)$ в области $0 < \sigma \leq 1, |t| \leq T, |s| \geq \delta$, где δ — любое положительное число, константой, не зависящей от n .

Отсюда получаем ограниченность $Q_n(s)$ в любой замкнутой области $0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T, |s| \leq \delta$. По теореме Монтеля [10], [11] существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n_k}(s)$, которая равномерно сходится в любой открытой подобласти к некоторой голоморфной функции $f_1(s)$. Но при $\sigma > \sigma_0$ последовательность полиномов $Q_n(s)$ сходится к функции $f(s)$. Таким образом, последовательность $Q_{n_k}(s)$ равномерно сходится в любой области $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T, |s| \geq \delta$ к функции $f(s)$.

Рассмотрим последовательность $\sigma_k \rightarrow 0$ и последовательность отрезков

$$I_k : \sigma = \sigma_k, 0 < \delta \leq t \leq T \text{ (или } T \leq t \leq \delta < 0).$$

Рассмотрим последовательность функций $f_k(s)$, являющихся ограничением полиномов $Q_{n_k}(s)$ на отрезках I_k . Последовательность $f_k(t)$ является равномерно ограниченной. Как следует из доказательства теоремы Монтеля [11], последовательность функций $f_k(t)$ является последовательностью равностепенно непрерывных функций. По теореме Арцела существует подпоследовательность $f_{n_m}(t)$, равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $f(t)$. Тогда соответствующая последовательность полиномов Дирихле $Q_{n_m}(s)$ сходится в области $0 < \sigma < 1, |t| < T, |s| > \delta$ к функции $f(s)$, а на отрезке $\sigma = 0, \delta \leq t \leq T$ (или $T \leq t \leq \delta$) к непрерывной функции $f(t)$. Таким образом, функция $f(s)$ голоморфна в области $0 < \sigma < 1, |t| < T, |s| > \delta$ и непрерывна на границе $\sigma = 0, 0 < \delta \leq t \leq T$ (или $T \leq t \leq \delta < 0$).

Тем самым, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *При условиях теоремы 1 функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле, является непрерывной в широком смысле на мнимой оси.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Непрерывность функции $f(s)$ в точке $s = 0$ следует из того, что полиномы Дирихле $Q_n(s)$ ограничены единой константой на отрезке $0 \leq \sigma \leq 1, t = 0$ и, следовательно, ограничены в прямоугольнике $0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T$.*

4. Заключение

Поведение рядов Дирихле на границе сходимости в случае мультипликативных коэффициентов изучалось в работах [1], [2]. Эти исследования были связаны с решением известной гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что всякий обобщенный характер $h(n)$, т.е. конечнозначный числовой характер, отличный от нуля на множестве простых чисел, сумматорная функция которого имеет вид

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = \alpha x + O(1),$$

является характером Дирихле. Эта гипотеза была поставлена Н. Г. Чудаковым в 1950 году (см. [12], [13]) и решена только в случае главных (т.е. $\alpha \neq 0$ в асимптотике для функции $S(x)$) обобщённых характеров.

В данной работе изучается поведение на границе сходимости рядов Дирихле, коэффициенты которых имеют ограниченную сумматорную функцию. Авторы выражают надежду, что эти исследования позволят получить условия на числовую последовательность a_n , при которых она будет периодической, начиная с некоторого номера, отличные от условий, полученных ранее другими авторами. Например, условия, полученные Сеге в случае конечнозначной последовательности, заключаются в наличии у степенного ряда $\sum_1^{\infty} a_n z^n$ точек регулярности на границе сходимости (см. [14]). Условия, полученные Даффином и Шеффером [15], в данном случае заключаются в ограниченности степенного ряда $\sum_1^{\infty} a_n z^n$ в некотором секторе единичного круга.

Представляет интерес получить условия почти периодичности числовой последовательности в случае ограниченной сумматорной функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L -функций Дирихле // Диссертация на соискание уч. степени к.ф.-м.н. — Ульяновск, 2014.
2. Матвеев В. А., Матвеева О. А. Обобщенные характеры числовых полей и аналог гипотезы Н. Г. Чудакова // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Информатика. Механика.» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2015, Т. 15, вып. 1. С. 36–45.
3. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т. 36, №6, С. 805–812.
4. Кузнецов В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 1, С. 13–23.
5. Кузнецов В. Н. О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами // Дифференциальные уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во СГУ, 1987, Т. 7, С. 8–16.
6. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L -функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, С. 80–84.

7. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2013, Т. 14, вып. 2, С. 117–121.
8. Кузнецов В. Н, Матвеева О. А. К задаче численного определения нетривиальных нулей L-функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2015, Т. 16, вып. 2, С. 144–155.
9. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс — М.: Наука, 1972, С. 368.
10. Титчмарш Е. Х. Теория функций. — М.: Наука, 1980, С. 467.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. — М.: Наука, 1968, С. 624.
12. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2, С. 133–136.
13. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщенном характере. — ДАН СССР, 1950, Т. 74, №4, С. 1137–1138.
14. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. — М.: Наука, 1967, С. 240.
15. Duffin R. J., Shaeffer A. C. Power series with bounded coefficients. // Amer. J. Math., 1945, 67, С. 141–154.

REFERENCES

1. Matveeva, O. A. 2014, "Analytical properties of some classes of Dirichlet series and some problems of the theory of Dirichlet L -functions Dissertation, Ul'ianovsk.
2. Matveev V. A. & Matveeva O. A., 2015, "Generic number field characters and an analog of Chudakov hypothesis" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, vol. 15, issue 1, pp. 36–45.
3. Kuznetsov V. N., 1984, "Analogue of the Szego theorem for a class of Dirichlet series" *Math. issues*, vol. 36, № 16, pp. 805–812.
4. Kuznetsov V. N., 1987, "On the analytic extension of a class of Dirichlet series" *Vychislitel'nye metody i programmirovaniie: Mezhdvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, vol. 1, pp. 13–23.
5. Kuznetsov V. N., 1987, "On the boundary properties of power series with finite-valued coefficients" *Differencial'nye uravnenija i teoriia funkciij: Mezhdvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, vol. 7, pp. 80–84.
6. Matveeva O. A., 2013, "Approximation polynomials and the behavior of the Dirichlet L -functions on the critical band" *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, vol. 13, issue 4, pp. 80–84.
7. Matveeva O. A., 2013, "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L -functions in the critical band " *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, vol. 14, issue 2, pp. 117–121.
8. Kuznetsov V. N. & Matveeva O. A., 2015, "On the problem of the numerical definition of non-trivial zeros of the numeric fields of the Dirichlet L -functions" *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, vol. 16, issue 2, pp. 144–155.

-
9. Demianov V. F & Malozemov, V. N., 1972, "Introduction to the minimax Nauka, Moscow, p. 368.
 10. Titchmarsh E. H., 1980, "Function theory" , "Nauka" , Moscow, p. 467.
 11. Markushevich, A. I., 1968, "Theory of analitical functions vol. 2, "Nauka" , Moscow, p. 624.
 12. Chudakov N. G. & Linnik U. V., 1950, On a class of completely multiplicative functions *DAN SSSR*, vol.74, issue 2, pp. 133–136.
 13. Chudakov N. G. & Rodosskij K., 1950, A. On a generalized character *DAN SSSR*, vol.74, issue 4, pp. 1137–1138.
 14. Bierberbach L., 1967, Analitical continuation. — "Nauka" , Moscow, p. 240.
 15. Duffin R. J. & Shaeffer A. C., 1945, Power series with bounded coefficients, *Amer. J. Math.*, 67, pp. 141–154.

Получено 15.02.2015 г.

Принято в печать 10.06.2016 г.