ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 2

УДК 519.4

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КЛАССОВ СМЕЖНОСТИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ КОКСТЕРА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ

О. В. Инченко (г. Тула)

Аннотация

В 1955–1956 гг. П. С. Новиковым была доказана неразрешимость основных алгоритмических проблем в классе конечно определенных групп. В связи с этим возникла задача изучения данных проблем в конкретных классах конечно определенных групп. Таким образом, научный интерес представляет собой класс конечно определенных групп Кокстера, введенный Х. С. М. Кокстером в 1934 г.

Класс конечно порожденных групп Кокстера с древесной структурой был выделен В. Н. Безверхним в 2003 г.

Пусть конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой задана копредставлением

$$G = \langle a_1, ...a_n; (a_i)^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j \in \overline{1, n}, i \neq j \rangle$$

где m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, причем, при $i \neq j$, $m_{ij} = m_{ji}$, $m_{ij} \geqslant 2$. Если $m_{ij} = \infty$, то между a_i и a_j соотношения нет. Группе G соответствует конечный связный дерево-граф Γ такой, что если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j, то ребру e соответствует соотношение вида $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$.

С другой стороны группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам некоторого ребра $\overline{e}$ графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ji} = \langle a_j, a_i; (a_j)^2, (a_i)^2, (a_j a_i)^{m_{ji}} \rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i, a_k; (a_i)^2, (a_k)^2, (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$ — циклическую подгруппу $\langle a_i; (a_i)^2 \rangle$.

Проблема пересечения классов смежности состоит в том, что необходимо выяснить существует ли алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G и любых слов $w_1, w_2 \in G$ установить пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \cap w_2 H_2$.

Ранее автором была доказана разрешимость данной проблемы для свободного произведения двух двупорожденных групп Кокстера с объединением.

В настоящей работе показана разрешимость проблемы пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой, представленной в виде древесного произведения n сомножителей, объединненых по циклическим подгруппам второго порядка.

При доказательстве использован метод специального множества и метод типов, введенный В. Н. Безверхним и использованный им при исследовании разрешимости различных алгоритмических проблем в свободных конструкциях групп.

Ключевые слова: группа Кокстера с древесной структурой, проблема пересечения классов смежности, свободное произведение групп с объединением, метод специального множества, метод типов.

Библиография: 17 названий.

ON PROBLEM OF INTERSECTION OF THE ADJACENCY CLASSES OF FINITELY GENERATED SUBGROUPS OF COXETER'S GROUP WITH TREE STRUCTURE

O. V. Inchenko (Tula)

Abstract

P. S. Novikov in 1955–1956 showed the unsolvability of the main algorithmic problems in class of finite defined groups. In this connection there was important task of consideration of these problems in specific classes of finite defined groups. Thus, class of finite defined groups of Coxeter represents scientific interest. The class of groups of Coxeter was defined by H. S. M. Coxeter in 1934.

The classe of finitely generated groups of Coxeter with tree structure was defined by V. N. Bezverkhnii in 2003.

Let finitely generated group of Coxeter with tree structure is defined by presentation

$$G = \langle a_1, ...a_n; (a_i)^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j \in \overline{1, n}, i \neq j\rangle$$

where m_{ij} — number which corresponds to a symmetric matrix of Coxeter. At that, if $i \neq j$, that $m_{ij} = m_{ji}$, $m_{ij} \geqslant 2$. If $m_{ij} = \infty$, that between a_i and a_j relation does not exist . The group matches finite coherent tree-graph Γ such that: if tops of some edge -e of graf Γ are elements a_i and a_j, that the edge e matches relation $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$.

On the other hand group G may be represented as wood product of the two-generated groups of Coxeter, which are united by final cyclic subgroups. In this case, we will pass from graf Γ of group G to graf $\overline{\Gamma}$ as follows: we associate tops of some edge $\overline{e}$ of graf $\overline{\Gamma}$ groups of Coxeter with two generating elements $G_{ji} = \langle a_j, a_i; (a_j)^2, (a_i)^2, (a_j a_i)^{m_{ji}}\rangle$ and $G_{ik} = \langle a_i, a_k; (a_i)^2, (a_k)^2, (a_i a_k)^{m_{ik}}\rangle$, and edge $\overline{e}$ — cyclic subgroup $\langle a_i; (a_i)^2\rangle$.

The problem of intersection of the adjacency classes of finitely generated subgroups is that you need to find an algorithm that will help determine empty or not intersection $w_1 H_1 \cap w_2 H_2$, where H_1 and H_2 any subgroup of group G and $w_1, w_2 \in G$.

Previously, the author proved the solvability of this problem for free product with association of two Coxeter's groups with two generating element.

In the article author shows solvability of a problem of intersection of the adjacency classes of finite number of finitely generated subgroups of Coxeter's group with tree structure. For this purpose group G was presented as wood product of n two-generated groups of Coxeter, which are united by finite cyclic subgroups.

To prove of this result, the author used the method of special sets and method of types. These methods were defined V. N. Bezverkhnii. He used these methods for research of various algorithmic problems in free constructions of groups.

Keywords: Coxeter's group with tree structure, problem of intersection of the adjacency classes, amalgamated free product, method of special sets, method of types.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде древесного произведения двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{n} *G_s;\ rel\, G_1, .., rel\, G_s;\ a_i = a_i' \right\rangle.$$

В этом случае группе Кокстера G соответствует дерево — граф T такой, что, если вершинам некоторого ребра e графа T соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ji} = \left\langle a_j,\, a_i;\, a_j^2,\, a_i^2,\, (a_j a_i)^{m_{ji}} \right\rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i,\, a_k;\, a_i^2,\, a_k^2,\, (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$, тогда ребру e соответствует циклическая подгруппа $\langle a_i;\, a_i^2 \rangle$ (Рис. 1).

В. Н. Безверхним в [3] был получен следующий результат:

Теорема 1 (3). *Пусть G древесное произведение групп*

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{n} *G_s;\, rel\, G_1, .., rel\, G_s;\, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \right\rangle.$$

объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G$ и $U_{ji} < G$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\varphi_{ij} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы проблемы:

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;*
3. *существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,*

то в группе G разрешима проблема вхождения.

Очевидно, что конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде древесного произведения с объединением по конечным циклическим подгруппам, удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом,

Следствие 1. *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой G разрешима проблема вхождения.*

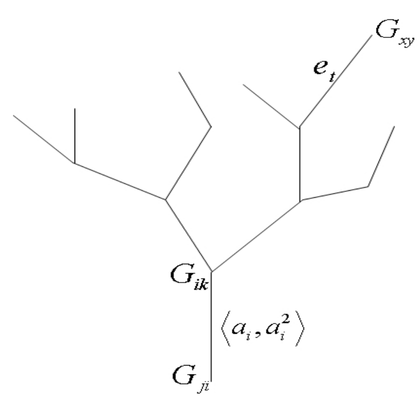

Рис. 1 Дерево-граф группы G

Теорема 2 (6). *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой G разрешима проблема пересечения подгрупп и существует алгоритм выписывающий образующие этого пересечения.*

Будем говорить, что в группе G разрешима *проблема пересечения классов смежности* конечно порожденных подгрупп, если для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G и любых слов $w_1, w_2 \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \bigcap w_2 H_2$.

Рассмотрим свободное произведение $\bar{G}$ двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ji} = \left\langle a_j,\, a_i;\, a_j^2,\, a_i^2,\, (a_j a_i)^{m_{ji}} \right\rangle \text{ и } G_{ik} = \left\langle a_i,\, a_k;\, a_i^2,\, a_k^2,\, (a_i a_k)^{m_{ik}} \right\rangle$$

объединенных по циклической подгруппе $\left\langle a_i;\, a_i^2 \right\rangle$: $\bar{G} = G_{ji} \underset{\left\langle a_i; a_i^2 \right\rangle}{*} G_{ik}$.

В [7] показано, что в группе $\bar{G}$ разрешима проблема пересечения классов смежности двух конечно порожденных подгрупп.

Теорема 3 (9). *В группе $\bar{G}$ разрешима проблема пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп.*

Обобщим результат, полученный для группы $\bar{G}$ на всю группу G.

Для этого представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде свободного произведения двух сомножителей, объединенных по конечной циклической подгруппе следующим образом: Рассмотрим древесное произведение $k-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф T_{k-1}, $T_{k-1} \subset T$. Группу, соответствующую графу T_{k-1} обозначим через G_{k-1}. Пусть k-ый сомножитель-подгруппа G_{xy} соответствует вершине дерева-графа T (Рис. 1.), которая связана с графом T_{k-1} ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа второго порядка $\left\langle a_x;\, a_x^2 \right\rangle$. Так группа G представлена как свободное произведение двух подгрупп — G_{k-1} и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\left\langle a_x;\, a_x^2 \right\rangle$, то есть $G = G_{k-1} \underset{\langle a_x; a_x^2 \rangle}{*} G_{xy}$.

Таким образом, для доказательства разрешимости проблемы пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп в группе G можем применять рассуждения аналогичные рассуждениям, использованным при получении разрешимости данной проблемы в группе $\bar{G}$.

Предположим, что в группе G_{k-1} разрешима проблема пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп. Покажем, что данная проблема разрешима в группе G

2. Необходимые утверждения

Слово из группы G можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g} l_{2g} .. l_{ng} K_g r_{ng} .. r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы G_{k-1} по $\left\langle a_x;\, a_x^2 \right\rangle$ и G_{xy} по $\left\langle a'_x;\, (a'_x)^2 \right\rangle$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы G. K_g — ядро слова g.

Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G, а K_g — другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 1. *Если в (1) $l_{1g} l_{2g} .. l_{ng} = (r_{ng} .. r_{1g})^{-1}$, то слово*

$$g = r_{1g}^{-1} .. r_{ng}^{-1} K_g r_{ng} .. r_{1g} \tag{2}$$

называется трансформой.

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы G. В этом случае слоговая длина слова

$$g = l_{1g} l_{2g} .. l_{ng} h_g r_{ng} .. r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$.

Слово вида (1) будем называть *нетрансформой* нечетной длины, вида (3) нетрансформой четной длины.

Определение 2. *Подслово $l_{1g} l_{2g} .. l_{ng} (r_{ng} .. r_{1g})$ называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово $l_{1g} l_{2g} .. l_{ng} K_g (K_g r_{ng} .. r_{1g})$ — закрытым начальным (конечным) отрезком.*

Определение 3. *Левая (правая) половина слова $w_i = l_{1w_i} l_{2w_i} .. l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} .. r_{1w_i}$ называется изолированной в множестве $\{w_j\}$, $j \in \overline{1,N}$, если ни у одного из слов w_j^{ε}, $\varepsilon = \pm 1$ множества $(\{w_j\} \setminus w_i) \cup \left(\left\{ w_j^{-1} \right\} \setminus w_i^{-1} \right)$ нельзя выделить $l_{1w_i} l_{2w_i} .. l_{mw_i}$ $(r_{mw_i} .. r_{1w_i})$ в качестве начального (конечного) подслова, то есть $w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i} l_{2w_i} .. l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^{\varepsilon}$ $(w_j^{\varepsilon} \neq w_{j1}^{\varepsilon} r_{m+1w_j} r_{mw_i} .. r_{1w_i})$.*

Определение 4. *Конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ группы G назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Левая половина нетрансформы из множества W изолирована в нем. Если нетрансформа четной длины, то изолирована и левая и правая половины;*

2. *Длину нетрансформы w_{ic} нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $(\{w_i\} \setminus w_{ic})$. Длину произвольного элемента нельзя уменьшить, умножая на слово w длины меньше $L(w_{ic})$, принадлежащее подгруппе $\left\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \right\rangle$;*

3. *Пусть $w_{i0}^{\varepsilon} = l_{1w_0} l_{2w_0} .. l_{nw_0} K_{w_0} r_{nw_0} .. r_{j+1w_0} r_{jw_0} .. r_{1w_0}$, $\varepsilon = \pm 1$, $j < n$ — нетрансформа из множества $\{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ и*

$$\left\{ w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = l_{1w_{\alpha_i}} l_{2w_{\alpha_i}} .. l_{nw_{\alpha_i}} K_{w_{\alpha_i}} r_{nw_{\alpha_i}} .. r_{jw_0} .. r_{1w_0} \right\}_{i = \overline{1,k}},$$

   $\varepsilon_i = \pm 1$ подмножество нетрансформ из множества $(\{w_i\} \setminus w_{i0}) \cup \left(\left\{ w_i^{-1} \right\} \setminus w_{i0}^{-1} \right)$, правые половины которых оканчиваются подсловом $r_{jw_0} .. r_{1w_0}$, тогда если подгруппа $\left\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \right\rangle \cap r_{1w_0}^{-1} .. r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} .. r_{1w_0} = B$, где

$$D = \begin{cases} G_{k-1}, & \text{если } r_{j+1w_0} \in G_{k-1}; \\ G_{xy}, & \text{если } r_{j+1w_0} \in G_{xy}. \end{cases}$$

   не единична, то $L(w_{io} u) \geqslant L(w_{io})$, где $u \in B$, $L(w_{io} u w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}) \geqslant L(w_{io})$;

4. *Пусть $w_i = l_{1w_i} .. l_{sw_i} l_{s+1w_i} .. l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} .. r_{s+1w_i} r_{sw_i} .. r_{1w_i}$ и*

$$w_j = l_{1w_j} .. l_{sw_j} l_{s+1w_j} .. l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_i} .. r_{s+1w_j} r_{sw_j} .. r_{1w_j}$$

   слова из $\{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ не обязательно различны, $m \leqslant n$, $s \leqslant m$, тогда не существует слова $g \neq 1$ длины меньше $2s$ из подгруппы $\left\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \right\rangle$ такого, что если $l_{1w_i} .. l_{sw_i} \neq l_{1w_j} .. l_{sw_j}$, то

$$g w_i = l_{1w_j} .. l_{sw_j} l'_{s+1w_i} .. l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} .. r_{s+1w_i} r_{sw_i} .. r_{1w_i},$$

   либо если $r_{sw_i} .. r_{1w_i} \neq r_{sw_j} .. r_{1w_j}$,то

$$w_i g = l_{1w_i}..l_{sw_i} l_{s+1w_i}..l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i}..r'_{s+1w_i} r_{sw_j}..r_{1w_j},$$

либо если $r^{-1}_{1w_i}..r^{-1}_{sw_i} \neq l_{1w_j}..l_{sw_j}$, *то*

$$g w_i^{-1} = l_{1w_j}..l_{sw_j} \left(r'_{s+1w_i}\right)^{-1}..\left(r'_{nw_i}\right)^{-1}\left(K'_{w_i}\right)^{-1} l^{-1}_{nw_i}..l^{-1}_{1w_i},$$

либо если $l^{-1}_{sw_i}..l^{-1}_{1w_i} \neq r_{sw_j}..r_{1w_j}$, *то*

$$w_i^{-1} g = r^{-1}_{1w_i}..r^{-1}_{nw_i}\left(K'_{w_i}\right)^{-1}\left(l'_{nw_i}\right)^{-1}..\left(l'_{s+1,w_i}\right)^{-1} r_{sw_j}.r_{1w_j}.$$

Лемма 1 (1). *Пусть группа*

$$G^* = \left\langle G, t; relG, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\right\rangle.$$

есть HNN-расширение группы G с помощью ассоциированных подгрупп U_1 и $U_{-1} = \varphi(U_1)$ и фиксированного конструктивного изоморфизма φ. Если подгруппы U_1 и U_{-1} обладают условием максимальности и в группе G разрешимы проблемы:

1. *проблема вхождения;*
2. *существует алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ и любого элемента $w \in G$ установить, пусто или нет пересечение $wH \bigcap U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$;*
3. *существует алгоритм, выписывающий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ и подгруппы U_ε, $\varepsilon = \pm 1$, образующие их пересечения,*

то существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов из G^* в специальное.

Теорема 4 (Миллер–Шупп). *Группа $\widetilde{G} = \langle G_1 * G_2, U_1 = \varphi(U_1)\rangle$, являющаяся свободным произведением групп G_1 и G_2 с объединением по изоморфным подгруппам U_1 и U_{-1} с помощью фиксированного изоморфизма φ: $\varphi(U_1) = U_{-1}$, изоморфно вложима в группу $G^* = \left\langle G_1 * G_2, t;\ relG_1,\ relG_2, t^{-1}U_1 t = \varphi(U_1)\right\rangle$.*

По теореме 4 группа $G = G_{k-1} \underset{\langle a_x | a_x^2\rangle}{*} G_{xy}$ изоморфно вложима в группу

$$G^* = \left\langle G_{k-1} * G_{xy}, t; relG_{k-1}, relG_{xy}, t^{-1}a_x t = \varphi(a_x)\right\rangle,$$

которая удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда справедливо

Следствие 2. *Всякое конечное множество слов $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ группы $G = G_{k-1} \underset{\langle a_x | a_x^2\rangle}{*} G_{xy}$ можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.*

Пусть W — специальное множество слов. Разобьем его на подмножества следующим образом: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножествам M_i трансформы с одинаковыми крыльями, принадлежащие одной подгруппе, сопряженной некоторой группе G_{k-1} или G_{xy}. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу (M_i), $i = \overline{0,k}$, имеющую вид: $(M_i) = r^{-1}_{1i}..r^{-1}_{ni} C_i r_{ni}..r_{1i}$. Здесь C_i — подгруппы из G_{k-1} или G_{xy}, порожденные ядрами трансформ. Упорядочим подгруппы (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_k). \tag{4}$$

Лемма 2 (1). *Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$\left(M_1'\right) \leqslant \left(M_2'\right) \leqslant ... \leqslant \left(M_k'\right), \tag{4'}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp\left(\left(M_0\right), \left(M_1\right), ..., \left(M_k\right)\right) = gp\left(\left(M_0'\right), \left(M_1'\right), ..., \left(M_k'\right)\right)$;
2. *Если подгруппе* $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}C_j'r_{nx}..r_{1x}$, $1 \leqslant j \leqslant k'$ *принадлежит трансформа* $u = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}hr_{nx}..r_{1x}$, *где* h *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда* $(4')$ *имеется подгруппа* $(M_l') = r_{1x}^{-1}..r_{n-1,x}^{-1}C_l'r_{n-1,x}..r_{1x}$ *содержащая* u;
3. *Если для некоторой трансформы* $u = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}..r_{1x}$, *принадлежащей подгруппе* $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}C_j'r_{nx}..r_{1x}$, *и нетрансформы* $y = l_{1y}^{-1}..l_{n_1y}^{-1}K_yl_{n_1y}..l_{1y}$ *из* M_0, $n_1 \geqslant n$, *(левая половина* y *изолирована) выполняется соотношение* $L(y^{-1}uy) \leqslant L(y)$, *то существует подгруппа* (M_s') *ряда* $(4')$, *содержащая трансформу* $y^{-1}\left(r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}..r_{1x}\right)y$, *а если* $L(yuy^{-1}) < L(y)$, *то существует подгруппа* (M_s') *ряда* $(4')$, *содержащая трансформу* $y\left(r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}..r_{1x}\right)y^{-1}$;
4. *Если* $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}C_j'r_{n_1x}..r_{1x}$, $(M_s') = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}..r_{n_2y}^{-1}C_s'r_{n_2y}..r_{1x}$ — *подгруппы ряда* $(4')$, $n_2 > n_1$, *и подгруппа* $\left(M_j'\right)$ *содержит трансформу* $u = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}..r_{1x}$, *либо* $u' = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}..r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда* $(4')$ $(M_k') = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}C_k'r_{n_1+1,y}..r_{1x}$, *содержащая в первом случае трансформу* u, *во втором -* u';
5. *Если* $(M_s') = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}C_s'r_{n_1x}..r_{1x}$ *подгруппа из ряда* $(4')$ *и*
$$y^{\varepsilon} = l_{1y}^{-1}..l_{n_2y}^{-1}Kr_{n_2y}..r_{n_1+1,y}r_{n_1x}..r_{1x},$$
$\varepsilon = \pm 1$ — *элемент специального множества, причем подслово*
$$r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}$$
не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы w^{ε}, $\varepsilon = \pm 1$ *и если подгруппа* (M_s') *содержит трансформу* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}..r_{1x}$ *либо трансформу* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}..r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда* $(4')$
$$\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}C_j'r_{n_1+1,y}..r_{1x},$$
содержащая эту трансформу.

Лемма 3 (4). *Подгруппа* (M_0), *порожденная нетрансформами специального множества — свободна и не содержит трансформ.*

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ обозначим через $gp\left(M_0, S\right)$. Она представляет собой HNN-группу с основой S, являющуюся древесным произведением, правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы (M_0) и $\left(M_j'\right)$, $j = \overline{1,k}$ ряда $(4')$ будем называть порождающими подгруппами $\langle w_1, .., w_n\rangle = gp\left(M_0, S\right)$.

Определение 5. *Произведение* $u_1..u_k$ *назовем словом подгруппы* $\langle w_1, .., w_n\rangle = gp\left(M_0, S\right)$ *группы* $G = G_{k-1} \underset{\langle a_x; a_x^2\rangle}{*} G_{xy}$, *если*

1. $u_i \neq 1$;
2. $u_i \in \left\{M_0 \cup M_0^{-1}\right\}$ *либо* u_i *принадлежат некоторой подгруппе из ряда* $(4')$;
3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$;
4. u_i *и* u_{i+1} *не содержатся в одной подгруппе ряда* $(4')$;
5. *в* $u_1..u_k$ *нет произведения* $u_i u_{i+1} u_{i+2}$ $(i = \overline{1, k-2})$, *где* $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \left\{M_0 \cup M_0^{-1}\right\}$, $u_{i+1} \in \left(M_j'\right)$ *и* $u_i u_{i+1} u_{i+2} \notin (M_s')$; $\left(M_j'\right)$, (M_s') — *из ряда* $(4')$.

Лемма 4 (4). *Всякое произведение* $w_{i1}^{\varepsilon_1} w_{i2}^{\varepsilon_2} .. w_{in}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, *где* w_{ij} *- образующие подгруппы* $\left\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \right\rangle$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i1}..u_{ik}$, $k \leqslant n$, *подгруппы* $gp\,(M_0, S) = \left\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \right\rangle$.

Определение 6. *Будем говорить, что между словами* v_1 *и* v_2 *имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения* $v_1 v_2$ *соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин* $L(v_1)$, $L(v_2)$.

Определение 7. *Слово* $u_1..u_k$ *является простым, если*

$$L(u_1..u_k) = \max\left\{L(u_1), .., L(u_k)\right\}.$$

Лемма 5 (4). *Если* $u_1..u_k$ *- слово подгруппы* $gp\,(M_0, S)$, *то* $L(u_1..u_k) \geqslant L(u_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Следствие 3 (4). *Если в слове* $u_1..u_k$ *выполнить сокращения в группе* G, *то в нем сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину* u_1.

Следствие 4 (4). *Всякое слово подгруппы* $gp\,(M_0, S)$ *может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Лемма 6 (4). *Пусть* $\{w_i\}_{i \in \overline{1,N}}$ — *специальное множество слов группы* G *и* $N = \left\langle \{w_i\}_{i \in \overline{1,N}} \right\rangle$ — *подгруппа в* G. *И пусть* $w_i^{\varepsilon} = l_{1w_i} ... l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} ... r_{1w_i}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — *элемент специального множества,* $v = l_{1w_i} .. l_{tw_i}$, $1 \leqslant t \leqslant n$ *- начальное подслово левой половины* w_i^{ε}, *причем,* v *не является изолированной левой половиной* w_i^{ε}. *Тогда, если* $A_{iv} = N \cap l_{1w_i} ... l_{tw_i} A_j l_{tw_i}^{-1} ... l_{1w_i}^{-1} \neq E$, *где*

$$A_j = \begin{cases} G_{k-1}, \text{если } l_{tw_i} \in G_{xy}; \\ G_{xy}, \text{если } l_{tw_i} \in G_{k-1}, \end{cases}$$

то ряд $(4')$ *содержит подгруппу* $(M_s) = A_{iv}$.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы G порождена двумя различными специальными множествами, то есть $H = gp\,(M_0, S)$ и $H = gp\,(M_0', S')$, где основа S порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant ... \leqslant (M_k)\,, \tag{5}$$

а S' порождена подгруппами ряда

$$\left(M_1'\right) \leqslant \left(M_2'\right) \leqslant ... \leqslant \left(M_k'\right) \tag{4'}$$

$(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$, $C_i \in G_{k-1}$ или $C_i \in G_{xy}$; $\left(M_j'\right) = g_j^{-1} C_j' g_j$, $C_j' \in G_{k-1}$ или $C_j' \in G_{xy}$.

В [4] показано, что простое слово $u_1..u_k$ подгруппы $gp\,(M_0, S)$ может быть одного из следующих видов:

a) слово $u_1..u_k$ содержит нетрансформу максимальной длины, то есть $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+1 \leqslant j \leqslant k$, u_i — нетрансформа;

b) слово $u_1..u_k$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины, то есть $L(u_i) = L(u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+2 \leqslant j \leqslant k$;

c) слово $u_1..u_k$ содержит нетрансформы u_i и u_{i+2}, и трансформу u_{i+1} со свойствами: $L(u_i) = L(u_{i+2})$, $L(u_i) = L(u_i u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1} u_{i+2})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+3 \leqslant j \leqslant k$, причем длина слова u_{i+1} может оказаться меньше длины u_i, $0 \leqslant L(u_{i+1}) \leqslant L(u_i)$;

d) слово $u_1..u_k$ содержит трансформу u_i максимальной длины.

Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы G порождена специальным множеством, то есть $H = gp\,(M_0, S)$. Каждый элемент $g \neq 1$ из H имеет несократимую запись в w-символах: $g = w_{i1}^{\varepsilon_1} w_{i2}^{\varepsilon_2}..w_{is}^{\varepsilon_s}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Перемножая рядом стоящие трансформы одного типа, получим запись слова g в u — символах: $g = u_1..u_l$, где $u_i \neq 1$, $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Проведем в слове $g = u_1..u_l$ все сокращения в группе G, получим слоговую запись этого элемента: $g = g_1 g_2..g_k$, $k \geqslant 1$.

Лемма 7 (8). *Каждый слог g_i слова $g = g_1 g_2..g_k$ имеет вид:*

$$g_i = a_x x_i y_i z_i a'_x, \tag{6}$$

$i = \overline{1,k}$, где x_i — центральный или правый слог u_{j-1}, y_i центральный слог $u_j \in M_{v,j}$, $j = \overline{1,n}$, z_i — левый или центральный слог u_{j+1}, a_x и a'_x — элементы из объединяемой подгруппы.

Рассмотрим конечное множество конечно порожденных подгрупп $H_1, H_2, .., H_n$ группы G. Необходимо установить пусто или нет пересечение

$$w_1 H_1 \cap w_2 H_2 \cap ... \cap w_n H_n,$$

где $w_1, w_2, .., w_n \in G$. В общем случае $w_j \notin H_j$, $j \in \overline{1,n}$. Рассмотрим эквивалентную задачу о пересечении:

$$w_n^{-1} w_1 H_1 \cap w_n^{-1} w_2 H_2 \cap ... \cap H_n. \tag{7}$$

Обозначим $w_n^{-1} w_j = y_j$.

Если пересечение (7) не пусто, то найдутся такие $h_j \in H_j$, $j = \overline{1,n}$, что

$$y_1 h_1 = y_2 h_2 = .. = h_n.$$

Перепишем слова h_j в u — символах соответствующей подгруппы:

$$\begin{aligned} & v = y_1 u^{(1)}(1) u^{(1)}(2)..u^{(1)}(r_1) = \\ & = y_2 u^{(2)}(1) u^{(2)}(2)..u^{(2)}(r_2) = \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = y_{n-1} u^{(n-1)}(1) u^{(n-1)}(2)..u^{(n-1)}(r_{n-1}) = \\ & = u^{(n)}(1) u^{(n)}(2)..u^{(n)}(r_n) = \\ & = w_0 q(1)\ q(2)..\,q(r). \end{aligned} \tag{8}$$

Последняя строчка равенства (8) дает несократимую запись слова v в группе G. w_0 — начальное подслово слова v.

Будем называть $\left(v^{(j)}\right)^{-1} \alpha_i^{(j)} v^{(j)}$ типом трансформ, порождающей подгруппы

$$\left(M_i^{(j)}\right) = \left(v^{(j)}\right)^{-1} A_i^{(j)} v^{(j)}$$

подгруппы H_j, $\alpha_i^{(j)} \notin G$ и обозначать его $(v^{(j)}, i)$. Символом $L((v^{(j)}, i)) = 2L(v^{(j)})+1$ будем обозначать длину типа $(v^{(j)}, i)$, а символом $T^{(j)}$ множество всех типов трансформ подгруппы H_j. Пополним $T^{(j)}$ символом $\beta^{(j)} \notin G$, получим множество $\tilde{T}^{(j)}$. Обозначим через $R^{(j)}$ множество $M_0^{(j)} \cup \left(M_0^{(j)}\right)^{-1} \cup \tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$, соответствующее подгруппе H_j. Присоединим к множеству $R^{(j)}$ символ $\gamma^{(j)} \notin G$, получим $\tilde{R}^{(j)}$. Соотношения (8) определяют следующее отображение:

$$\begin{aligned}\varphi_v(1,2,..,r) = &\left(Z^+ \times \left(R^{(1)} \times Z^+\right) \times T^{(1)} \times \left(R^{(1)} \times Z^+\right) \times Z^+\right) \times \\ &\times \left(Z^+ \times \left(R^{(2)} \times Z^+\right) \times T^{(2)} \times \left(R^{(2)} \times Z^+\right) \times Z^+\right) \times .. \\ &.. \times \left(Z^+ \times \left(R^{(n)} \times Z^+\right) \times T^{(n)} \times \left(R^{(n)} \times Z^+\right) \times Z^+\right)\end{aligned} \tag{9}$$

где $Z^+ = \{0, 1, 2, ..\}$.

По лемме 7 каждый слог из последней строчки равенства (8) образован элементами трех соседних символов, то есть

$$q(k) = a_x x_k^{(1)} y_k^{(1)} z_k^{(1)} a'_x = a_x x_k^{(2)} y_k^{(2)} z_k^{(2)} a'_x = .. = a_x x_k^{(n)} y_k^{(n)} z_k^{(n)} a'_x.$$

Здесь a_x — элемент из объединяемой подгруппы $\langle a_x; a_x^2 \rangle$.

Тогда отображение (9) определяет функцию:

$$\begin{aligned}\varphi_v(k) = &\left(p_0^{(1)}(k), \left(r_1^{(1)}(k), p_1^{(1)}(k)\right), \tau^{(1)}(k), \left(r_2^{(1)}(k), p_2^{(1)}(k)\right), {p'_0}^{(1)}(k)\right), \\ &\left(p_0^{(2)}(k), \left(r_1^{(2)}(k), p_1^{(2)}(k)\right), \tau^{(2)}(k), \left(r_2^{(2)}(k), p_2^{(2)}(k)\right), {p'_0}^{(2)}(k)\right), .. \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\left(p_0^{(n)}(k), \left(r_1^{(n)}(k), p_1^{(n)}(k)\right), \tau^{(n)}(k), \left(r_2^{(n)}(k), p_2^{(n)}(k)\right), {p'_0}^{(n)}(k)\right),\end{aligned}$$

где номер k соответствует слогу $q(k) = a_x x_k^{(j)} y_k^{(j)} z_k^{(j)} a'_x$ слова v, $p_0^{(j)}(k)$ — номер элемента a_x в ассоциированной подгруппе $\langle a_x;\, a_x^2 \rangle$, то есть принимает значения 0 или 1; аналогично ${p'_0}^{(j)}(k)$ принимает значения 0 или 1;
$r_1^{(j)}(k) = \gamma_k^{(j)}$, $p_1^{(j)}(k) = 0$, если $x_k^{(j)} = 1$, то есть $x_k^{(j)}$ не принимает участия в образовании слога $q(k)$;
$r_1^{(j)}(k) = w_1^{(j)}(k) \in \tilde{R}^{(j)} \backslash \left\{\gamma^{(j)}\right\}$, если $x_k^{(j)} \neq 1$ и $x_k^{(j)}$ — есть $p_1^{(j)}(k)$-ый слог $w_1^{(j)}(k)$;
$\tau^{(j)}(k) = \beta^{(j)}$, если $y_k^{(j)} = 1$;
$\tau^{(j)}(k) = \left(v^{(j)}, i\right)$, если $y_k^{(j)}$ — слог трансформы типа $\left(v^{(j)}, i\right)$;
$r_2^{(j)}(k) = \gamma^{(j)}$, если $z_k^{(j)} = 1$;
$r_2^{(j)}(k) = w_2^{(j)}(k) \in \tilde{R}^{(j)} \backslash \left\{\gamma^{(j)}\right\}$, если $z_k^{(j)} \neq 1$ и $z_k^{(j)}$ — есть $p_2^{(j)}(k)$-ый слог слова $w_2^{(j)}(k)$.

Определение 8. *$\varphi_v(k)$ назовем типом слога $q(k)$ в слове v.*

Мощность множества всех типов не превосходит числа

$$A = 4 \prod_{j=1}^{n} \left(2 \sum_{w^{(j)} \in W^{(j)}} L(w^{(j)}) + 1\right)^2 \left(\left|\tilde{T}^{(j)}\right|\right), \tag{10}$$

где $\left|\tilde{T}^{(j)}\right|$ — мощность множества $\tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$; Множитель 4 впереди — есть порядок ассоциированной подгруппы в квадрате.

Лемма 8. *Если $L(v) > A$, где v — слово из (8) и $v \in H_n$, $v \neq 1$, то существует слово $v' \in H_n$, $L(v') < L(v)$, удовлетворяющее равенствам (8).*

Доказательство. Пусть v — слово из (8) и $v \in H_n$, тогда

$$\begin{aligned}
&v = y_1 u^{(1)}(1)u^{(1)}(2)..u^{(1)}(r_1) = \\
&= y_2 u^{(2)}(1)u^{(2)}(2)..u^{(2)}(r_2) = \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= y_{n-1} u^{(n-1)}(1)u^{(n-1)}(2)..u^{(n-1)}(r_{n-1}) = \\
&= u^{(n)}(1)u^{(n)}(2)..u^{(n)}(r_n) = \\
&= w_0 q(1)\ q(2)..\, q(r+1),
\end{aligned}$$

где $u^{(i)}(1)u^{(i)}(2)..u^{(i)}(r_i)$ слово в H_i. Так как $r+1 > A$, то существуют индексы k и k' такие, что $1 \leq k < k' \leq r+1$ и $\varphi_v(k) = \varphi_v(k')$. Тогда в слове v соответствующие этим индексам слоги

$$q(k) = a_x x_k^{(i)} y_k^{(i)} z_k^{(i)} a'_x \text{ и } q(k') = \widetilde{a}_x x_{k'}^{(i)} y_{k'}^{(i)} z_{k'}^{(i)} \widetilde{a'}_x$$

где $x_k^{(i)}, y_k^{(i)}, z_k^{(i)}$ и $x_{k'}^{(i)}, y_{k'}^{(i)}, z_{k'}^{(i)}$ являются слогами u -символов

$$\begin{gathered}
u^{(i)}(j^{(i)}-1) = u_{left}^{(i)}(j^{(i)}-1) x_k^{(i)} u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1) \\
u^{(i)}(j^{(i)}) = (u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1))^{-1} y_k^{(i)} u_{right}^{(i)}(j^{(i)}) \\
u^{(i)}(j^{(i)}+1) = (u_{right}^{(i)}(j^{(i)}))^{-1} z_k^{(i)} u_{right}^{(i)}(j^{(i)}+1)
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
u^{(i)}(j'^{(i)}-1) = u_{left}^{(i)}(j'^{(i)}-1) x_{k'}^{(i)} u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}-1) \\
u^{(i)}(j'^{(i)}) = (u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}-1))^{-1} y_{k'}^{(i)} u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}) \\
u^{(i)}(j'^{(i)}+1) = (u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}))^{-1} z_{k'}^{(i)} u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}+1)
\end{gathered}$$

в слове

$$\begin{gathered}
u^{(i)}(1)u^{(i)}(2)\ ..\ u^{(i)}(j^{(i)}-1)u^{(i)}(j^{(i)})u^{(i)}(j^{(i)}+1)\ .. \\
..\ u^{(i)}(j'^{(i)}-1)u^{(i)}(j'^{(i)})u^{(i)}(j'^{(i)}+1)\ ..\ u^{(i)}(r_i)
\end{gathered}$$

Так как $\varphi_v(k) = \varphi_v(k')$, то

$$\begin{gathered}
a_x = \widetilde{a}_x,\ a'_x = \widetilde{a'}_x, \\
x_k^{(i)} = x_{k'}^{(i)},\ \ z_k^{(i)} = z_{k'}^{(i)} \\
u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1) = u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}-1) \\
\text{и} \\
u_{right}^{(i)}(j^{(i)}+1) = u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}+1).
\end{gathered}$$

Вырежем из слова

$$\begin{gathered}
u^{(i)}(1)u^{(i)}(2)\ ..\ u_{left}^{(i)}(j^{(i)}-1) x_k^{(i)} u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1)(u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1))^{-1} y_k^{(i)} z_k^{(i)} u_{right}^{(i)}(j^{(i)}+1)\ .. \\
..\ u_{left}^{(i)}(j'^{(i)}-1) x_{k'}^{(i)} y_{k'}^{(i)} z_{k'}^{(i)} u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}+1)\ ..\ u^{(i)}(r_i)
\end{gathered}$$

подслово

$$u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1)(u_{right}^{(i)}(j^{(i)}-1))^{-1} y_k^{(i)} z_k^{(i)} u_{right}^{(i)}(j^{(i)}+1)\ ..\ u_{left}^{(i)}(j'^{(i)}-1) x_{k'}^{(i)}.$$

Получим слово

$$v' = u^{(i)}(1)u^{(i)}(2)\ ..\ u_{left}^{(i)}(j^{(i)}-1) x_k^{(i)} y_{k'}^{(i)} z_{k'}^{(i)} u_{right}^{(i)}(j'^{(i)}+1)\ ..\ u^{(i)}(r_i),$$

принадлежащее пересечению и $L(v') < L(v)$.

Лемма доказана. □

3. Основная теорема

Теорема 5. *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой G разрешима проблема пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп.*

Доказательство. Пусть H_j, $j = \overline{1,n}$ — конечно порожденные подгруппы группы G. Будем считать, что образующие групп H_j образуют специальное множество и $H_j = gp(M_0^{(j)}, S^{(j)})$, где $M_0^{(j)}$ — множество всех нетрансформ из специального множества образующих подгруппы H_j, $S^{(j)}$ — основа H_j, порожденная подгруппами вида $M_1^{(j)} = (v_i^{(j)})^{-1} A_k^{(j)} v_i^{(j)}$, $i = \overline{1, k^{(j)}}$.

На множестве u-символов подгруппы H_j зададим отображение $\Phi^{(j)}(u)$ следующим образом:

$$\Phi^{(j)}(u) = \begin{cases} u, \text{ если } u \in M_0^{(j)}; \\ \left(v_k^{(j)}\right)^{-1} \alpha_k^{(j)} v_k^{(j)}, \text{ если } u \in \left(M_k^{(j)}\right) = \left(v_k^{(j)}\right)^{-1} A_k^{(j)} v_k^{(j)}. \end{cases}$$

Символы $\alpha_k^{(j)}$, $1 \leqslant k \leqslant k^{(j)}$ не принадлежат группе G.

Распространим отображение на подгруппы H_j (на произведения u-символов) следующим образом. Пусть $w^{(j)} = u^{(j)}(1)u^{(j)}(2)..u^{(j)}(m^{(j)})$ — слово подгруппы H_j, записанное в u-символах. Тогда

$$\Phi^{(j)}(w^{(j)}) = \Phi^{(j)}(u^{(j)}(1))\Phi^{(j)}(u^{(j)}(2))..\Phi^{(j)}(u^{(j)}(m^{(j)})).$$

Назовем образ $w^{(j)}$ при отображении $\Phi^{(j)}$ символическим словом. Если в слове $w^{(j)}$ i-ый слог имеет вид $q(i) = a_x^{(j)} x_i^{(j)} y_i^{(j)} z_i^{(j)} {a'_x}^{(j)}$, где $y_i^{(j)}$ — центральный слог некоторой трансформы $u^{(j)}(s^{(j)})$ из $\left(M_{p^{(j)}}^{(j)}\right)$ ($x_i^{(j)}$, $z_i^{(j)}$ могут отсутствовать, в этом случае полагаем их равными единице), то в образе $\Phi^{(j)}(w^{(j)})$ данный слог будет иметь вид $x^{(j)}\alpha_{p^{(j)}}^{(j)} z^{(j)}$, при этом данное произведение будем считать слогом в $\Phi^{(j)}(w^{(j)})$. Таким образом, под слоговой длиной $\Phi^{(j)}(w^{(j)})$ будем подразумевать слоговую длину $w^{(j)}$.

По лемме 8

$$L(u^{(n)}(1)u^{(n)}(2)..u^{(n)}(r_n)) \leq A + L(w_0),$$

где $A = 4\prod_{j=1}^{n}\left(2\sum_{w^{(j)} \in W^{(j)}} L(w^{(j)}) + 1\right)^2 \left(\left|\tilde{T}^{(j)}\right|\right)$, здесь $\left|\tilde{T}^{(j)}\right|$ — мощность множества $\tilde{T}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$. Множитель 4 впереди — есть порядок ассоциированной подгруппы в квадрате.

В каждой из подгрупп H_j составим множество всевозможных слов

$$\Phi^{(j)}(u^j(1))\Phi^{(j)}(u^j(2))..\Phi^{(j)}(u^j(r_j)),\ j = \overline{1,n},$$

прообразы которых довлетворяют условию $L(u^{(j)}(1)u^{(j)}(2)..u^{(j)}(r_j) \leq A + L(w_0)$. Таких образов существует конечное множество, обозначим его через $H_\Phi^{(j)}$. Учитывая лемму 7, прообраз может быть записан в виде $u_1u_2..u_n = (x_1y_1z_1)(x_2y_2z_2)..(x_ky_kz_k)$, тогда подгруппе, порожденной ядрами $A_i^{(j)}$ в образе соответствует один элемент $\alpha_i^{(j)}$. Число элементов x_i и z_i конечно для слов ограниченной длины.

Из множеств $H_\Phi^{(j)}$ выберем по одному произвольному слову:

$$
\begin{aligned}
&y_1\Phi^{(1)}(u^{(1)}(1))\Phi^{(1)}(u^{(1)}(2))..\Phi^{(1)}(u^{(1)}(r_1)) = \\
&= y_1(x_1^{(1)}\alpha_{i_1}^{(1)}z_1^{(1)})(x_2^{(1)}\alpha_{i_2}^{(1)}z_2^{(1)})..(x_{r_1}^{(1)}\alpha_{i_{r_1}}^{(1)}z_{r_1}^{(1)}) = \\
&= y_2\Phi^{(2)}(u^{(2)}(1))\Phi^{(2)}(u^{(2)}(2))..\Phi^{(2)}(u^{(2)}(r_2)) = \\
&= y_2(x_1^{(2)}\alpha_{i_1}^{(2)}z_1^{(2)})(x_2^{(2)}\alpha_{i_2}^{(2)}z_2^{(2)})..(x_{r_2}^{(2)}\alpha_{i_{r_2}}^{(2)}z_{r_2}^{(2)}) = .. \\
&.. = \Phi^{(n)}(u^{(n)}(1))\Phi^{(n)}(u^{(n)}(2))..\Phi^{(n)}(u^{(n)}(r_n)) = \\
&= (x_1^{(n)}\alpha_{i_1}^{(n)}z_1^{(n)})(x_2^{(n)}\alpha_{i_2}^{(n)}z_2^{(n)})..(x_{r_n}^{(n)}\alpha_{i_{r_n}}^{(n)}z_{r_n}^{(n)}) =
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В первых $n-1$ строчках равенства (11) возможны сокращения между y_j и

$$\Phi^{(j)}(u^{(j)}(1))\Phi^{(j)}(u^{(j)}(2))..\Phi^{(j)}(u^{(j)}(r_j)).$$

Рассмотрим первую строчку. Пусть $y_1 = g_1 g_2..g_s$. Если между y_1 и

$$\Phi^{(1)}(u^{(1)}(1))\Phi^{(1)}(u^{(1)}(2))..\Phi^{(1)}(u^{(1)}(r_1))$$

идет сокращение, то g_s и $x_1^{(1)}\alpha_{i_1}^{(1)}z_1^{(1)}$ принадлежат одной подгруппе G_{k-1} или G_{xy}, тогда $g_s(x_1^{(1)}\alpha_{i_1}^{(1)}z_1^{(1)}) = a_{x_1}^{(1)}$, где $a_{x_1}^{(1)}$ — элемент из объединяемой подгруппы, который может принимать значения 1 или a_x. Зафиксируем $a_{x_1}^{(1)}$ и из равенства $g_s(x_1^{(1)}\alpha_{i_1}^{(1)}z_1^{(1)}) = a_{x_1}^{(1)}$, решая проблему вхождения найдем $\alpha_{i_1}^{(1)}$. Далее переходим к нахождению ядра следующего слога формального слова.

После того, как все сокращения проведены, между слогами формальных равенств соответствующих соотношениям (8) должно установиться взаимно однозначное соответствие. Будем иметь

$$
\begin{aligned}
&y_1' u_{right}^{(1)}(t_1-1)..(x_{i_1-1}^{(1)}y_{i_1-1}^{(1)}z_{i_1-1}^{(1)})(x_{i_1}^{(1)}y_{i_1}^{(1)}z_{i_1}^{(1)})(x_{i_1+1}^{(1)}y_{i_1+1}^{(1)}z_{i_1+1}^{(1)})U_{right}^{(1)} = \\
&= y_2' u_{right}^{(2)}(t_2-1)..(x_{i_2-1}^{(2)}y_{i_2-1}^{(2)}z_{i_2-1}^{(2)})(x_{i_2}^{(2)}y_{i_2}^{(2)}z_{i_2}^{(2)})(x_{i_2+1}^{(2)}y_{i_2+1}^{(2)}z_{i_2+1}^{(2)})U_{right}^{(2)} = .. \\
&.. = u^{(n)}(1)..(x_{i_n-1}^{(n)}y_{i_n-1}^{(n)}z_{i_n-1}^{(n)})(x_{i_n}^{(n)}y_{i_n}^{(n)}z_{i_n}^{(n)})(x_{i_n+1}^{(n)}y_{i_n+1}^{(n)}z_{i_n+1}^{(n)})U_{right}^{(n)}
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве сделаем вставки. Получим

$$
\begin{aligned}
&y_1' u_{right}^{(1)}(t_1-1)..(x_{i_1-1}^{(1)}y_{i_1-1}^{(1)}z_{i_1-1}^{(1)})\left(a_x^{(1)}\right)^2(x_{i_1}^{(1)}y_{i_1}^{(1)}z_{i_1}^{(1)})\left(a_x^{(1)}\right)^2(x_{i_1+1}^{(1)}y_{i_1+1}^{(1)}z_{i_1+1}^{(1)})U_{right}^{(1)} = \\
&= y_2' u_{right}^{(2)}(t_2-1)..(x_{i_2-1}^{(2)}y_{i_2-1}^{(2)}z_{i_2-1}^{(2)})\left(a_x^{(2)}\right)^2(x_{i_2}^{(2)}y_{i_2}^{(2)}z_{i_2}^{(2)})\left(a_x^{(2)}\right)^2(x_{i_2+1}^{(2)}y_{i_2+1}^{(2)}z_{i_2+1}^{(2)})U_{right}^{(2)} = .. \\
&.. = u^{(n)}(1)..(x_{i_n-1}^{(n)}y_{i_n-1}^{(n)}z_{i_n-1}^{(n)})\left(a_x^{(n)}\right)^2(x_{i_n}^{(n)}y_{i_n}^{(n)}z_{i_n}^{(n)})\left(a_x^{(n)}\right)^2(x_{i_n+1}^{(n)}y_{i_n+1}^{(n)}z_{i_n+1}^{(n)})U_{right}^{(n)}
\end{aligned}
$$

Для определения $y_{i_j}^{(j)}$, $j=\overline{1,n}$ рассмотрим уравнения:

$$(x_{i_1}^{(1)}\alpha_{i_1}^{(1)}z_{i_1}^{(1)})a_x^{(1)} = a_x^{(2)}(x_{i_2}^{(2)}\alpha_{i_2}^{(2)}z_{i_2}^{(2)})\widetilde{a}_x^{(2)} = .. = a_x^{(n)}(x_{i_n}^{(n)}\alpha_{i_n}^{(n)}z_{i_n}^{(n)})\widetilde{a}_x^{(n)}.$$

Так как a_x и $\widetilde{a}_x^{(j)}$, $j=\overline{2,n}$ принадлежат объединяемой подгруппе, то присоединим каждый из них, если он есть к $z_{i_1}^{(1)}$ и $z_{i_j}^{(j)}$ соответственно. Получим

$$(x_{i_1}^{(1)}\alpha_{i_1}^{(1)}z_{i_1}^{(1)}) = a_x^{(2)}(x_{i_2}^{(2)}\alpha_{i_2}^{(2)}z_{i_2}^{(2)}) = .. = a_x^{(n)}(x_{i_n}^{(n)}\alpha_{i_n}^{(n)}z_{i_n}^{(n)}).$$

Если в последних равенствах хотя бы одно из $\alpha_{i_j}^{(j)}$ известно, то определяются и все остальные. Если ни одно из $\alpha_{i_j}^{(j)}$ не известно, то сделаем вставки

$$x_{i_1}^{(1)}z_{i_1}^{(1)}({z_{i_1}^{(1)}}^{-1}\alpha_{i_1}^{(1)}z_{i_1}^{(1)}) = a_x^{(2)}x_{i_2}^{(2)}z_{i_2}^{(2)}({z_{i_2}^{(2)}}^{-1}\alpha_{i_2}^{(2)}z_{i_2}^{(2)}) = .. = a_x^{(n)}x_{i_n}^{(n)}z_{i_n}^{(n)}({z_{i_n}^{(n)}}^{-1}\alpha_{i_n}^{(n)}z_{i_n}^{(n)}).$$

Заметим, что $\alpha_{i_j}^{(j)}$ принадлежат $A_{i_j}^{(j)}$, где $A_{i_j}^{(j)}$ являются подгруппами групп G_{k-1} и G_{xy}.

Если $\alpha_{i_j}^{(j)}$ принадлежат G_{xy}, то учитывая, что группа G_{xy} конечна и $x_{i_j}^{(j)}, z_{i_n}^{(n)} \in G_{xy}$, легко определяем все $\alpha_{i_j}^{(j)}$.

Если же $\alpha_{i_j}^{(j)}$ принадлежат G_{k-1}, то сопрягая все $\alpha_{i_j}^{(j)}$ слогами $z_{i_n}^{(n)} \in G_{k-1}$, снова получаем подгруппу группs G_{k-1}. Элемент $x_{i_j}^{(j)} \in G_{k-1}$. Таким образом, необходимо решать проблему пересечения классов смежности в группе G_{k-1}, но по индуктивному предположению в группе G_{k-1} данная проблема разрешима.

Далее переходим к следующей системе равенств слогов и повторяем процесс описанный выше.

4. Заключение

Таким образом, показано, что в конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой проблема пересечения классов смежности конечного числа конечно порожденных подгрупп разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгебраические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1981., С. 20–62

2. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1983. С. 50–80.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ, 1986. С. 3–22.

4. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, №1, С. 199–222.

5. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. Тезисы докладов V Международной конференции. Тула, 2003, С.33–34.

6. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ Естественные науки. 2009. Вып. 2. С. 16–31.

7. Инченко О. В. Разрешимость проблемы пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой // Вестник ТулГУ Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2010. Вып. 1. С. 61–71.

8. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1981., С.102–116.

9. Инченко О.В. Об одной проблеме в группе Кокстера с древесной структурой. Вестник ТулГУ Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи Выпуск 1. 2016 (Принято к печати)

10. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера // Математика: Сб. переводов. 1974. №6. С. 56–79

11. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М: Мир, 1980.

12. Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Труды математического института АНСССР. 1955.

13. Безверхняя И. С. О корневом замыкании подгрупп свободного произведения групп с объединением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1983г. С. 81–112.

14. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой // Чебышевский сборник, 15:1, 2014, 32–42.

15. Добрынина И. В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика, 15:1, 2009, С. 23–30

16. Appel K., Schupp P. Artin groups and infinite Coxeter groups // Invenf. Math. 1983. V. 72. P. 201–220.

17. Baumslag B. J. Intersection of finitely generated subgroups in free products // J. London Math. Soc. - 1966. - V.41. - P. 673–679

REFERENCES

1. Bezverkhnii V. N. 1981, "Solution of the problem of inclusion of subgroups in one class HNN-group" , *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Tula State Tolstoy Pedagogical Institute, P. 20-62.

2. Bezverkhnii V. N. 1983, "Solution of the problem of an associativity of subgroups in one class HNN-group"*Algorithmic problems in group theory and semigroups and their applications*, Tula State Tolstoy Pedagogical Institute, P.50-80.

3. Bezverkhnii V. N. 1986, "Solution of the problem of inclusion in some class of groups with one relation" *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Tula State Tolstoy Pedagogical Institute, P. 3-22.

4. Bezverkhnii V. N. 1998, "About intersection of subgroups in HNN-groups" , *Fundamental and applied mathematics*, Vol 4, №1, P. 199-222.

5. Bezverkhnii V. N. "About Artin groups and Coxeter groups with tree structure" , *Abstracts of the V international conference. Algebra and number theory: modern problems and applications*, Tula, 2003, P.33 -34.

6. Bezverkhnii V. N. & Inchenko O. V. 2009, "The problem of intersection of finite defined subgroups in Coxeter groups with tree structure *Izvestiya of the Tula State University. Natural sciences*, Vol. 2., P.16-31.

7. Inchenko O. V. 2010. "Solvability of problem of the adjacency classes of finitely generated subgroups of Coxeter group with tree structure" *Vestnik of the Tula State University. Differential equations and applied problems*, Vol. 1, P.61-71.

8. Bezverkhny I. S. 1981, "About an associativity of finite sets of subgroups in free product groups" , *Algorithmic problems in group theory and semigroups*, Tula State Tolstoy Pedagogical Institute, P.102-116.

9. Inchenko O. V. 2016, "About one problem in Coxeter group with tree structure" , *Vestnik of the Tula State University. Differential equations and applied problems*, Vol. 1., (Принято к печати)

10. Briscorn E. & Saito K. 1974, "Artin groups and Coxeter groups" , *mathematics: The collection of translations* №6. P.56-79.

11. Lindon R. & Shupp P. 1980, *Combinatorial group theory*, Mir, Moscow.

12. Novikov P. S. 1955, "About algorithmic unsolvability of problem of identity of words in group theory" , *Works of the mathematical Institute Academy of Sciences USSR.*

13. Bezverkhny I. S. 1983, "About radical locking of subgroups of free product of groups with amalgamation" *Algorithmic problems in group theory and semigroups and their applications*, Tula State Tolstoy Pedagogical Institute, P.81-112.

14. Bezverkhnii V. N. & Dobrynirina I.V. 2014, "About free subgroups in Artin group with tree structure" , *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 15, №1, P. 32-42.

15. Dobrynirina I. V. 2009, "Solution to problem of width in free product of groups with amalgamation" *Fundamental and applied mathematics*, Vol. 15, №1, P. 23-30.

16. Appel K. & Schupp P. 1983, "Artin groups and infinite Coxeter groups" , *Invenf. Math.*, Vol. 72., P. 201-220.

17. Baumslag B. J. 1966, "Intersection of finitely generated subgroups in free products" , *J. London Math. Soc.*, Vol.41., P. 673-679.

Тульский государственный университет.
Получено 11.02.2016
Принято в печать 10.06.2016