"Светлой памяти Олега Борисовича Лупанова посвящается".

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 2

УДК 510.53+512.53+512.54

ОБ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ В СЛОВАХ И ДЛИНАХ

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина (г. Ярославль)

Аннотация

Через Π_m, как обычно, мы обозначаем свободную полугруппу с пустым словом в качестве нейтрального элемента ранга m со свободными образующими $a_1, \ldots, a_m$. В теории уравнений на свободной полугруппе Π_m хорошо известен открытый уже более 40 лет вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в словах и длинах, т.е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) = u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) \; \& \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j|,$$

где через $|w| = |u|$, как обычно, обозначается предикат " *длины слов w и u равны*". Изучение таких систем уравнений в словах и длинах было начато в начале 70-ых годов прошлого века в работах Ю.В. Матиясевича [15] и Н.К. Косовского [9], [10], [11].

В настоящей заметке доказывается алгоритмическая неразрешимость проблемы совместности для систем уравнений и неравенств в словах и длинах на свободной нециклической полугруппе Π_m: показано, что при $m \geq 2$ не возможно создать алгоритм, позволяющий для произвольной системы неравенств и равенств вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) \leq u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) \; \& \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j|,$$

где $w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ и $u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ – слова в алфавите

$$\{\, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m \,\},$$

определить, имеет ли она решение в свободной полугруппе Π_m, где через $w \leq u$ обозначается предикат " *последовательность букв w является подпоследовательностью последовательности букв u*".

Ключевые слова: свободная полугруппа, уравнения в словах и длинах, неравенства в словах и длинах, проблема совместности для систем уравнений и неравенств.

Библиография: 19 названий.

ON EQUATIONS AND INEQUALITIES IN WORDS AND WORD LENGTHS

V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina (Yaroslavl)

Abstract

By Π_m we denote, as usual, a free semigroup with an empty word as the neutral element of rank m with free generators $a_1, \ldots, a_m$. An open question in the theory of equations on free semigroup Π_m, which have been well known for more than 40 years, concerns the algorithmic undecidability of the problem of compatibility for systems of equations and inequalities in words and word lengths, *i.e.*, for systems of the type

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} |x_i| \;=\; |x_j|,$$

where, as usual, by $|w| = |u|$, we denote the predicate "*the lengths of the words w and u are equal*". Such systems of equations and inequalities in words and word lengths were studied in the beginning of 1970s by Yu.V. Matiyasevich Matiyasevich (1968) and N. K. Kosovskiĭ (1972a, 1972b, 1974).

We prove the algorithmic undecidability of a compatibility problem for systems of equations and inequalities in words and word lengths on free non-cyclic semigroup Π_m.

For an arbitrary system of equations and inequalities of the type

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;\leq\; u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} |x_i| \;=\; |x_j|,$$

where $w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ and $u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ are words in the alphabet

$$\{\, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m \,\},$$

it is shown that no algorithm can decide whether this system has a solution in free semigroup Π_m at $m \geq 2$. Here $w \leq u$ denotes the predicate "*the sequence w of letters is a subsequence of the sequence u*".

Keywords: free semigroup, equations in words and word lengths, inequalities in words and word lengths, compatibility problem for systems of equations and inequalities.

Bibliography: 19 titles.

1. Введение

Обозначим через Π_m свободную полугруппу с пустым словом в качестве нейтрального элемента (свободный моноид) ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. Вместо a_1 и a_2 будем, как обычно, писать a и b соответственно.

Системой уравнений с неизвестными x_1,..., x_n в свободной полугруппе Π_m называется выражение вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m), \tag{1}$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ и $u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ — слова в алфавите

$$\{\, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m \,\}.$$

Набор $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ элементов полугруппы Π_m называется *решением* системы (1), если при любом i $(i = 1, \ldots, k)$ в полугруппе Π_m выполняется равенство

$$w_i(g_1, \ldots, g_n, a_1, \ldots, a_m) \;=\; u_i(g_1, \ldots, g_n, a_1, \ldots, a_m).$$

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

При $m \geqslant 2$ система уравнений

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i \;=\; u_i$$

равносильна одному уравнению

$$w_1a_1w_2a_1\ldots a_1w_k\,w_1a_2w_2a_2\ldots a_2w_k \,=\, u_1a_1u_2a_1\ldots a_1u_k\,u_1a_2u_2a_2\ldots a_2u_k.$$

В 60-е годы прошлого века А. А. Марков предложил использовать системы уравнений в свободной полугруппе Π_m в качестве подхода к отрицательному решению 10-ой проблемы Д. Гильберта. Системы уравнений в свободных полугруппах также называются системами уравнений в словах. Для уравнений в свободных полугруппах традиционно рассматриваются две основные задачи: проблема существования решения и проблема описания множества всех решений.

Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах были получены А. А. Марковым и Ю. И. Хмелевским [16] в конце 60-ых годов.

В эти же годы было начато изучение систем уравнений в словах и длинах, т.е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i \,=\, u_i \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} |x_i| \,=\, |x_j|,$$

где через $|x| \,=\, |y|$ обозначен предикат “ *длины слов x и y равны*”.

Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах и длинах были получены в начале 70-ых годов в работах Ю. В. Матиясевича [15] и Н. К. Косовского [9], [10], [11].

В 1972–73 годах первый из авторов начал рассматривать системы уравнений в словах и длинах с дополнительным предикатом $|x|_a \,=\, |y|_a$ — “*проекции слов x и y на выделенную букву a равны*”. В работе [1], вышедшей из печати в 1974 году, он, в частности, доказал, что *можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений в свободной полугруппе Π_2,*

$$w\,(\,x,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,) \,=\, v\,(\,x,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\,\&\mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A}(|x_i| \,=\, |x_j|\,\&\,|x_i|_a \,=\, |x_j|_a)$$

с неизвестными x_1, ..., x_n, с константами a и b и с параметром x, где A — некоторое подмножество множества $M(n) \,=\, \{\{t,s\}\,|\,1\leqslant t,s\leqslant n\}$ всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих n, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение

$$w\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,x_n,\,a,\,b\,) \,=\, v\,(\,a^m,\,x_1,\ldots,\,x_n,\,a,\,b\,)\,\&\mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A}(|x_i| \,=\, |x_j|\,\&\,|x_i|_a \,=\, |x_j|_a).$$

В этой же работе отмечалось, что аналогичный результат остается верным, если предикат $|x| \,=\, |y|\,\&\,|x|_a \,=\, |y|_a$ заменить предикатом $|x|_b \,=\, |y|_b\,\&\,|x|_a \,=\, |y|_a$.

Аналогичный результат содержался в опубликованной в 1988 году работе J. R. Buchi и S. Senger [17].

В 1976 году Г. С. Маканин получил в теории уравнений в словах фундаментальный результат, который был опубликован в 1977 году в работах [12] и [13], — он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной полугруппе Π_m определить, имеет ли она решение.

Отметим, что вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в словах и длинах, т.е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i \,=\, u_i \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\,\in\, A} |x_i| \,=\, |x_j|,$$

где через $|x| \,=\, |y|$ обозначен предикат “*длины слов x и y равны*”, в настоящее время остается открытым.

2. Системы неравенств в словах и длинах

V. Diekert и Ю. В. Матиясевич предложили изучать в свободных полугруппах системы вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \le u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m), \tag{2}$$

где для слов w и u в алфавите образующих свободной полугруппы запись $w \le u$ означает, что *последовательность букв w является подпоследовательностью последовательности букв u*, т. е. если $w = a_{i_1} \ldots a_{i_t}$, то существуют такие слова u_1, ..., u_t, u_{t+1}, что

$$u = u_1 a_{i_1} u_2 \ldots u_t a_{i_t} u_{t+1},$$

рассматривая их как обобщение систем уравнений (1), так как $w = u$ тогда и только тогда, когда $w \le u \,\&\, u \le w$.

Отношение $w \le u$ является отношением частичного порядка на полугруппе Π_m, т. е. оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Это еще один довод для обоснования естественности рассмотрения систем неравенств вида (2).

Вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем неравенств (2) в настоящее время открыт. Но если к отношению $w \le u$ добавить предикат равенства длин, то получим алгоритмически неразрешимую задачу.

В дальнейшем равенство $w = u$ будет использоваться как сокращенная запись конъюнкции неравенств $w \le u \,\&\, u \le w$.

Теорема 1. *Невозможен алгоритм, позволяющий для произвольной системы вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i \le u_i \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j|$$

определить, имеет ли она решение.

Доказательство. Прежде всего покажем, что с использованием отношений $w \le u$ и $|x| = |y|$ выразим ряд вспомогательных предикатов.

Пусть α — это буква a или b.

$$\mathbb{N}_\alpha(x) \rightleftharpoons (x\alpha = \alpha x).$$

Если X — элемент полугруппы Π_2, то *формула $\mathbb{N}_\alpha(X)$ истинна на полугруппе Π_2 тогда и только тогда, когда X — степень буквы α.*

Рассмотрим предикат $R(x, y)$ истинный тогда и только тогда, когда найдется такое неотрицательное число t, что $x = a^t$, а $y = b^t$.

Справедлива эквивалентность

$$R(x, y) \iff (xa = ax \,\&\, yb = by) \,\&\, |x| = |y|.$$

Стоящую в правой части этой эквивалентности формулу в дальнейшем будем обозначать через $R(x, y)$.

Для буквы α алфавита Σ и слова w в этом алфавите через $|w|_\alpha$ будем, как обычно, обозначать число вхождений буквы α в слово w.

Обозначим через $D(w, x, y)$ предикат, истинный для трех слов W, X и Y в алфавите $\{a, b\}$ тогда и только тогда, когда

$$X = a^{|W|_a} \,\&\, Y = b^{|W|_b}.$$

Нетрудно проверить, что предикат $D(w, x, y)$ можно задать формулой

$$xa = ax \,\&\, x \le w \,\&\, yb = by \,\&\, y \le w \,\&\, |w| = |xy|,$$

которую будем обозначать через $D(w, x, y)$.

Это позволяет определить предикаты $|w|_a = |u|_a$ и $|w|_b = |u|_b$ формулами

$$(\exists x, y_1, y_2)(D(w, x, y_1) \,\&\, D(u, x, y_2)) \quad \text{и}$$
$$(\exists x_1, x_2, y)(D(w, x_1, y) \,\&\, D(u, x_2, y)).$$

Введем основной для дальнейшего предикат $M\,(\,x,\,y,\,z\,)$ *истинный тогда и только тогда, когда найдутся такие натуральные числа* s, t *и* r, *что* $x = a^s$, $y = a^t$, $z = a^r$ *и* $st = r$.

Имеют место эквивалентности:

$$M\,(\,x,\,y,\,z\,) \iff ((xa = a\,x \,\&\, ya = a\,y \,\&\, za = a\,z\,) \,\&\, (\,\exists\,u\,)(\,\exists\,v\,)(\,\exists\,w)(R(y, u) \,\&\, v(xb) = (xb)v \,\&\, |v|_a = |z|_a \,\&\, |v|_b = |u|_b\,)).$$

Напомним, что в этой эквивалентности предикаты $R(y, u)$ и $|v|_a = |z|_a \,\&\, |v|_b = |u|_b$ определяются через предикаты $x \le y$ и $|x| = |y|$.

Нетрудно понять, что для произвольных натуральных чисел s, t и r имеет место эквивалентность:

$$\Pi_2 \models M\,(\,a^s,\,a^t,\,a^r\,) \iff st = r.$$

Воспользуемся следующим хорошо известным вариантом непосредственного следствия фундаментальной теоремы Ю. В. Матиясевича [14] о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств: *для произвольного рекурсивно перечислимого множества* A *натуральных чисел можно построить такую формулу* $\Phi(A)\,(x_1)$ *вида*

$$(\exists\,x_2\,)\ldots(\exists\,x_m\,)\,\Psi, \qquad \text{где} \quad \Psi = \mathop{\&}_{i=1}^{s} \varphi_i$$

и каждая формула φ_i *имеет один из следующих видов*:

$$x_l + x_j = x_t, \;\; x_j = x_l, \;\; x_l \cdot x_j = x_t, \;\; x_j = c,$$

где c *— натуральное число, что для произвольного натурального числа* n *имеем*:

$n \in A$ *тогда и только тогда, когда формула* $\Phi(A)\,(n)$ *истинна на множестве натуральных чисел.*

По формуле $\Phi(A)\,(x_1)$ построим формулу $\Phi^{(1)}_A\,(x_1)$ следующим образом:

$$\Phi^{(1)}(A)\,(x_1) \rightleftharpoons (\,\exists\,x_2\,)\ldots(\,\exists\,x_m\,)\,(\,\Psi_1 \,\&\, (\,\mathop{\&}_{i=2}^{m} \mathbb{N}_a\,(\,x_i\,))),$$

где Ψ_1 получается из Ψ заменой каждой подформулы φ_i вида $x_l + x_j = x_k$ на $x_l\,x_j = x_k$, вида $x_l \cdot x_j = x_k$ — на $M(x_l, x_j, x_k)$, вида $x_j = x_k$ — на $x_j = x_k$, вида $x_j = c$ — на $x_j = a^c$.

Подходящим образом переименовав переменные в формуле, $\Phi^{(1)}(A)\,(\,x_1\,)$, можем считать, что в формулу $\Phi^{(1)}(A)\,(\,x\,)$ входят лишь переменные x, x_1, ..., x_n.

Приведем эту формулу к предваренной нормальной форме и обозначим полученную формулу через $\Phi^{(2)}(A)\,(\,x\,)$. Нетрудно понять, что формула $\Phi^{(2)}(A)\,(\,x\,)$ выражает проблему совместности для системы вида (2), при этом переменная x выступает в роли параметра.

Тогда: $k \in A$ *тогда и только тогда, когда формула* $\Phi^{(2)}(A)(a^k)$ *истинна на полугруппе* Π_2.

Для завершения доказательства теоремы достаточно взять в качестве A *рекурсивно перечислимое, но нерекурсивное множество.* $\square$

Заметим, что $\exists$-теория отношения равенства $=$ на полугруппе Π_2 алгоритмически разрешима, т.е существует алгоритм, позволяющий для произвольной формулы вида

$$(\exists x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i \,\&\, \mathop{\&}_{j=1}^{m} z_j \neq v_j)$$

определить, истинна ли она на полугруппе Π_2. Это следует из теоремы Г. С. Маканина [13], так как отрицание из формул можно удалить с помощью следующей эквивалентности

$$w \neq u \iff (\exists x, y_1, y_2)(u = wax \vee u = wbx \vee w = uax \vee w = ubx \vee \\ (u = xay_1 \,\&\, w = xby_2) \vee (u = xby_1 \,\&\, w = xay_2))$$

Эту формулу можно даже привести к виду

$$(\exists x, y_1, y_2, z_1, z_2) W(x, y_1, y_2, z_1, z_2, a, b) = U(x, y_1, y_2, z_1, z_2, a, b),$$

если для удаления дизъюнкции воспользоваться результатом из работы [19].

В то же время $\exists$-теория отношения частичного порядка $\leq$ на полугруппе Π_2 алгоритмически неразрешима. Это сразу следует из предыдущих результатов, если воспользоваться следующими предикатами

$$D_\alpha(w, x) \iff w = \alpha^{|w|_\alpha},$$

где $\alpha \in \{a, b\}$ и заметить, что

$$D_\alpha(w, x) \iff x\alpha = \alpha x \,\&\, x \leq w \,\&\, \neg(x\alpha \leq w).$$

Тогда предикат $|w|_a = |u|_a$ можно задать формулой

$$(\exists x)(D_\alpha(w, x) \,\&\, D_\alpha(u, x)),$$

а предикат $R(x, y)$ — формулой

$$xa = ax \,\&\, yb = by \,\&\, (\exists z)(z(ab) = (ab)z \,\&\, D_a(x, z) \,\&\, D_b(y, z)).$$

При этом определение предиката $M(x, y, z)$ имеет тот же вид

$$M(x, y, z) \iff ((xa = ax \,\&\, ya = ay \,\&\, za = az) \,\&\, (\exists u)(\exists v)(\exists w)(R(y, u) \,\& \\ v(xb) = (xb)v \,\&\, |v|_a = |z|_a \,\&\, |v|_b = |u|_b)).$$

3. Заключение

В заключение отметим, что содержащиеся в заметке результаты представляют, на наш взгляд, интерес в связи с уже упоминавшимся выше хорошо известным вопросом об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в словах и длинах, т. е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j|.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дурнев В. Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Матем. заметки. — 1974. — Т. 16. — № . 5. — С. 717–724.

2. Дурнев В. Г. К вопросу об уравнениях на свободных полугруппах // Сб. “Вопросы теории групп и гомологической алгебры”. ЯрГУ. Ярославль. — 1977. — С. 57–59.

3. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях в свободных полугруппах с ограничениями на решения // Сб. “Вопросы теории групп и гомологической алгебры”. ЯрГУ. Ярославль. 2003.

4. Дурнев В. Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с ограничениями на решения в свободных полугруппах // Записки научных семинаров ПОМИ. — Т. 358. Санкт-Петербург. 2008. С. 120–129.

5. Дурнев В.Г., Зеткина О. В. Об уравнениях с подполугрупповыми ограничениями на решения в свободных полугруппах // Чебышевский сборник. — 2010. — Т. XI. — вып. 3(35). — С. 78–87.

6. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах и группах // Сб. “Вопросы теории групп и гомологической алгебры”. ЯрГУ. Ярославль. 1991. С. 30–35.

7. Дурнев В. Г. Об уравнениях с эндоморфизмами в свободных полугруппах // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4. — № 2. — С. 136–141.

8. Дурнев В. Г. Об уравнениях в словах и длинах с эндоморфизмами // Изв. ВУЗ’ов. Математика. — 1992. — № 8. — С. 30–34.

9. Косовский Н. К. Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. Ленинград. — 1972. — Т. 32. — С. 21–28.

10. Косовский Н. К. О множествах, представимых в виде решений уравнений в словах и длинах // Вторая всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы кратких сообщений. Москва. 1972. С. 23.

11. Косовский Н. К. О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов // Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. Ленинград. — 1974. — Т. 40. — С. 24–29.

12. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Доклады АН СССР. — 1977. — Т. 233. — № 2. — С. 287–290.

13. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Математический сборник. — 1977. — Т. 103(145). — № 2(6). — С. 147–236.

14. Матиясевич Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // Доклады АН СССР. — 1970. — Т. 130. — № 3. — С. 495–498.

15. Матиясевич Ю. В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-ой проблемой Гильберта // Исследования по конструктивной математике и математической логике. Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. Ленинград. — 1968. — Т. 8. — С. 132–143.

16. Хмелевский Ю.И. Уравнения в свободной полугруппе // Труды Математического института АН СССР. Т. 107. М.: Наука. 1971.

17. Buchi J. R., Senger S. Definability in the existential theory of concatenation // Z. math. Log. und Grundl. Math. — 1988. — V. 34. — No. 4. — P. 337–342.

18. Buchi J. R., Senger S. Coding in the existential theory of concatenation // Arch. Math. Logik. — 1986/87. — V. 26. — P. 101 - 106.

19. Karhumaki, J., Mignosi, F., Plandowski, W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2001. — V. 8. — No. 2. — P. 293–305.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Durnev, V. G. 1974, On equations in free semigroups and groups, *Mathematical Notes*, vol. 16, no. 5, pp. 1024–1028 doi:10.1007/BF01149791

2. Durnev, V. G. 1977, "On some equations on free semigroups", *Voprosy teorii grupp i gomologicheskoi algebry (Group Theory & Homological Algebra)*, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'. P. 57–59.

3. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2003, "On equations in free semigroups with certain constraints on their solutions", *Voprosy teorii grupp i gomologicheskoi algebry (Group Theory & Homological Algebra)*, Yaroslavl' State University. Yaroslavl'.

4. Durnev, V. G. & Zetkina, O. V. 2008, "On equations in free semigroups with certain constraints to their solutions", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 158, no. 5, pp. 671–676, doi:10.1007/s10958-009-9409-z

5. Durnev, V.G. & Zetkina, O. V. 2010, "Equations with subsemigroup constraints to their solutions in free semigroups", *Thebyshev Sbornik*, vol. XI, issue 3(35), pp. 78–87, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/cheb/v11/i3/p78 (accessed 25 June 2016).

6. Durnev, V. G. 1991, "On equations with endomorphisms in free semigroups and groups", *Voprosy teorii grupp i gomologicheskoi algebry (Group Theory & Homological Algebra)*, Yaroslavl' State University. Yaroslavl', pp. 30–35

7. Durnev, V. G. 1992, "Equations with endomorphisms in free semigroups", *Diskret. Mat.*, vol. 4, no. 2, pp. 136–141, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/dm/v4/i2/p136 (accessed 25 June 2016).

8. Durnev, V. G. 1992, "On equations in words and lengths with endomorphisms", *Russian Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, vol. 36, no. 8, pp. 26–30, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/ivm/y1992/i8/p30 (accessed 25 June 2016).

9. Kosovskiĭ, N. K. 1972a, "Certain properties of the solutions of equations in a free semigroup", *Investigations in constructive mathematics and mathematical logic, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.–LOMI (Proc. Steklov Math. Inst., Leningrad)*, vol. 32, pp. 21–28, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/znsl/v32/p21 (accessed 25 June 2016).

10. Kosovskiĭ, N. K. 1972b, "On sets represented as solutions of equations in words and lengths", *2nd USSR Conference on mathematical logics.* Moscow. Book of abstracts, p. 23

11. Kosovskiĭ, N. K. 1974, “The solution of systems that consist simultaneously of word equations and word length inequalities”, *Investigations in constructive mathematics and mathematical logic, VI (dedicated to A. A. Markov on the occasion of his 70th birthday). Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.–LOMI (Proc. Steklov Math. Inst., Leningrad)*, vol. 40, pp. 24–29, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/znsl/v40/p24 (accessed 25 June 2016).

12. Makanin, G. S. 1977, “The problem of the solvability of equations in a free semigroup”, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 18, no. 2, pp. 330–334

13. Makanin, G. S. 1977, “The problem of solvability of equations in a free semigroup”, *Math. USSR Sb.*, vol. 32, no. 2, pp. 129–198, doi:10.1070/SM1977v032n02ABEH002376

14. Matiyasevich, Yu. V. 1970б “Enumerable sets are Diophantine”, *Soviet Math. Doklady*, vol. 11, no. 2, pp. 354–358.

15. Matiyasevichб Yu. V. 1968, The connection between systems of equations in words and lengths with Hilbert’s 10th problem, *Studies on constructive mathematics and mathematical logics. Zap. Naučhn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.–LOMI (Proc. Steklov Math. Inst., Leningrad)*, vol. 8, pp. 132–143, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/znsl/v8/p132 (accessed 25 June 2016).

16. Hmelevskiĭ, Ju. I. 1971, “Equations in a free semigroup”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 107, pp. 1–270, Available at: http://mi.mathnet.ru/eng/tm/v107/p3 (accessed 25 June 2016).

17. Büchi, J. R. & Senger, S. 1988, “Definability in the existential theory of concatenation”, *Z. math. Log. und Grundl. Math.*, vol. 34, no. 4, pp. 337–342, doi:10.1007/978-1-4613-8928-6_37

18. Büchi, J. R. & Senger, S. 1986/87, “Coding in the existential theory of concatenation”, *Arch. Math. Logik.*, vol. 26, pp. 101–106, doi:10.1007/978-1-4613-8928-6_36

19. Karhumäki, J., Mignosi, F. & Plandowski, W. 2001, “On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, vol. 8, no. 2, pp. 293–305, Available at: http://projecteuclid.org/euclid.bbms/1102714174 (accessed 25 June 2016).

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
Получено 31.03.2016 г.
Принято в печать 10.06.2016 г.