ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 2

УДК 519.4

О НОРМАЛИЗАТОРАХ В НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ КОКСТЕРА[1]

И. В. Добрынина (Тула)

Аннотация

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G =< a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1, n} >,$$

где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$.

Если $m_{ij} \geq 3$ ($m_{ij} > 3$), $i \neq j$, то G называется группой Кокстера большого (экстрабольшого) типа. Эти группы определены К. Аппелем и П. Шуппом.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1, n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой.

Группы Кокстера с древесной структурой введены В. Н. Безверхним, алгоритмические проблемы в них рассматривались В. Н. Безверхним и О. В. Инченко.

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

В настоящей работе доказывается, что нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера с древесной структурой $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$, где

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

Ключевые слова: группы Кокстера, древесная структура, нормализатор, свободное произведение с объединением.

Библиография: 18 названий.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-41-03222 р_центр_а).

ON NORMALIZERS IN SOME COXETER GROUPS

I. V. Dobrynina (Tula)

Abstract

Let G be a finitely generated Coxeter group with presentation

$$G =< a_1, \dots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1,\ i, j = \overline{1, n} >,$$

where m_{ij} — are the elements of the symmetric Coxeter matrix: $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq \geq 2$, $i \neq j$.

If $m_{ij} \geq 3$ ($m_{ij} > 3$), $i \neq j$, then G is a Coxeter group of large (extra-large) type. These groups introduced by K. Appel and P. Schupp.

If the group G corresponds to a finite tree-graph Γ such that if the vertices of some edge e of the graph Γ correspond to generators a_i, a_j, then the edge e corresponds to the ratio of the species $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, then G is a Coxeter group with a tree-structure.

Coxeter groups with a tree-structure introduced by V. N. Bezverkhnii, algorithmic problems in them was considered by V. N. Bezverkhnii and O. V. Inchenko.

The group G can be represented as tree product 2-generated of Coxeter groups, amalgamated by cyclic subgroups. Thus from the graph Γ of G will move to the graph $\overline{\Gamma}$ in the following way: the vertices of the graph $\overline{\Gamma}$ we will put in line Coxeter group on two generators

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

and

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

to every edge $\overline{e}$ joining the vertices corresponding to G_{ij} and G_{jk} is a cyclic subgroup

$$< a_j; a_j^2 = 1 > .$$

In this paper we prove the following theorem: normalizer of finitely generated subgroup of Coxeter group with tree-structure

$$\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk},$$

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >,$$

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >$$

finitely generated and exist algorithm for generating.

Keywords: Coxeter group, tree-structure, normalizer, amalgamated product.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G =< a_1, \dots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1, n} >,$$

где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$ [1].

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером [2] в 1934 году. Понятие группы Кокстера возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей.

В 1983 году К. Аппелем и П. Шуппом определены классы групп Кокстера большого ($m_{ij} \geq 3, i \neq j$) и экстрабольшого ($m_{ij} > 3, i \neq j$) типов [3]. Ими рассмотрены проблемы

равенства и сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа. Другие алгоритмические проблемы в группах Кокстера экстрабольшого типа рассматривались в работах [4], [5]. Ряд работ посвящен изучению алгоритмических проблем в группах Кокстера большого типа, например [6], [7].

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1,n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой [8].

Группы Кокстера с древесной структурой введены В. Н. Безверхним в 2003 году, алгоритмические проблемы в них рассматривались В. Н. Безверхним и О. В. Инченко, например [8].

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

В группах кос нормализаторы подгрупп изучались автором в работе [9].

В настоящей работе доказывается, что нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы H в свободном произведении $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$ двупорожденных групп Кокстера G_{ij} и G_{jk} с древесной структурой, объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 = 1 >$, конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

2. Базовые понятия и утверждения

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, заданная копредставлением

$$G =< a_1, ..., a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1,n} >,$$

где m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, причем $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$, группе G соответствует конечный связный дерево-граф Γ такой, что если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j, то ребру e соответствует соотношение вида $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$.

Теорема 1. *[10] Пусть группа $G = \langle \prod_{s=1}^{n} * G_s; rel G_1, \ldots, rel G_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \rangle$ есть древесное произведение групп, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$ и $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора изоморфизмов $\{\varphi_{ij}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы 1) проблема вхождения; 2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$; 3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$, то в группе G разрешима проблема вхождения.*

Группу Кокстера G с древесной структурой представим как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам: от графа Γ группы

G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >,$$

а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Следствие 1. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Будем рассматривать свободное произведение $\overline{G}$ двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} >$$

с древесной структурой, объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 >$:

$$\overline{G} =< a_i, a_j, a_j', a_k; a_i^2, a_j^2, a_k^2, a_j'^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, (a_j' a_k)^{m_{jk}}, a_j = a_j' > .$$

Слово из группы $\overline{G}$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} — представители правых классов смежности группы G_{ij} по $< a_j; a_j^2 >$ и G_{jk} по $< a_j; a_j^2 >$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}$. K_g — ядро слова g. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы $\overline{G}$, а K_g — другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 1. *Если в (1) $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$, то слово*

$$g = r_{1g} \dots r_{ng} K_g r_{ng}^{-1} \dots r_{1g}^{-1} \tag{2}$$

называется трансформой.

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги принадлежат разным сомножителям группы $\overline{G}$. В этом случае слоговая длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$. Слово вида (1) будем называть нетрансформой нечетной длины, слово вида (3) нетрансформой четной длины.

Определение 2. *Подслово $g = l_{1g} \dots l_{ng}(r_{ng} \dots r_{1g})$ называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово $l_{1g} \dots l_{ng} K_g$ ($K_g r_{ng} \dots r_{1g}$) — большим начальным (конечным) отрезком.*

Определение 3. *Левая (правая) половина слова*

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

называется изолированной в множестве $\{w_j\}_{j\in\overline{1,N}}$, *если ни у одного из слов* w_j^ε, $\varepsilon = \pm 1$, *множества*

$$(\{w_j\} \setminus w_i) \cup (\{w_j^{-1}\} \setminus w_i^{-1})$$

нельзя выделить $l_{1w_i} \dots l_{mw_i}$ $(r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ *в качестве начального (конечного) подслова, то есть* $w_j^\varepsilon \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^\varepsilon (w_j^\varepsilon \neq w_{j1}^\varepsilon r_{m+1w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$.

Далее будем рассматривать специальное множество слов как в [11], [12].

Определение 4. *Конечное множество слов* $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *группы* $\overline{G}$ *назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. Левая половина нетрансформы из множества W *изолирована в нем. Если нетрансформа четной длины, то изолирована и левая, и правая половины.*

2. Длину нетрансформы w_j *нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством* $\{w_i\} \setminus w_j$. *Длину произвольного элемента* w_j *нельзя уменьшить, умножая на слово* w *длины меньше* $L(w_j)$, *принадлежащее подгруппе*

$$< \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} > .$$

3. Если $w_i'^\varepsilon = l_{1w_i'} \dots l_{nw_i'} K_{w_i'} r_{nw_i'} \dots r_{s+1w_i'} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1, s < n,$ *— нетрансформа из множества* W *и* $\{w_i''^\varepsilon = l_{1w_i''} \dots l_{nw_i''} K_{w_i''} r_{nw_i''} \dots r_{s+1w_i''} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1\}$ *— подмножество нетрансформ из* $W \setminus \{w_i'\} \cup W \setminus \{w_i'^{-1}\}$, *правые половины которых оканчиваются подсловом* $r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}$, *тогда если подгруппа* $< w_i, i = \overline{1,n} > \cap\, r_{1w_i'}^{-1} \dots r_{sw_i'}^{-1} D r_{sw_i'} \dots r_{1w_i}' = B$, *где* $D = G_{ij}$, *если* $r_{s+1w_i'} \in G_{ij}$, *либо* $D = G_{jk}$, *если* $r_{s+1w_i'} \in G_{jk}$,*то для* $u \in B$ *выполняются неравенства* $L(w_i'u) \geq L(w_i'), L(w_i'uw_i''^\varepsilon) \geq L(w_i')$.

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$, $w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$ *— слова из* W, *не обязательно различные,* $s \leq m \leq n$, *тогда не существует слова* $g \neq 1$ *длины меньше* $2s$ *из подгруппы, порожденной* W, *такого, что если* $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, *то*

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} r'^{-1}_{s+1w_i} \dots r'^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l^{-1}_{nw_i} \dots l^{-1}_{1w_i},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, *то*

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{nw_i}^{-1} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

Теорема 2. *[8] Всякое конечное множество слов* $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, *группы* $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$ *можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.*

Пусть H — конечно порожденная подгруппа без кручения группы Кокстера

$$\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$$

с древесной структурой.

Приведем множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H к специальному. Разобьем его на подмножества следующим образом: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножеству $M_i, i = \overline{1,k}$, принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями, сопряженные G_{ij} или G_{jk}. С каждым из множеств $M_i, i = \overline{1,k}$, связана подгруппа $(M_i) = r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} C_i r_{ni} \dots r_{2i} r_{1i}$, где C_i — подгруппы из G_{ij} или G_{jk}, порожденные ядрами трансформ, входящих в M_i. Упорядочим (M_i) по длинам крыльев трансформ. Получим ряд

$$(M_1) \le (M_2) \dots \le (M_k). \tag{4}$$

Лемма 1. *[12] Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$(M'_1) \le (M'_2) \dots \le (M'_{k'}), \tag{4'}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp((M_0), (M_1), (M_2), \dots, (M_k)) = gp((M_0), (M'_1), (M'_2), \dots, (M'_{k'}))$.

2. Если подгруппе $(M'_j) = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C'_j r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$ *принадлежит трансформа*

$$u = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} h_u r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j},$$

где h_u *принадлежит объединяемой подгруппе, то то среди подгрупп ряда (4′) имеется подгруппа*

$$(M'_l) = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{n-1j}^{-1} C'_l r_{n-1j} \dots r_{2j} r_{1j},$$

содержащая u.

3. Если $(M'_j) = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C'_j r_{nj} \dots r_{1j}$, $(M'_s) = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1s}^{-1} \dots r_{ms}^{-1} C'_s r_{ms} \dots r_{n+1s} r_{nj} \dots r_{1j}$ *подгруппы ряда (4′) и подгруппа* (M'_j) *содержит трансформу* $u = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} h_u r_{nj} \dots r_{1j}$ *либо* $u' = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} K_u r_{nj} \dots r_{1j}$, *где* $K_u = r_{n+1s}^{-1} h_u r_{n+1s}$, *то существует подгруппа ряда (4′)* $(M'_k) = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1s}^{-1} C'_k r_{n+1s} r_{nj} \dots r_{1j}$, *содержащая в первом случае трансформу* u, *во втором —* u'.

4. Если $(M'_j) = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C'_j r_{nj} \dots r_{1j}$ *— подгруппа ряда (4′) и* $y^\varepsilon = l_{1y}^{-1} \dots l_{my}^{-1}$ $K_y r_{my} \dots r_{n+1y} r_{nj} \dots r_{1j}$, $\varepsilon = \pm 1$, *— элемент специального множества, причем подслово* $r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* $w^\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, u, *если подгруппа* (M'_j) *содержит трансформу* $r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} h r_{nj} \dots r_{1j}$ *или трансформу* $r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} K r_{nj} \dots r_{1j}$, *где* $K = r_{n+1y}^{-1} h r_{n+1y}$, *то существует подгруппа ряда (4′)* $(M'_l) = r_{1j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} r_{n+1y}^{-1} C'_l r_{n+1y} r_{nj} \dots r_{1j}$, *содержащая эту трансформу.*

5. Если для некоторой трансформы $u = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} K_u r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$, *принадлежащей* $(M'_j) = r_{1j}^{-1} r_{2j}^{-1} \dots r_{nj}^{-1} C'_j r_{nj} \dots r_{2j} r_{1j}$, *и нетрансформы* y *(левая половина* y *изолирована) из* M_0 *выполняется соотношение* $L(y^{-1} u y) \le L(y)$, *то существует подгруппа* (M'_s) *ряда (4′), содержащая трансформу* $y^{-1} r_{1u}^{-1} r_{2u}^{-1} \dots r_{nu}^{-1} K_u$ $r_{nu} \dots r_{2u} r_{1u} y$, *а если* $L(yuy^{-1}) < L(y)$, *то существует подгруппа* (M'_s) *ряда (4′), содержащая трансформу* $y r_{1u}^{-1} r_{2u}^{-1} \dots r_{nu}^{-1} K_u r_{nu} \dots r_{2u} r_{1u} y^{-1}$.

Подгруппу, порожденную специальным множеством $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, обозначим через $gp(M_0, S)$, где S — подгруппа, порожденная подгруппами ряда (4′).

Определение 5. *[11] Произведение $u_1u_2\dots u_m$, где $u_i \neq 1, i = \overline{1,m}$, $u_i \in W \cup W^{-1}$, $i = \overline{1,m}$, из подгруппы $gp(M_0, S)$ назовем словом группы $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;a_j^2>} G_{jk}$, если*

1. $u_i \neq 1$.

2. $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$ либо u_i принадлежат некоторой подгруппе из ряда (4′).

3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}, i = \overline{1, m-1}$.

4. $u_i, u_{i+1}, i = \overline{1, m-1}$, не содержатся в одной подгруппе ряда (4′).

5. В $u_1u_2\dots u_m$ нет произведения $u_iu_{i+1}u_{i+2}, i = \overline{1, m-2}$, где

$$u_i \neq u_{i+2}^{-1}, u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}, u_{i+1} \in (M_j'), u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M_s'),$$

где $(M_j'), (M_s')$ из ряда (4').

Лемма 2. *[12] Всякое произведение $w_{i1}^{\varepsilon 1}w_{i2}^{\varepsilon 2}\dots w_{in}^{\varepsilon n}, \varepsilon_j = \pm 1$, где w_{ij} — образующие подгруппы $< W >$, через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i1}u_{i2}\dots u_{im}, m \leq n$, подгруппы $gp(M_0, S) =< W >$.*

Определение 6. *Будем говорить, что между словами v_1 и v_2 имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения v_1v_2 соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин $L(v_1), L(v_2)$.*

Определение 7. *[11] Слово $u_1u_2\dots u_m$ будем называть простым, если*

$$L(u_1u_2\dots u_m) = \max\{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_m)\}.$$

Лемма 3. *[12] Пусть $u_1u_2\dots u_m$ — слово из подгруппы $gp(M_0; S)$. Тогда*

$$L(u_1u_2\dots u_m) \geq L(u_i), i = \overline{1,m}.$$

Следствие 2. *[12] Если в слове $u_1u_2\dots u_m$ выполнить сокращение в группе $\overline{G}$, то оно не затронет, по крайней мере, левую половину слова u_1.*

Следствие 3. *[12] Всякое слово подгруппы $gp(M_0; S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Подгруппа $gp(M_0, S)$, порожденная специальным множеством слов $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ представляет собой HNN - группу с основой S, являющуюся древесным произведением, правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы (M_0) и $(M_j'), j = \overline{1,k'}$, ряда $(4')$ будем называть порождающими подгруппами $< W >= gp(M_0, S)$.

Лемма 4. *[13] Пусть W — специальное множество слов группы $\overline{G}$ и $H =< W >$ — подгруппа $\overline{G}$ и пусть $w_i^{\varepsilon} = l_1\dots l_mK_{w_i}r_m\dots r_1$ — элемент специального множества, $v = l_1\dots l_t, t \leq m$, — начальное подслово левой половины w_i^{ε}, причем v не является изолированной левой половиной w_i^{ε}. Тогда если $A_v = H \cap l_1\dots l_tA_jl_t^{-1}\dots l_1^{-1} \neq E$, где $A_j = G_{ij}$, если $l_t \in G_{ik}$ либо $A_j = G_{ik}$, если $l_t \in G_{ij}$, то ряд (4′) содержит подгруппу $(M_s') = A_v$.*

Лемма 5. *[12] Подгруппа (M_0), порожденная нетрансформами специального множества, свободна.*

Лемма 6. *[12] $(M_0) \cap (S)^{gp(M_0;S)} = E$, где E — единичная подгруппа.*

Лемма 7. *[13] В группе Кокстера с древесной структурой образующие сопряжены тогда и только тогда, когда существует ломаная, состоящая из ребер дерево-графа, которая соединяет вершины, соответствующие данным образующим группы, и каждому из ребер выделенного пути соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера.*

Лемма 8. *[8] Пусть $H_1 = gp(M_0; S_1)$ и $H_2 = gp(M'_0; S'_1)$ — две конечно порожденные подгруппы группы $\overline{G}$. Основа S подгруппы H_1 порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \ldots \leq (M_{k_1}), \tag{6}$$

основа S' подгруппы H_2 порождена подгруппами ряда

$$(M'_1) \leq (M'_2) \ldots \leq (M'_{k_2}). \tag{6'}$$

Тогда если H_1 и H_2 сопряжены в $\overline{G}$, то есть существует $z \in \overline{G}$ такое, что $z^{-1}H_1z = H_2$, то существуют $w \in gp(M'_0; S'_1), i \in \overline{1, k_1}, j \in \overline{1, k_2}$, такие, что $(M_i) = w^{-1}z^{-1}(M'_j)zw$, где (M_i) — подгруппа ряда (6), а (M'_j) — подгруппа ряда (6′).

Пусть группе Кокстера с древесной структурой G соответствует конечный дерево-граф Γ: вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1, n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_ia_j)^{m_{ij}} = 1$.

Ребро e' дерева–графа Γ назовем замыкающим ребром некоторого пути, если ему соответствует четное число Кокстера.

Лемма 9. *[13] Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой; слово $w \in G$ такое, что $|w| = 1$, то есть $w = a_i, i \in \overline{1, n}$. Тогда централизатор элемента w есть подгруппа вида*

$$C(w) =< \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_s, w; \tilde{z}_r{}^2 = 1, w^2 = 1, r = \overline{1, s} >,$$

где $\tilde{z}_r$ — циклически сократимое слово вида $\tilde{z}_r = z_1z_2 \ldots z_{t-1}z_0z_{t-1}^{-1} \ldots z_2^{-1}z_1^{-1}$, где $z_i \in G_{ij}$, подслово z_0 соответствует замыкающему ребру и $|z_i| = m_{ij} - 1, i = \overline{0, t-1}$.

3. Основная теорема

Теорема 3. *Нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы Кокстера $\overline{G}$ с древесной структурой конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного нормализатора.*

Доказательство. Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Кокстера

$$\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$$

с древесной структурой. Приведем множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H к специальному: $H = gp(M_0; S)$, где основа S порждена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \ldots \leq (M_k), \tag{5}$$

причем (M_0) — свободная часть, $(M_i) = v_i^{-1}C_iv_i, C_i \in G_{ij}$ или $C_i \in G_{jk}, i = \overline{1, k}$.

Найдем все элементы $Z \in N_G(H)$, порождающие $N_G(H)$. Наша задача — показать, что таких элементов существует лишь конечное число, если H конечно порождена.

Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть $H = gp(M_0; S)$, причем основа S есть единица, то есть $H = (M_0)$ и является свободной подгруппой в $\overline{G}$. Пусть $H =< X_1, X_2, \ldots, X_n >$. Рассмотрим слово $Z \in \overline{G}$ такое, что справедливо равенство $Z^{-1}HZ = H$. Если $u_1, u_2 \in H$, $Z \in N_{\overline{G}}(H)$, то $Z_0 = u_1Zu_2 \in$ $\in N_{\overline{G}}(H)$. Поэтому Z будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности HZH.

Образующие $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ являются специальными и удовлетворяют условиям:

1. Левая половина каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$, имеющего нечетную длину, изолирована в $\{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,n}} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}_{j=\overline{1,n}}$. Левая и правая половины каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$, имеющего четную длину, изолированы в $\{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,n}} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}_{j=\overline{1,n}}$.

2. Большой начальный и большой конечный отрезки каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ изолированы в множестве $\{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,n}} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}_{j=\overline{1,n}}$.

3. Для каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ справедливо соотношение $L(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}) \geq L(X_i)$, где

$$w_s \in \{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,n}}, \varepsilon_s = \pm 1, s = \overline{1,2}.$$

Выберем среди образующих $\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из H циклически несократимый X (если все образующие H циклически сократимы, то берем $X_i = cXc^{-1}$, где X — циклически несократимо. От подгруппы H перейдем к подгруппе $H' = cHc^{-1}$, имеющей циклически несократимый элемент; если подгруппы сопряжены, то сопряжены и их нормализаторы).

Пусть $L_0 = \max\{L(X_1), L(X_2), \ldots, L(X_n)\}$. Будем рассматривать произведение

$$Z^{-1}XZ = X_{i1}^{\varepsilon_1} \ldots X_{ik}^{\varepsilon_k}, \varepsilon_s = \pm 1, s = \overline{1,k}.$$

$L(XZ) \geq L(Z), L(Z^{-1}X) \geq L(Z)$, в противном случае Z не удовлетвлряет условию минимальности.Так как X циклически несократимо, то в слове $Z^{-1}XZ$ одновременно не может происходить сокращение в $Z^{-1}X$ и XZ. Пусть между X и Z сокращение не происходит. Допустим, оно происходит между Z^{-1} и X, причем не может сократиться более половины X, иначе длину Z можно уменьшить.

Предположим, $L(Z) > L_0/2$. Представим слово $X_{i1}^{\varepsilon_1} \ldots X_{ik}^{\varepsilon_k}$ в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода, то есть

$$Z^{-1}XZ = X_{i1}^{\varepsilon_1} \ldots X_{ik}^{\varepsilon_k} = v_1 v_2 \ldots v_p,$$

причем $L(v_p) \leq L_0$. Рассмотрим произведение $v_{p-1}v_p$. Здесь сокращение не затрагивает ядер v_{p-1}, v_p.Так как более половины v_p укладывается в Z, то длину Z можно сократить, умножая справа на v_p^{-1}. Противоречие. Таким образом, $p > 1$ быть не может.

Пусть $p = 1$ и $Z^{-1}XZ = v_1$. Тогда $L(Z) > L_0/2$ и $L(Z^{-1}X) > L_0/2$, что невозможно. Таким образом, $L(Z) \leq L_0/2$.

Используя строение простого слова, получаем, что Z можно выбрать как подслово левой или правой половины некоторого образующего X_i из H.

Случай 2. Пусть $H = gp(M_0; S)$, причем основа S не единична и порождена подгруппами ряда (5). Имеем

$$Z^{-1}gp(M_0; S)Z = gp(M_0; S).$$

Приведем образующие подгруппы $Z^{-1}gp(M_0; S)Z$ к специальным образующим.

По лемме 8 существуют $w \in gp(M_0; S), l, t$ такие, что

$$w^{-1}Z^{-1}(M_l)Zw = (M_t), \tag{7}$$

где $(M_l) = v_l^{-1}C_l v_l, C_l \in G_{ij}$ или $C_l \in G_{jk}$, $(M_t) = v_t^{-1}C_t v_t, C_t \in G_{ij}$ или $C_t \in G_{jk}$.

Перепишем соотношение (7) в следующем виде

$$w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1}C_l v_l Zw = v_t^{-1}C_t v_t$$

или

$$v_t w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1}C_l v_l Zw v_t^{-1} = C_t. \tag{8}$$

Из (7) далее получим

$$(v_t w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1})v_l gp(M_0; S)v_l^{-1}(v_l Zw v_t^{-1}) = v_t gp(M_0; S)v_t^{-1}. \tag{9}$$

Приведем образующие подгрупп $v_l gp(M_0;S)v_l^{-1}, v_t gp(M_0;S)v_t^{-1}$ из (9) к специальным образующим. Полученные подгруппы обозначим $gp(M_0';S') = H_1, gp(M_0'';S'') = H_2$ соответственно. Основа S' порождена подгруппами

$$(M_1') \leq (M_2') \ldots \leq (M_{k'}').$$

Основа S'' порождена подгруппами

$$(M_1'') \leq (M_2'') \ldots \leq (M_{k''}'').$$

Пусть $v_l Z w v_t^{-1} = \tilde{w}$.

Тогда (9) имеет вид

$$\tilde{w}^{-1} gp(M_0';S')\tilde{w} = gp(M_0'';S'')$$

или

$$\tilde{w}^{-1} H_1 \tilde{w} = H_2.$$

Слово $\tilde{w}$ будем выбирать наименьшим в двойном смежном классе $H_1\tilde{w}H_2$.

Случай 2.1. Каждая подгруппа $(M_i), i = \overline{1,k}$, ряда (5) сопряжена с объединяемой подгруппой.

В данном случае (8) будет иметь вид:

$$v_t w^{-1} Z^{-1} v_l^{-1} a_j v_l Z w v_t^{-1} = a_j$$

или

$$\tilde{w}^{-1} a_j \tilde{w} = a_j.$$

Таким образом, $\tilde{w}$ принадлежит централизатору элемента a_j.

По лемме 9 централизатор элемента a_j в группе G имеет вид:

в случае, когда числа m_{ij} и m_{jk} — четные, имеем $C(a_j) =< a_j, z_1, z_2; a_j^2, z_r^2, r = \overline{1,2} >$, $z_1 \in G_{ij}, z_2 \in G_{jk}, |z_1| = m_{ij} - 1, |z_2| = m_{jk} - 1$;

если числа m_{ij}, m_{jk} — разной четности, например, m_{ij} — четное, а m_{jk} — нечетное, то $C(a_j) =< a_j, z_1; a_j^2, z_1^2 >, z_1 \in G_{ij}, |z_1| = m_{ij} - 1$;

и, наконец, если числа m_{ij} и m_{jk} — нечетные, то $C(a_j) =< a_j; a_j^2 >$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай, когда $C(a_j) =< a_j; a_j^2 >$, очевиден.

Пусть $C(a_j) =< a_j, z_1, z_2; a_j^2, z_r^2, r = \overline{1,2} >$.

Поскольку слово $\tilde{w}$ является наименьшим в двойном смежном классе $H_1\tilde{w}H_2$, то оно может иметь один из видов: $\tilde{w} = (z_1z_2)^k$; $\tilde{w} = (z_1z_2)^k z_1$; $\tilde{w} = z_1$.

Мы будем пренебрегать образующим a_j, поскольку он лежит в объединяемой подгруппе.

Покажем, что в каждом из приведенных случаев можно ограничить показатель k.

Пусть $\tilde{w} = (z_1z_2)^k$. Рассмотрим двойной класс смежности $H_1(z_1z_2)^k H_2$. Если $z_1z_2 \in H_1$, то $k = 0$.

Если $(z_1z_2)^t \in H_1$, где t — наименьший возможный показатель степени, $k < t$, то можно найти показатель степени t', при котором $(z_1z_2)^{t'} \notin H_1$ и показатель степени t'', при котором $(z_1z_2)^{t''} \notin H_2$, тогда ограничить показатель k можно, выбрав $k < \max\{t', t''\}$.

В случае, если $(z_1z_2)^t z_1 \in H_1$, где t — наименьший возможный показатель степени, $k < t$, поступаем аналогично.

В других случаях рассмотрим стыки H_1 с $(z_1z_2)^k$ и $(z_1z_2)^k$ с H_2. Проведем рассуждения для первого стыка, рассуждения для второго — симметричны.

Допустим, что $(z_1z_2)^t z_1' \in H_1$, где $z_1 = z_1'z_1''$, тогда будем искать пересечение классов смежности $z_1''z_2 < z_1z_2 > \cap H_2$.

Если $(z_1z_2)^t z_1 z_2' \in H_1$, где $z_2 = z_2'z_2''$, то будем искать пересечение классов смежности $z_2'' < z_1z_2 > \cap H_2$.

Для ограничения длины слова $\tilde{w}$, перепишем общую часть $\tilde{w}$ с подгруппой H_1 в u-символах подгруппы H_1, а общую часть слова $\tilde{w}$ с подгруппой H_2 — в u-символах подгруппы H_2. Итак, нам надо для некоторого z, описанного выше, найти пересечение смежных классов $z < z_1z_2 > \cap H_2$ и, аналогично, $< z_1z_2 > \tilde{z} \cap H_1$ (или $\tilde{z}^{-1} < z_1z_2 > \cap H_1$). Для ограничения длины слова $\tilde{w}$ будем использовать метод типов [14]. Обозначим подгруппу $< z_1z_2 >$ через H_0.

Изложим суть данного метода. Пусть произвольная конечно порожденная подгруппа H' группы $\overline{G}$ порождена специальным множеством слов. Каждый элемент $g \neq 1$ из H' имеет запись в w-символах: $b = w_{i1}^{\varepsilon 1} w_{i2}^{\varepsilon 2} \dots w_{il}^{\varepsilon l}, \varepsilon_j = \pm 1$, где w_{ij} — образующие $< W >$ подгруппы H'. По лемме 2 приведем его к слову в u-символах: $b = u_1 \dots u_m$. Выполнив в полученном слове все возможные сокращения, получим слоговую запись $b = b_1 b_2 \dots b_k$.

Лемма 10. *[15] Каждый слог $b_i, i = \overline{1,k}$, слова $b = b_1 b_2 \dots b_k$ имеет вид:*

$$b_i = a_i' x_i y_i z_i a_i'', \tag{10}$$

где x_i — центральный или правый слог u_{s-1}, y_i — центральный слог трансформы u_s, z_i — левый или центральный слог u_{s+1}, a_i' и a_i'' — элементы из объединяемой подгруппы $< a_j; a_j^2 >$.

Заметим, что каждое из a_i' и a_i'' в лемме 10 либо есть единица, либо a_j.

Найдем пересечение $zH_0 \cap H_2$.

Пусть $zH_0 \cap H_2$ не пусто и $v \in zH_0 \cap H_2, v \neq 1$. Тогда существуют такие $h_0 \in H_0, h_2 \in H_2$, что $zh_0 = h_2$. Перепишем h_0, h_2 в u-символах подгрупп H_0, H_2 соответственно. Получим:

$$w = zu_1^{(0)} u_2^{(0)} \dots u_{r_0}^{(0)} = u_1^{(2)} u_2^{(2)} \dots u_{r_2}^{(2)} = w_0 b_1 b_2 \dots b_k. \tag{11}$$

Последняя запись в равенстве (11) дает несократимую запись слова w в группе $\overline{G}$, w_0 — начальное подслово слова w.

Будем называть $v^{(s)-1} \alpha_i^{(s)} v^{(s)}$ типом трансформ порождающей подгруппы

$$M_i^{(s)} = v^{(s)-1} C_i v^{(s)}$$

подгруппы H_s, $s \in \{0, 2\}$, группы $\overline{G}$ и обозначать его $(v^{(s)}, i)$. Символом $L((v^{(s)}, i)) = 2L(v^{(s)}) + +1$ будем обозначать длину типа $(v^{(s)}, i)$, а символом $T^{(s)}$ множество всех типов трансформ подгруппы $H^{(s)}$.

Пополним множество $T^{(s)}$ символом $\beta^{(s)} \notin \overline{G}$, получим множество $\tilde{T}^{(s)}$. Обозначим $R^{(s)}$ множество $M_0^{(s)} \cup M_0^{(s)-1} \cup \tilde{T}^{(s)}$, соответствующее подгруппе H_s, $s \in \{0, 2\}$. Присоединим к множеству $R^{(s)}$ символ $\gamma^{(s)} \notin \overline{G}$, получим множество $\tilde{R}^{(s)}$.

Соотношения (11) определяют следующее отображение:

$$\psi_w : \{1, 2, \dots, k\} \to \{((\mathbb{Z}^+ \times (\tilde{R}^{(0)} \times \mathbb{Z}^+) \times \tilde{T}^{(0)} \times (\tilde{R}^{(0)} \times \mathbb{Z}^+) \times \mathbb{Z}^+) \times$$
$$\times (\mathbb{Z}^+ \times (\tilde{R}^{(2)} \times \mathbb{Z}^+) \times \tilde{T}^{(2)} \times (\tilde{R}^{(2)} \times \mathbb{Z}^+) \times \mathbb{Z}^+))\}, \tag{12}$$

где $\mathbb{Z}^+$ — множество натуральных чисел с нулем, которое согласно лемме 10 определяется следующим образом:

$$\psi_w(i) = ((p_0^{'(0)}(i), (r_1^{(0)}(i), p_1^{(0)}(i)), \tau_1^{(0)}(i), (r_2^{(0)}(i), p_2^{(0)}(i)), p_0^{''(0)}(i)),$$
$$(p_0^{'(2)}(i), (r_1^{(2)}(i), p_1^{(2)}(i)), \tau_1^{(2)}(i), (r_2^{(2)}(i), p_2^{(2)}(i)), p_0^{''(2)}(i))), \tag{12'}$$

здесь номер i соответствует слогу $b_i = a_i^{'(s)} x_i^{(s)} y_i^{(s)} z_i^{(s)} a_i^{''(s)}$ из w, $p_0^{'(s)}(i)$ — номер элемента $a_i^{'(s)}$ в подгруппе $< a_j; a_j^2 >$, то есть принимает значения 0 или 1; $r_1^{(s)}(i) = \gamma^{(s)}$, если $x_i^{(s)} = 1$, то есть

$x_i^{(s)}$ не принимает участия в образовании слога b_i; $r_1^{(s)}(i) = w_1^{(s)}(i) \in \tilde{R}^{(s)} \setminus \{\gamma^{(s)}\}$, если $x_i^{(s)} \neq 1$ и является $p_1^{(s)}(i)$-м слогом в $w_1^{(s)}(i)$; $\tau_1^{(s)}(i) = \beta^{(s)}$, если $y_i^{(s)} = 1$; $\tau_1^{(s)}(i) = (v^{(s)}, j)$, если $y_i^{(s)}$ — слог трансформы типа $(v^{(s)}, j)$; $r_2^{(s)}(i) = \gamma^{(s)}$, если $z_i^{(s)} = 1$; $r_2^{(s)}(i) = w_2^{(s)}(i) \in \tilde{R}^{(s)} \setminus \{\gamma^{(s)}\}$, если $z_i^{(s)} \neq 1$ и является $p_2^{(s)}(i)$-м слогом в $w_2^{(s)}(i)$; $p_0^{''(s)}(i)$ — номер элемента $a_i^{''(s)}$ в подгруппе $< a_j; a_j^2 >$.

Учитывая, что H_0 есть $< z_1 z_2 >$ в формуле (12′): $p_0^{'(0)}(i) = 1, p_0^{''(0)}(i) = 1$ и, в силу того, что $y_i^{(0)} = 1$, имеем $\tau_1^{(0)}(i) = \beta^{(0)}$.

Назовем $\psi_w(i)$ типом слога b_i слова w.

Мощность множества всех типов, согласно (12), (12′) ограничена числом:

$$A_2 = 4(2 \sum_{w^{(2)} \in \tilde{R}^{(2)} \setminus \{\gamma^{(2)}\}} L(w^{(2)}) + 1)^2 |\tilde{T}^{(2)}| (L(z_1 z_2) + 1)^2.$$

Лемма 11. *[16] Если $L(w) > A_2$, где w — слово из (11) и $w \in H_2, w \neq 1$, то существует слово $w' \in H_2, L(w') < L(w)$, удовлетворяющее (11).*

Из [16] следует, что для слова $u_1^{(2)} u_2^{(2)} \dots u_{r_2}^{(2)}$ из (11)

$$L(u_1^{(2)} u_2^{(2)} \dots u_{r_2}^{(2)}) \leq A_2 + L(w_0).$$

Аналогично рассуждаем, рассматривая пересечение $\tilde{z}^{-1} < z_1 z_2 > \cap H_1$.

Итак, мощность множества всех типов для подгрупп H_1, H_2 соответственно ограничена числами:

$$A_j = 4(2 \sum_{w^{(j)} \in \tilde{R}^{(j)} \setminus \{\gamma^{(j)}\}} L(w^{(j)}) + 1)^2 |\tilde{T}^{(j)}| (L(z_1 z_2) + 1)^2, j = \overline{1, 2}.$$

Следовательно, длину слова $\tilde{w}$ можно ограничить следующим образом: $\tilde{w} \leq 2A$, где $A = \max\{A_1, A_2\}$.

Пусть $\tilde{w} = (z_1 z_2)^k z_1$. Рассмотрим двойной класс смежности $H_1 (z_1 z_2)^t z_1 H_2$. Рассуждения аналогичны случаю, когда $\tilde{w} = (z_1 z_2)^k$.

Если $\tilde{w} = z_1$, тогда, как и выше, $|z_1| = m_{ij} - 1, z_1 \in G_{ij}$. В этом случае $\tilde{w} \in G_{ij}$.

Аналогично предыдущему случаю, рассматривается случай $C(a_j) =< a_j, z_1; a_j^2, z_1^2 >, z_1 \in G_{ij}, |z_1| = m_{ij} - 1$.

Таким образом, слово $\tilde{w}$ будем брать из централизатора $C(a_j)$ с учетом ограничения на длину.

Случай 2.2. Пусть подгруппы C_l, C_t содержатся в подгруппе G_{ij} или подгруппе G_{jk}. Рассмотрим возможные случаи.

Допустим, что C_l, C_t порождаются элементом единичной длины, не принадлежащим объединяемой подгруппе.

Пусть $C_l = C_t =< a_i; a_i^2 >$. Тогда (8) имеет вид

$$\tilde{w}^{-1} a_i \tilde{w} = a_i.$$

Если числа m_{ij}, m_{jk} — четные или m_{ij} — четное, а m_{jk} — нечетное, то $C(a_i) =< a_i, z_1; a_i^2, z_1^2 >$, где $z_1 \in G_{ij}, |z_1| = m_{ij} - 1$. Этот случай рассмотрен выше.

Если числа m_{ij} — нечетное, а m_{jk} — четное, то $C(a_i) =< a_i, z_1 z_2 z_1^{-1}; a_i^2, (z_1 z_2 z_1^{-1})^2 >$, $z_1 \in G_{ij}, |z_1| = m_{ij} - 1, z_2 \in G_{jk}, |z_2| = m_{jk} - 1$. В этом случае длина слова $\tilde{w}$ ограничена.

Если числа m_{ij}, m_{jk} — нечетные, то $C(a_i) =< a_i; a_i^2 >$. Этот случай очевиден.

Пусть $C_l =< a_i; a_i^2 >$ и $C_t =< a_k; a_k^2 >$. По лемме 7 если m_{ij}, m_{jk} — нечетные, то $\tilde{w} = \tilde{w'}\tilde{w''}$, где $\tilde{w'} \in G_{jk}, \tilde{w''} \in G_{ij}$, причем $|\tilde{w'}| = m_{jk} - 1, |\tilde{w''}| = m_{ij} - 1$. Тогда $|\tilde{w}| \leq (m_{ij} - 1)(m_{jk} - 1)$. Пусть $m = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Тогда $|\tilde{w}| < m^2 + 1$.

Пусть C_l, C_t порождаются элементом длины больше единицы и содержатся в одной подгруппе G_{ij} или G_{jk}. Предположим, G_{ij}. В этом случае $\tilde{w}$ также принадлежит подгруппе G_{ij} и $|\tilde{w}| < 2m_{ij}$.

Пусть C_l, C_t порождаются элементом длины больше единицы и содержатся в разных подгруппах G_{ij}, G_{jk}. Этот случай невозможен, так как слова конечного порядка длины больше единицы, принадлежащие разным подгруппам не могут быть сопряжены в $\overline{G}$.

В случае 2 мы показали, что длину $\tilde{w}$ всегда можно ограничить.

Имеем $Z = v_l^{-1}\tilde{w}v_t w^{-1}$. Элементов $v_l, \tilde{w}, v_t$ конечное число, элемент w^{-1} принадлежит H, поэтому элементов Z конечное число. Далее нужно построить все такие Z и проверить равенство $Z^{-1}HZ = H$. Теорема доказана.

4. Заключение

В данной работе рассмотрен вопрос о конечной порожденности и построении нормализатора конечно порожденной подгруппы H в свободном произведении $\overline{G} = G_{ij} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$ двупорожденных групп Кокстера G_{ij} и G_{jk} с древесной структурой, объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Основными методами доказательства являются: метод специального множества слов [11], разработанный В. Н. Безверхним как обобщение метода Нильсена [17] на свободные произведения групп с объединением и HNN-расширения; метод типов [14]. Кроме того, используются: результат В. Н. Безверхнего и О. В. Инченко [13] об описании централизатора образующего в группах Кокстера с древесной структурой, результат О. В. Инченко [16] о нахождении пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой, а также решение проблемы вхождения в группах Кокстера с древесной структурой, полученное из теоремы В. Н. Безверхнего [10].

Доказанная в данной статье теорема является базой в исследовании вопроса о конечной порожденности нормализатора конечно порожденной подгруппы в группах Кокстера с древесной структурой.

Полученный автором результат можно рассматривать как некоторое обобщение результата И. С. Безверхней [18] о конечной порожденности нормализатора в свободном произведении групп, где сомножители обладают свойством: нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. №1-1. С. 5-13.

2. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. Vol. 35. P. 588-621.

3. Appel K., Schupp P. Artins groups and infnite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.

4. Лысенок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т.53, №4. С. 814–832.

5. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискрет. матем. 2008. Т.20, №3. С. 101–110.

6. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Чебышевский сб. 2003. Т.4, №1. С. 10-33.

7. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискрет. матем. 2005. Т.17, №3. С. 123–145.

8. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сб. 2010. Т.11, №3. С. 32-56.

9. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О нормализаторах некоторых классов подгрупп в группах кос // Матем. заметки. 2003. Т.74, №1. С. 19-31.

10. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1986. С. 3-21.

11. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп. 1972. С. 3-86.

12. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т.4, №1. С. 199-222.

13. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденнной группы Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сб. 2008. Т. 9, №1. С. 17-27.

14. Безверхний В. Н., Роллов Е. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974. Т.1. С. 16-31.

15. Безверхняя И. С. О корневом замыкании подгрупп свободного произведения групп с объединением //Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1983. С. 81-112.

16. Инченко О. В. О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сб. 2016. Т.17, №2. С. 146–161.

17. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 440 с.

18. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 102-116.

REFERENCES

1. Bezverhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2014, “On freedom problem in Coxeter groups with tree-structure“, *Izvestija TulGU. Estestven nauki*, vol. 1, no. 1, pp. 5-14.

2. Coxeter, H. S. M., 1934, “Discrete groups generated by reflections“, *Ann. Math.*, vol. 35, pp. 588-621.

3. Appel, K., Schupp, P., 1983, “Artins groups and infnite Coxter groups“, *Ivent. Math.*, vol. 72. pp. 201-220.

4. Lysenok, I. G., 1990, “On some algorithmic properties of hyperbolic groups“, *Math. USSR-Izv.*, vol. 35, no. 1, pp. 145-163.

5. Bezverhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2008, “A solution of the power conjugacy problem for words in the Coxeter groups of extra large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 20, no. 3, pp. 101–110.

6. Bezverhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, “Solution of the conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 4, no. 1, pp. 10-33.

7. Bezverhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2005, “Solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 17, no. 3, pp. 123–145.

8. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko O. V., 2010, “Conjugacy problem of subgroups in finitely generated Coxeter groups with tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 11, no. 3, pp. 32-56.

9. Bezverhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, “Normalizers of Some Classes of Subgroups in Braid Groups“, *Mat. Zametki*, vol. 74, no. 1, pp. 19–31.

10. Bezverkhnii, V. N., 1986, “Solution of the occurrence problem in some classes of groups with one defining relation“, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 3-21.

11. Bezverkhnii, V. N., 1972, “The occurrence problem for a class of groups“, *Questions of theory of groups and semigroups*, pp. 3-86.

12. Bezverkhnii, V. N., 1998, “On the intersection subgroups HNN-groups“, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 199-222.

13. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko, O. V., 2010, “The centralizer of elements of finite order of a finitely generated Coxeter group with a tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 9, no. 1, pp. 17-27.

14. Bezverkhnii, V. N. & Rollov E. V., 1974, “On subgroups of free products of groups“, *Modern algebra*, vol. 1, pp. 16-31.

15. Bezverkhnyaya, I. S., 1983, “On root closure of subgroups of amalgamated product of groups“, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 81-112.

16. Inchenko, O. V., 2016, “About the problem of intersection of the adjacency classes of finitely generated subgroups of Coxeter’s group with tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 2, pp. 146–161.

17. Lindon, P. & Shupp, P., 1980, “Combinatory theory of groups“, World, Moscow.

18. Bezverkhnyaya, I. S., 1981, “On conjugacy of finite sets of subgroups in free product of groups“, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, pp. 102-116.

Получено 16.04.2016 г.
Принято в печать 10.06.2016 г.