ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 2

УДК 511.43

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ ФИБОНАЧЧИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ЧИСЕЛ[1]

Е. П. Давлетярова, А. А. Жукова, А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

Обобщенные числа Фибоначчи $\left\{F_i^{(g)}\right\}$, определяемые с помощью рекуррентного соотношения

$$F_{i+2}^{(g)} = gF_{i+1}^{(g)} + F_i^{(g)},$$

и начальных условий $F_0^{(g)} = 1$, $F_1^{(g)} = g$ определяют способ представления натуральных чисел в виде жадного разложения

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n) F_i^{(g)},$$

описываемого при помощи естественных условий на $\varepsilon_i(n)$. В частности, при $g = 1$ получаем хорошо известную систему счисления Фибоначчи. Разложения, получаемые при $g > 1$ будем называть представлениями натуральных чисел в обобщенных системах счисления Фибоначчи.

Настоящая работа посвящена изучению множеств $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$, состоящих из натуральных чисел, имеющих заданное окончание представления в обобщенной системе счисления Фибоначчи. Основным результатом работы является теорема геометризации, описывающая множества $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ в терминах дробных долей вида $\{n\tau_g\}$, $\tau_g = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$. Более строго, для любого допустимого окончания $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ существуют эффективно вычислимые $a, b \in \mathbb{Z}$ такие, что $n \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ тогда и только тогда, когда дробная доля $\{(n+1)\tau_g\}$ принадлежит отрезку $[\{-a\tau_g\}; \{-b\tau_g\}]$. Ранее аналогичная теорема была доказана авторами для классической системы счисления Фибоначчи.

В качестве приложения рассматривается ряд аналогов классических теоретико-числовых задач над множествами $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$. В частности получены асимптотические формулы для количества чисел из данных множеств, принадлежащих заданной арифметической прогрессии, для количества простых чисел из заданного множества, для количества представлений натурального числа в виде суммы заданного числа чисел из данных множеств, а также для чисел решений аналогов задач Лагранжа, Гольдбаха и Хуа-Локена над данными множествами.

Ключевые слова: обобщенные системы счисления Фибоначчи, теорема геометризации, распределение по прогрессиям, проблемы гольдбахова типа.

Библиография: 33 названий.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 14-01-00360-а

GEOMETRIZATION OF THE GENERALIZED FIBONACCI NUMERATION SYSTEM WITH APPLICATIONS TO NUMBER THEORY

E. P. Davlet'yarova, A. A. Zhukova, A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

Generalized Fibonacci numbers $\left\{F^{(g)}i\right\}$ are defined by the recurrence relation

$$F_{i+2}^{(g)} = gF_{i+1}^{(g)} + F_i^{(g)}$$

with the initial conditions $F_0^{(g)} = 1$, $F_1^{(g)} = g$. These numbers generater representations of natural numbers as a greedy expansions

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n) F_i^{(g)},$$

with natural conditions on $\varepsilon_i(n)$. In particular, when $g = 1$ we obtain the well-known Fibonacci numeration system. The expansions obtained by $g > 1$ are called representations of natural numbers in generalized Fibonacci numeration systems.

This paper is devoted to studying the sets $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$, consisting of natural numbers with a fixed end of their representation in the generalized Fibonacci numeration system. The main result is a following geometrization theorem that describe the sets $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ in terms of the fractional parts of the form $\{n\tau_g\}$, $\tau_g = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$. More precisely, for any admissible ending $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ there exist effectively computable $a, b \in \mathbb{Z}$ such that $n \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ if and only if the fractional part $\{(n+1)\tau_g\}$ belongs to the segment $[\{-a\tau_g\}; \{-b\tau_g\}]$. Earlier, a similar theorem was proved by authors in the case of classical Fibonacci numeration system.

As an application some analogues of classic number-theoretic problems for the sets $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ are considered. In particular asymptotic formulaes for the quantity of numbers from considered sets belonging to a given arithmetic progression, for the number of primes from considered sets, for the number of representations of a natural number as a sum of a predetermined number of summands from considered sets, and for the number of solutions of Lagrange, Goldbach and Hua Loken problem in the numbers of from considered sets are established.

Keywords: generalized Fibonacci numeration system, geometrization theorem, distribution in progressions, Goldbach type problem.

Bibliography: 33 titles.

Введение

Рассмотрим последовательность $\left\{F_i^{(g)}\right\}$ определяемую с помощью рекуррентного соотношения

$$F_{i+2}^{(g)} = gF_{i+1}^{(g)} + F_i^{(g)}, \tag{1}$$

где $i \geqslant 0$ и начальных условий $F_0^{(g)} = 1$, $F_1^{(g)} = g$, при $g = 1, 2, 3, \ldots$.

Известно, что любое целое неотрицательное n может быть разложено в сумму различных чисел $\left\{F_i^{(g)}\right\}$ [8]

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n) F_i^{(g)}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_0(n)$ может быть равно $0, 1, \ldots, g-1$, а $\varepsilon_i(n)$, соответственно, $0, 1, \ldots, g$, при $i = 1, 2, \ldots, k$, причем если $\varepsilon_{i+1}(n) = g$, то $\varepsilon_i(n) = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Разложение (2) назовем представлением n в обобщенной системе счисления Фибоначчи.

Для произвольного набора $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ такого, что если $\varepsilon_{i+1}(n) = g$, то $\varepsilon_i(n) = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant l-1$, определим множество

$$\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right) = \left\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, \varepsilon_0(n) = \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l(n) = \varepsilon_l\right\}.$$

Множества $\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)$ представляют собой множества целых неотрицательных чисел, у которых фиксированы $l+1$ последних цифр разложения в обобщенную систему счисления Фибоначчи.

Множество $\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)$ является примером так называемой квазирешетки. В последние годы появилось много работ, посвященных решению различных теоретико-числовых задач над квазирешетками [13], [15], [16], [19], [20], [24].

В частности, В. Г. Журавлев в работе [17] рассмотрел множество $\mathbb{F}^{(1)}(0)$ и решил на этом множестве бинарную аддитивную задачу, а также получил оценки тригонометрических сумм по этому множеству. Метод В.Г. Журавлева основывался на использовании так называемого $\circ$-умножения Фибоначчи–Кнута–Матиясевича [21], [22], [2] и на существовании специального отображения δ из $\circ$-кольца Фибоначчи в кольцо $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Позднее И. К. Швагирева [23], используя этот метод, решила бинарную аддитивную задачу на множестве $\mathbb{F}^{(1)}(0, \ldots, 0)$ для любого числа нулей.

Новый подход к решению ряда теоретико-числовых задач над множеством $\mathbb{F}^{(1)}\left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l\right)$ предложен в работе Е. П. Давлетяровой, А. А. Жуковой, А. В. Шутова [12]. Этот метод основан на геометризации системы счисления Фибоначчи и позволил решить ряд задач, в том числе аддитивную задачу, задачу Лагранжа о четырех квадратов, тернарную проблему Гольдбаха на множестве $\mathbb{F}^{(1)}\left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l\right)$.

Рассмотрим функцию $\chi(n)$, определяемую как

$$\chi(n) = \left\{(n+1)\tau_g\right\},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x, а τ_g – меньший корень уравнения $\tau_g^2 + g\tau_g - 1 = 0$, т.е. $\tau_g = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$. Определим множество

$$X\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right) = \overline{\left\{\chi(n) : n \in \mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)\right\}}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема о геометризации.

Теорема 2. *Для любых наборов ε_0, ..., ε_l, состоящих из целых чисел от нуля до g', где $g' = g-1$ при $i = 0$, и $g' = g$ при $i \geqslant 1$, таких что если $\varepsilon_{i+1}(n) = g$, то $\varepsilon_i(n) = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant l-1$, множество $X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$ есть отрезок $[\{-a\tau_g\}; \{-b\tau_g\}]$, где a, b — эффективно вычислимые целые числа, такие что $0 \leqslant a$, $b < F_l^{(g)} + F_{l+1}^{(g)}$.*

Теорема о геометризации позволяет свести решение теоретико-числовых задач над множеством $\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l\right)$ к решению задач над множествами $\{n : \{n\tau_g\} \in I\}$ для некоторых эффективно вычислимых интервалов I.

Отметим, что множество отрезков $X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$, где ε_0, ..., ε_l, пробегая все допустимые наборы нулей и единиц, порождает разбиение $\mathrm{Til}(l)$ отрезка $[0; 1]$, называемое модифицированным разбиением Фибоначчи. Соответствующие разбиения и их приложения к задачам равномерного распределения дробных долей линейной функции рассматривались в работах [14], [25]–[27], [30]–[32], [5]. Эти разбиения также тесно связаны с так называемой гипотезой Штейнгауза, утверждающей, что для любого целого N и иррационального α точки $\{i\alpha\}$, где $1 \leq i \leq N$, разбивают интервал $(0;1)$ на интервалы не более, чем трех различных длин [4]. В данной статье используется тот же подход, что и в [12].

Работа организована следующим образом. В §2 доказывается ряд свойств обобщенных систем счисления Фибоначчи и функции $\chi(n)$, необходимых в дальнейшем. В §3 дается определение модифицированных разбиений Фибоначчи и доказываются их основные свойства. В §4 мы доказываем теорему геометризации. Наконец §5 посвящен приложениям теоремы геометризации к решению ряда теоретико-числовых задач над множеством $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$. В §5 получены следующие результаты:

1) асимптотическая формула для количества чисел из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, не превосходящих N;

2) асимптотическая формула для количества чисел из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, не превосходящих N и принадлежащих заданной арифметической прогрессии;

3) асимптотическая формула для количества простых чисел из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, не превосходящих N;

4) асимптотическая формула для числа решений аддитивной задачи $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ в числах из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$;

5) асимптотическая формула для числа решений задачи Лагранжа о четырех квадратах $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2=n$ в числах из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$;

6) асимптотическая формула для числа решений тернарной проблемы Гольдбаха $p_1+p_2+p_3=n$ в простых числах из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$;

7) асимптотическая формула для числа решений задачи Хуа–Локена $p_1^2+\ldots+p_5^2=n$ в простых числах с условием $p_i^2\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$;

8) асимптотическая формула для количества чисел из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, не превосходящих N и являющихся значениями заданного многочлена с целыми неотрицательными коэффициентами.

1. Обобщенные системы счисления Фибоначчи

Число $\tau_g=\frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$ является решением уравнения $\tau_g^2+g\tau_g-1=0$.

Применяя метод математической индукции и рекуррентное соотношение (1) можно доказать следующее предложение.

Предложение 1. *Для любого натурального i справедливо равенство*

$$F_i^{(g)}=\tau_g^{-1}F_{i-1}^{(g)}+(-\tau_g)^i\,.$$

Предложение 2. *Для любого целого неотрицательного n, представимого в виде (2), имеет место равенство*

$$[(n+1)\tau_g]=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)},$$

здесь $[x]$ — целая часть от числа x.

Доказательство. Преобразуем $(n+1)\tau_g$, используя представление (2) и утверждение предложения 1. Имеем

$$(n+1)\tau_g=\tau_g\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i(n)F_i^{(g)}+\tau_g=\tau_g+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i(n)\tau_g\left(\tau_g^{-1}F_{i-1}^{(g)}+(-\tau_g)^i\right)=$$

$$=\tau_g+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)}+\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\,\varepsilon_i(n)\tau_g^{i+1}=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)}+r(n),$$

где $r(n) = \tau_g + \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \varepsilon_i(n)\tau_g^{i+1}$.

Покажем вначале, что $r(n) < 1$:

$$r(n) \leqslant \tau_g + \varepsilon_0(n)\tau_g + \varepsilon_2(n)\tau_g^3 + \varepsilon_4(n)\tau_g^5 + \ldots + \varepsilon_{2\left[\frac{k}{2}\right]}(n)\tau_g^{2\left[\frac{k}{2}\right]+1} \leqslant$$

$$\leqslant \tau_g + (g-1)\tau_g + g\tau_g^3 + g\tau_g^5 + \ldots + g\tau_g^{2\left[\frac{k}{2}\right]+1} = 1 - \tau_g^{2\left[\frac{k}{2}\right]+2} < 1.$$

Убедимся теперь, что $r(n) \geqslant 0$

$$r(n) \geqslant \tau_g - \varepsilon_1(n)\tau_g^2 - \varepsilon_3(n)\tau_g^4 - \varepsilon_5(n)\tau_g^6 - \ldots \geqslant \tau_g - g\tau_g^2 - g\tau_g^4 - g\tau_g^6 - \ldots = 0.$$

Таким образом получаем, что $0 \leqslant r(n) < 1$, поэтому

$$[(n+1)\tau_g] = \left[\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)} + r(n)\right] = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)} + [r(n)] = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)}.$$

В разложении (2) заменим $F_i^{(g)}$ на $F_{i+1}^{(g)}$ и получим новое натуральное число $\overrightarrow{n}$, представимое как

$$\overrightarrow{n} = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_{i+1}^{(g)}, \tag{3}$$

где если $\varepsilon_{i+1}(n) = 1$, то $\varepsilon_i(n) = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant l-1$, называемое g-сдвигом Фибоначчи числа n.

Предложение 3. *Для любого целого неотрицателного n справедливо равенство*

$$\overrightarrow{n} = gn + [(n+1)\tau_g].$$

Доказательство. Преобразуем разность $\overrightarrow{n} - gn$ с помощью представления (2) и (3)

$$\overrightarrow{n} - gn = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_{i+1}^{(g)} - g\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_i^{(g)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)\left(F_{i+1}^{(g)} - gF_i^{(g)}\right) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n)F_{i-1}^{(g)}.$$

Используя предложение 2, получаем $\overrightarrow{n} - gn = [(n+1)\tau_g]$ или $\overrightarrow{n} = gn + [(n+1)\tau_g]$.

Пусть функция $\chi(n) = \{(n+1)\tau_g\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Значения функции $\chi(n)$ равномерно распределены по интервалу $(0;1)$, так как согласно теореме Вейля при любом иррациональном α последовательность $\{\alpha n\}$, где $n = 1, 2, \ldots$, равномерно распределена по модулю 1 и $\{\alpha n\} = 0$ только при $n = 0$.

Предложение 4. *Для любого n справедливо равенство*

$$\chi(\overrightarrow{n}) = 1 - (g - 1 + \chi(n))\,\tau_g.$$

Доказательство. По определению $\chi(\overrightarrow{n}) = \{\overrightarrow{n}\tau_g + \tau_g\}$, поэтому воспользовавшись предложением 3, находим

$$\chi(\overrightarrow{n}) = \{(gn + [(n+1)\tau_g])\,\tau_g + \tau_g\} = \{(gn+1)\tau_g + [(n+1)\tau_g]\,\tau_g\}.$$

Зная, что $[x] = x - \{x\}$, имеем

$$\chi(\overrightarrow{n}) = \{(gn+1)\tau_g + ((n+1)\tau_g - \{(n+1)\tau_g\})\,\tau_g\} =$$
$$= \{(gn+1)\tau_g + (n+1)(1-g\tau_g) - \{(n+1)\tau_g\}\,\tau_g\} =$$
$$= \{-(g-1)\tau_g - \chi(n)\tau_g\} = \{-\,(g-1+\chi(n))\,\tau_g\}\,.$$

Согласно определению $\chi(n) \in (0;1)$, следовательно, $g-1+\chi(n) \in (g-1;g)$ и $(g-1+\chi(n))\,\tau_g \in$ $\in ((g-1)\tau_g; g\tau_g) \subset (0;1)$. Кроме того известно, что если $0 < x \leqslant 1$, то $\{-x\} = 1 - \{x\}$, поэтому

$$\chi(\overrightarrow{n}) = \{-\,(g-1+\chi(n))\,\tau_g\} = 1 - (g-1+\chi(n))\,\tau_g.$$

Предложение 5. *Для любого целого неотрицательного n и целых $0 \leqslant t \leqslant g-1$ и $0 \leqslant h \leqslant g-1$ справедливы соотношения*

$$\chi(\overrightarrow{n}+t) \in (1-(g-t)\tau_g; 1-(g-t-1)\tau_g)\,, \tag{4}$$

$$\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}+t}+h\right) \in \left(g-t-(g^2-gt-h)\tau_g; g-t+1-(g^2-gt+g-h)\tau_g\right), \tag{5}$$

$$\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+h\right) \in \left(g-(g^2-h)\tau_g; g+1-(g^2+g-h)\tau_g\right), \tag{6}$$

$$\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2\right) \in (0;1-g\tau_g)\,, \tag{7}$$

$$\chi\left(\overline{\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2}+h\right) \in \left(g+1-(g^2+g-h)\tau_g; 1-(g-h-1)\tau_g\right). \tag{8}$$

Доказательство. Значения функции $\chi(n)$ равномерно распределены по интервалу $(0;1)$, поэтому

$$g-1+\chi(n) \in (g-1;g), \qquad (g-1+\chi(n))\,\tau_g \in ((g-1)\tau_g; g\tau_g),$$
$$1-(g-1+\chi(n))\,\tau_g \in (1-g\tau_g; 1-(g-1)\tau_g).$$

Воспользуемся утверждением предложения 4 и получим

$$\chi(\overrightarrow{n}) \in (1-g\tau_g; 1-(g-1)\tau_g)\,. \tag{9}$$

Распишем по определению

$$\chi(\overrightarrow{n}+t) = \{(\overrightarrow{n}+t+1)\,\tau_g\} = \{\chi(\overrightarrow{n}) + t\tau_g\}\,.$$

Учитывая (9), получим

$$\chi(\overrightarrow{n}) + t\tau_g \in (1-(g-t)\tau_g; 1-(g-t-1)\tau_g)\,.$$

Убедимся, что $\chi(\overrightarrow{n}) + t\tau_g \in (0;1)$. Для этого введем две функции $l(t) = 1-(g-t)\tau_g$ и $r(t) = 1-(g-t-1)\tau_g$. Так как $l'(t) = r'(t) = \tau_g > 0$, значит функции $l(t)$ и $r(t)$ возрастают на отрезке $[1;g-1]$, то $l(1) = \tau_g^2 + \tau_g > 0$ – наименьшее значение $l(t)$, а $r(g-1) = 1$ – наибольшее значение функции $r(t)$ на указанном отрезке. Следовательно, соотношение (4) доказано.

Рассуждая аналогично, получаем остальные утверждения предложения 5.

Пусть n представимо в виде (2). Обозначим $\mathbb{F}_j(i) = \{n : \varepsilon_i(n) = j\}$, $\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)} = \{n : \varepsilon_{i+1}(n) = j\}$, $\overleftarrow{\mathbb{F}_j(i)} = \{n : \varepsilon_{i-1}(n) = j\}$, где $j = 0, 1, \ldots, g'$. Здесь и далее будем полагать $g' = g-1$ при $i = 0$ и $g' = g$ при $i \geqslant 1$.

Предложение 6. *Для любого $i \geqslant 0$ и $j = 0, 1, \ldots, g'$ справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_j(i+2) = \left(\bigcup_{t=0}^{g-1} \left(\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)} + t \right) \right) \cup \left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}} + g^2 \right). \tag{10}$$

Доказательство. Вначале докажем, что

$$\left(\bigcup_{t=0}^{g-1} \left(\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)} + t \right) \right) \cup \left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}} + g^2 \right) \subseteq \mathbb{F}_j(i+2). \tag{11}$$

Пусть $n \in \mathbb{F}_j(i+1)$, т.е. $\varepsilon_{i+1}(n) = j$, тогда если $n' = \overrightarrow{n}$, то $\varepsilon_{i+2}(n') = j$, т.е. $n' \in \overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)}$, так как согласно определению $\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)} = \{n' : \varepsilon_{i+2}(n') = j\}$, причем $\varepsilon_0(n')$ может быть равно одному из чисел $0, 1, \ldots, g-1$.

Таким образом, разложение числа n' удовлетворяет условиям разложения (2) с дополнительным условием $\varepsilon_{i+2}(n') = j$, т.е. $n' \in \mathbb{F}_j(i+2)$.

Пусть теперь $n \in \mathbb{F}_j(i)$, т.е. $\varepsilon_i(n) = j$. Если $n' = \overrightarrow{\overrightarrow{n}}$, то $\varepsilon_{i+2}(n') = j$, т.е. $n' \in \overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}}$, так как $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}} = \{n' : \varepsilon_{i+2}(n') = j\}$, причем выбрав $\varepsilon_0(n') = 0$, а $\varepsilon_1(n') = g$, то получим числа $n' \in \overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}} + g^2$, у которых выполнены условия разложения (2). Тем самым прямое включение (11) доказано.

Докажем обратное включение. Пусть $n \in \mathbb{F}_j(i+2)$, т.е. $\varepsilon_{i+2}(n) = j$. Рассмотрим два случая: $\varepsilon_1(n) = s$, где $0 \leqslant s \leqslant g-1$, или $\varepsilon_1(n) = g$.

Если $\varepsilon_1(n) = s$, где $0 \leqslant s \leqslant g-1$, то число $n' = \overleftarrow{n}$ таково, что $\varepsilon_0(n') = s$, т.е. $n' \in \overleftarrow{\mathbb{F}_j(i+2)} = \{n' : \varepsilon_{i+1}(n') = j\}$. Поэтому для числа n' выполнены условия разложения (2).

Если же $\varepsilon_1(n) = g$, то согласно свойствам разложения (2) $\varepsilon_2(n) = 0$. Положим $n' = \overleftarrow{\overleftarrow{n}}$, тогда $n' \in \overleftarrow{\overleftarrow{\mathbb{F}_j(i+2)}}$, где $\overleftarrow{\overleftarrow{\mathbb{F}_j(i+2)}} = \{n' : \varepsilon_i(n') = j\}$, причем $\varepsilon_0(n') = 0$, т.е. n' удовлетворяет условиям разложения (2).

Таким образом,

$$\mathbb{F}_j(i+2) \subseteq \left(\bigcup_{t=0}^{g-1} \left(\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)} + t \right) \right) \cup \left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}} + g^2 \right).$$

Из справедливости включений в ту и другую сторону следует, что равенство (10) выполняется.

Обозначим через $X_j(i)$ замыкание множества значений функции $\chi(n)$, где $n \in \mathbb{F}_j(i)$, то есть $X_j(i) = \overline{\{\chi(n) : n \in \mathbb{F}_j(i)\}}$, где $j = 0, 1, \ldots, g'$.

Предложение 7. *При любых целых неотрицательных i справедливо равенство*

$$X_j(i+2) = \left(\bigcup_{t=0}^{g-1} \left(1 - \left(t + X_j\left(i+1\right)\right) \tau_g\right) \right) \cup \tau_g^2 X_j\left(i\right), \tag{12}$$

где $j = 0, 1, \ldots, g'$. Более того, множества $X_j(i)$ состоят из конечного числа отрезков.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по i. Вначале рассмотрим случай $i = 0$. Если $j = 0$, то по определению $X_0(0) = \overline{\{\chi(m) : m \in \mathbb{F}_0(0)\}}$. Очевидно, что число $m \in \mathbb{F}_0(0)$ можно получить двумя способами: $m = \overrightarrow{n}$ и $m = \overrightarrow{\overrightarrow{n}} + g^2$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$.

Применим соотношения (4) при $t = 0$, (7) и получим

$$X_0(0) \subseteq \chi\left(\overrightarrow{n}\right) \cup \chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}} + g^2\right) \in (1 - g\tau_g; 1 - (g-1)\tau_g) \cup (0; 1 - g\tau_g) \subseteq$$

$$\subseteq (0; 1 - (g-1)\tau_g)\,.$$

В силу теоремы Вейля можно утверждать, что $X_0(0) = [0; 1 - (g-1)\tau_g]$.

Если $1 \leqslant j \leqslant g-1$, то множество $X_j(0) = \overline{\{\chi(m) : m \in \mathbb{F}_j(0)\}}$. Любое m из $\mathbb{F}_j(0)$ может быть получено с помощью g-сдвига Фибоначчи и добавления натурального числа j, т.е. $m = \overrightarrow{n} + j$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$.

Таким образом, пользуясь (4), имеем

$$X_j(0) \subseteq (1 - (g-j)\tau_g; 1 - (g-j-1)\tau_g)$$

и, следовательно, в силу теоремы Вейля $X_j(0) = [1 - (g-j)\tau_g; 1 - (g-j-1)\tau_g]$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{j=0}^{g-1} X_j(0) = [0; 1]$.

Пусть $i = 1$, тогда если $j = 0$, то $X_0(1) = \overline{\{\chi(m) : m \in \mathbb{F}_0(1)\}}$. Число m из множества $\mathbb{F}_0(1)$ может быть получено одним из четырех способов: либо $m = \overrightarrow{\overrightarrow{n}}$, либо $m = \overrightarrow{\overrightarrow{n}} + h$, либо $m = \overrightarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{n}} + g^2}$, либо $m = \overline{\overrightarrow{\overrightarrow{n}} + g^2} + h$, где $1 \leqslant h \leqslant g-1$, $n \geqslant 0$ и n, $h \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$X_0(1) \subseteq \chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{n}} + g^2}\right) \cup \left(\bigcup_{h=0}^{g-1}\left(\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}} + h\right) \cup \chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\overrightarrow{n}} + g^2} + h\right)\right)\right).$$

Используя соотношения (6) и (8), получаем

$$X_0(1) \subseteq \left(\bigcup_{h=0}^{g-1}\left((g - (g^2 - t)\tau_g; g + 1 - (g^2 + g - h)\tau_g\right) \cup\right.$$

$$\left.\cup \left(g + 1 - (g^2 + g - h)\tau_g; 1 - (g - h - 1)\tau_g)\right)\right) =$$

$$= \bigcup_{h=0}^{g-1}\left(g - (g^2 - h)\tau_g; 1 - (g - h - 1)\tau_g\right).$$

Пользуясь равномерностью распределения значений функции $\chi(n)$, можем записать

$$X_0(1) = \bigcup_{h=0}^{g-1}\left[g - (g^2 - h)\tau_g; 1 - (g - h - 1)\tau_g\right].$$

Если $1 \leqslant j \leqslant g-1$, то согласно определению $X_j(1) = \overline{\{\chi(m) : m \in \mathbb{F}_j(1)\}}$, поэтому если $m \in \mathbb{F}_j(1)$, то $m = \overrightarrow{\overrightarrow{n} + j}$ или $m = \overrightarrow{\overrightarrow{n} + j} + h$, где $1 \leqslant h \leqslant g-1$, $n \geqslant 0$ и n, $h \in \mathbb{Z}$. Применяя (5), имеем

$$X_j(1) \subseteq \left(\bigcup_{h=0}^{g-1}\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n} + j} + h\right)\right) \in$$

$$\in \bigcup_{h=0}^{g-1}\left(g - j - (g^2 - gj - h)\tau_g; g - j + 1 - (g^2 - gj + g - h)\tau_g\right).$$

В силу теоремы Вейля можно утверждать, что

$$X_j(1)=\bigcup_{h=0}^{g-1}\left[g-j-(g^2-gj-h)\tau_g;g-j+1-(g^2-gj+g-h)\tau_g\right].$$

Если же $j=g$, то множество $X_g(1)=\overline{\{\chi(m):m\in\mathbb{F}_g(1)\}}$. Все числа m, принадлежащие $\mathbb{F}_g(1)$, получаются только одним способом $m=\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2$, где $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$. Соотношение (7) позволяет прийти к выводу, что

$$X_g(1)\subseteq\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2\right)\in(0;1-g\tau_g).$$

Значения $\chi(n)$ равномерно распределены по указанному промежутку, поэтому

$$X_g(1)=[0;1-g\tau_g].$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\bigcup\limits_{j=0}^{g}X_j(1)=[0;1]$.

Все остальные $X_j(i)$, где $i\geqslant 2$ и $j=0,1,\ldots,g$ можно найти, пользуясь утверждением предложения 6, согласно которому

$$X_j(i+2)=\overline{\left\{\chi(m):m\in\left(\bigcup_{h=0}^{g-1}\left(\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)}+h\right)\right)\cup\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}}+g^2\right)\right\}}.$$

Если $m\in\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i+1)}+h$, то $m=\overrightarrow{n}+h$, где $n\in\mathbb{F}_j(i+1)$, и $0\leqslant h\leqslant g-1$, а если $m\in\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{F}_j(i)}}+g^2$, то $m=\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2$, где $n\in\mathbb{F}_j(i)$.

По определению

$$\chi\left(\overrightarrow{n}+h\right)=\left\{\chi\left(\overrightarrow{n}\right)+h\tau_g\right\}\quad\text{и}\quad\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2\right)=\left\{\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}\right)+g^2\tau_g\right\},$$

значит применив предложение 4, получим

$$\chi\left(\overrightarrow{n}\right)+h\tau_g=1-(g-h-1+\chi(n))\,\tau_g\subset(0;1)$$

и

$$\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}\right)+g^2\tau_g=(g+\chi(n))\,\tau_g^2+g^2\tau_g\subset(g;g+\tau_g^2),$$

поэтому $\chi\left(\overrightarrow{n}+h\right)=1-(g-h-1+\chi(n))\,\tau_g$, а $\chi\left(\overrightarrow{\overrightarrow{n}}+g^2\right)=(\chi(n))\,\tau_g^2$, следовательно,

$$X_j(i+2)=\left(\bigcup_{h=0}^{g-1}\left(1-(g-h-1+X_j\left(i+1\right))\,\tau_g\right)\right)\cup\tau_g^2X_j\left(i\right)=$$

$$=\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}\left(1-(t+X_j\left(i+1\right))\,\tau_g\right)\right)\cup\tau_g^2X_j\left(i\right).$$

Преобразования $1-(g-t+X_j\left(i-1\right))\,\tau_g$ и $\tau_g^2X_j\left(i-2\right)$ переводят отрезок в отрезок. Множества $X_j\left(1\right)$ и $X_j\left(0\right)$ — это отрезки, следовательно, при любом натуральном i множества $X_j(i)$ — объединение конечного числа отрезков.

2. g-разбиения Фибоначчи

Пусть имеется некоторое разбиение $R(i)$ отрезка $[0;1]$ на части, длины которых равны l_1 и l_2, причем таковы, что $gl_1 < l_2$ и $(g+1)l_1 > l_2$. Введем два преобразования B_1 и B_2 данного разбиения.

Преобразование $B_1(R(i))$ состоит в откладывании g раз от левых концов отрезков разбиения $R(i)$ наименьшего из отрезков этого разбиения. В результате получаем новое разбиение $R(i+1)$, начинающееся с наименьшего из отрезков разбиения $R(i)$ и имеющее большее число отрезков.

При выполнении преобразования $B_2(R(i))$ от правых концов отрезков разбиения $R(i)$ откладывается g раз наименьший из отрезков разбиения $R(i)$. Полученное разбиение $R(i+1)$ будет иметь больше отрезков, чем $R(i)$, причем крайним правым отрезком разбиения будет наименьший из отрезков разбиения $R(i)$.

Определим преобразование $l + R(i)$, где $l = 1, 2, \ldots, g$, как сдвиг всех отрезков разбиения $R(i)$ на l единиц вправо.

Также введем преобразование $1 - R(i)$, заключающееся в откладывании от единицы влево отрезков разбиения $R(i)$, начиная с крайнего левого.

Предложение 8. *Пусть $R(i)$ некоторое разбиение отрезка $[0;1]$ на части, длины которых могут быть только l_1 и l_2, причем $gl_1 < l_2$, а $(g+1)l_1 > l_2$, тогда*

$$B_1(1 - R(i)) = 1 - B_2(R(i)) \qquad \text{и} \qquad B_2(1 - R(i)) = 1 - B_1(R(i)).$$

Доказательство. Докажем справедливость равенства

$$B_1(1 - R(i)) = 1 - B_2(R(i)).$$

Преобразование $B_1(1 - R(i))$ состоит из двух более простых преобразований. В результате выполнения $1 - R(i)$ получим разбиение, у которого порядок следования отрезков обратный к $R(i)$, а длины отрезков те же. Затем осуществляем преобразование B_1. В итоге получим, что от всех левых концов отрезков разбиения $1 - R(i)$ отложен g раз наименьший из отрезков разбиения $R(i)$.

При осуществлении преобразования $1 - B_2(R(i))$ сначала от правых концов отрезков разбиения $R(i)$ g раз откладывается наименьший из отрезков, а затем меняется порядок следования отрезков на противоположный. Таким образом, получим точно такие же отрезки, как и в результате преобразования $B_1(1 - R(i))$.

Предложение 9. *Пусть $R(i)$ некоторое разбиение отрезка $[0;1]$ на части, длины которых могут быть только l_1 и l_2, причем $gl_1 < l_2$, а $(g+1)l_1 > l_2$, тогда*

$$B_1(l + R(i)) = l + B_1(R(i)) \qquad \text{и} \qquad B_2(l + R(i)) = l + B_2(R(i)).$$

Доказательство. Убедимся в справедливости равенства

$$B_1(l + R(i)) = l + B_1(R(i)).$$

Преобразование $B_1(l + R(i))$ состоит из двух преобразований. При выполнении $l + R(i)$ все отрезки разбиения $R(i)$ сдвигаются на l вправо, поэтому порядок следования и длины отрезков у разбиений $l + R(i)$ и $R(i)$ одинаковые. Затем делаем преобразование B_1. В итоге получим, что от каждого из левых концов отрезков разбиения $l + R(i)$ g раз отложен наименьший из отрезков разбиения $R(i)$.

Выполняя преобразования $l + B_1(R(i))$ вначале от левых концов отрезков разбиения $R(i)$ g раз откладывается наименьший из отрезков, а после этого происходит сдвиг всех частей разбиения на l единиц вправо. Значит в результате получится такое же разбиение как и после выполнения преобразования $B_1\left(l+R(i)\right)$.

Рассмотрим разбиение $\mathrm{Til}(1)$, состоящее из $g+1$ отрезка:

$$\left[0;\tau_g^2\right],\ \left[\tau_g^2;\tau_g+\tau_g^2\right],\ \left[\tau_g+\tau_g^2;2\tau_g+\tau_g^2\right],\ \ldots,\ \left[(g-1)\tau_g+\tau_g^2;1\right].$$

Индуктивно определим разбиение $\mathrm{Til}(i+1)$, получаемое из разбиения $\mathrm{Til}(i)$ с помощью преобразования B, задаваемого следующим образом:

$$B\left(\mathrm{Til}(i)\right)=\begin{cases} B_1\left(\mathrm{Til}(i)\right), & \text{если} \quad i-\text{нечетное},\\ B_2\left(\mathrm{Til}(i)\right), & \text{если} \quad i-\text{четное}.\end{cases}$$

Разбиения $\mathrm{Til}(i)$ называются модифицированными разбиениями Фибоначчи. Впервые они были определены другим способом в работе [33] при изучении проблемы Гекке–Кестена, заключающейся в получении явных оценок остаточного члена проблемы равномерного распределения дробных долей линейной функции для множеств, на которых данный остаточный член имеет порядок $O(1)$ (множествах ограниченного остатка).

Предложение 10. *Разбиение* $\mathrm{Til}(i)$ *состоит из отрезков только двух длин* τ_g^i *и* τ_g^{i+1}.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по i. Разбиение $\mathrm{Til}(1)$ состоит из g отрезков длины τ_g и одного длины τ_g^2.

Предположим, что разбиение $\mathrm{Til}(i)$ состоит из отрезков длины τ_g^i и τ_g^{i+1}. Найдем длины отрезков разбиения $\mathrm{Til}(i+1)=B\left(\mathrm{Til}(i)\right)$. Преобразование B состоит в откладывании от одного из концов длинных отрезков разбиения $\mathrm{Til}(i)$ g отрезков наименьшей длины, т.е. длины τ_g^{i+1}. При этом отрезок длиной τ_g^i разобьется на $g+1$ отрезков: g отрезков длиной τ_g^{i+1} и один отрезок длины $\tau_g^i-g\tau_g^{i+1}=\tau_g^i(1-g\tau_g)=\tau_g^{i+2}$, что и требовалось доказать.

Предложение 11. *Для любого* $i\geqslant 1$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{Til}(i+2)=\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}\left(1-\left(t+\mathrm{Til}(i+1)\right)\tau_g\right)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(i). \tag{13}$$

Доказательство. Применим индукцию по i. При $i=1$ разбиение $\mathrm{Til}(1)$ состоит из g отрезков длины τ_g и одного отрезка длины τ_g^2: $[0;1-g\tau_g]$, $[1-g\tau_g;1-(g-1)\tau_g]$, $[1-(g-1)\tau_g;1-(g-2)\tau_g]$, $\ldots$, $[1-g\tau_g;1]$ или

$$\mathrm{Til}(1):\ [0;1-g\tau_g]\,,[1-s\tau_g;1-(s-1)\tau_g]\,,\quad \text{где}\quad 1\leqslant s\leqslant g. \tag{14}$$

По определению $\mathrm{Til}(2)=B\left(\mathrm{Til}(1)\right)=B_1\left(\mathrm{Til}(1)\right)$. Если от левых концов отрезков разбиения $\mathrm{Til}(1)$ отложить по g отрезков длиной τ_g^2, то каждый из длинных отрезков данного разбиения разделится на $g+1$ отрезков, из которых g имеют длину τ_g^2 и один τ_g^3, а именно: $[0;1-g\tau_g]$, $\left[1-s\tau_g+(p-1)\tau_g^2;1-s\tau_g+p\tau_g^2\right]$, $\left[1-s\tau_g+g\tau_g^2;1-(s-1)\tau_g\right]$, где $1\leqslant s\leqslant g$ и $1\leqslant p\leqslant g$.

В свою очередь $\mathrm{Til}(3)=B\left(\mathrm{Til}(2)\right)=B_2\left(\mathrm{Til}(2)\right)$, поэтому отложив от правых концов отрезков разбиения $\mathrm{Til}(2)$ g раз отрезок меньшей длины, равной τ_g^3, получим разбиение $\mathrm{Til}(3)$: $\left[0;1-g\tau_g-g\tau_g^3\right]$, $\left[1-g\tau_g-l\tau_g^3;1-\ -g\tau_g-(l-1)\tau_g^3\right]$, $\left[1-s\tau_g+(p-1)\tau_g^2;1-s\tau_g+p\tau_g^2-g\tau_g^3\right]$, $\left[1-s\tau_g+p\tau_g^2\ -l\tau_g^3;1-s\tau_g+p\tau_g^2-(l-1)\tau_g^3\right]$, $\left[1-s\tau_g+g\tau_g^2;\ \ 1-(s-1)\tau_g\right]$, где $1\leqslant s\leqslant g$, $1\leqslant p\leqslant g$ и $1\leqslant l\leqslant g$.

Воспользуемся равенствами $\tau_g^3=-g+\left(g^2+1\right)\tau_g$ и $\tau_g^2=1-g\tau_g$ и преобразуем концы отрезков разбиений $\mathrm{Til}(2)$, $\mathrm{Til}(3)$ к виду $a-b\tau_g$. В таком случае

$$\mathrm{Til}(2):\ [0;1-g\tau_g]\,,[p-(pg-g+s)\tau_g;p+1-(pg+s)\tau_g]\,,$$

$$\left[g+1-\left(g^2+s\right)\tau_g;1-(s-1)\tau_g\right]; \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Til}(3):\ \left[0;g^2+1-\left(g^3+2g\right)\tau_g\right],\left[gl+1-\left(g^2l+l+g\right)\tau_g;gl-g+1-\right.\\ \left.-\left(g^2l-g^2+l+g-1\right)\tau_g\right],\left[p-(pg-g+s)\tau_g;g^2+p+1-\left(g^3+pg+\right.\right.\\ \left.\left.+g+s\right)\tau_g\right],\left[gl+p+1-\left(g^2l+pg+s+l\right)\tau_g;gl-g+p+1-\left(g^2l+pg-\right.\right.\\ \left.\left.-g^2+l+s-1\right)\tau_g\right],\left[g+1-\left(g^2+s\right)\tau_g;1-(s-1)\tau_g\right],\end{gathered} \tag{16}$$

где $1\leqslant s\leqslant g$, $1\leqslant p\leqslant g$ и $1\leqslant l\leqslant g$.

Зная вид разбиения Til(1) (14) находим

$$\tau_g^2\mathrm{Til}(1):\ \left[0;g^2+1-\left(g^3+2g\right)\tau_g\right],$$

$$\left[sg+1-\left(sg^2+s+g\right)\tau_g;sg-g+1-\left(sg^2-g^2+s+g-1\right)\tau_g\right],$$

где $1\leqslant s\leqslant g$. Заменяя переменную s на переменную l, убеждаемся, что $\tau_g^2\mathrm{Til}(1)$ является частью разбиентия Til(3).

Применяя результат (15) получаем

$$\begin{gathered}\bigcup_{t=0}^{g-1}\left(1-(t+\mathrm{Til}(2))\,\tau_g\right):\left[g+1-(g^2+t+1)\tau_g;1-t\tau_g\right],\left[pg+s+1-\right.\\ \left.-\left(pg^2+sg+p+t+1\right)\tau_g;pg-g+s+1-\left(pg^2-g^2+sg+p+t\right)\tau_g\right],\\ \left[s-(sg-g+t+1)\,\tau_g;g^2+s+1-(g^3+sg+s+t+1)\tau_g\right],\end{gathered} \tag{17}$$

где $1\leqslant s\leqslant g$, $1\leqslant p\leqslant g$ и $0\leqslant t\leqslant g-1$.

Покажем, что полученные отрезки эквивалентны отрезкам разбиения Til(3), записанные в (16). Заменим в (17) все p на l, а s на p имеем

$$\begin{gathered}\left[g+1-(g^2+t+1)\tau_g;1-t\tau_g\right],\left[gl+p+1-\right.\\ \left.-\left(g^2l+pg+l+t+1\right)\tau_g;gl-g+p+1-\left(g^2l-g^2+pg+l+t\right)\tau_g\right],\\ \left[p-(pg-g+t+1)\,\tau_g;g^2+p+1-(g^3+pg+p+t+1)\tau_g\right],\end{gathered}$$

где $1\leqslant l\leqslant g$, $1\leqslant p\leqslant g$ и $0\leqslant t\leqslant g-1$. Затем заменяем t на $s-1$ и получаем отрезки, совпадающие с частью отрезков (16).

Таким образом, справедливо равенство

$$\mathrm{Til}(3)=\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}\left(1-(t+\mathrm{Til}(2))\,\tau_g\right)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(1).$$

Предположим, что тождество верно при $i=m$, т.е.

$$\mathrm{Til}(m+2)=\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}\left(1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\,\tau_g\right)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(m). \tag{18}$$

Пусть $i=m+1$, тогда согласно определению $\mathrm{Til}(m+3)=B\left(\mathrm{Til}(m+2)\right)$, где $B=B_1$ или $B=B_2$. Воспользуемся равенством (18) и запишем

$$\mathrm{Til}(m+3)=B\left(\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}\left(1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\,\tau_g\right)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(m)\right).$$

Длины отрезков разбиений $1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\,\tau_g$ и $\tau_g^2\mathrm{Til}(m)$ согласно предложению 10 равны τ_g^{m+2} и τ_g^{m+3}. После выполнения преобразования B длины отрезков станут τ_g^{m+3} и τ_g^{m+4}. Преобразование B состоит в откладывании наименьшего из отрезков от одного из концов отрезков разбиения $\left(\bigcup\limits_{t=0}^{g-1}(1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\,\tau_g)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(m)$. Очевидно, что

$$B\left(\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}(1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\,\tau_g)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(m)\right)=$$

$$=\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}B\,(1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\,\tau_g)\right)\cup B\left(\tau_g^2\mathrm{Til}(m)\right).$$

Воспользуемся предложениями 8 и 9, и получим

$$B\,(1-(t+\mathrm{Til}(m+1))\tau_g)=1-(t+B\,(\mathrm{Til}(m+1)))\tau_g=1-(t+\mathrm{Til}(m+2))\tau_g$$

и

$$B\left(\tau_g^2\mathrm{Til}(m)\right)=\tau_g^2B\,(\mathrm{Til}(m))=\tau_g^2\mathrm{Til}(m+1).$$

Таким образом, находим, что

$$\mathrm{Til}(m+3)=\left(\bigcup_{t=0}^{g-1}(1-(t+\mathrm{Til}(m+2))\,\tau_g)\right)\cup\tau_g^2\mathrm{Til}(m+1).$$

Рассмотрим разбиение $T(i)$ отрезка $[0;1]$ на отрезки вида $[\{-a\tau_g\};\{-b\tau_g\}]$, где a, b — целые неотрицательные числа, определяемые по следующему правилу:

$$a=m,\quad \text{где}\quad 0\leqslant m<F_{i-1}^{(g)}+F_i^{(g)};$$

при i — четном:

$$b=\begin{cases} m+F_{i-1}^{(g)}, & \text{если}\quad 0\leqslant m<F_i^{(g)},\\ m-F_i^{(g)}, & \text{если}\quad F_i^{(g)}\leqslant m<F_{i-1}^{(g)}+F_i^{(g)},\end{cases}$$

при i — нечетном:

$$b=\begin{cases} m+F_i^{(g)}, & \text{если}\quad 0\leqslant m<F_{i-1}^{(g)},\\ m-F_{i-1}^{(g)}, & \text{если}\quad F_{i-1}^{(g)}\leqslant m<F_{i-1}^{(g)}+F_i^{(g)}.\end{cases}$$

Если $b=0$, то отрезок имеет вид $[\{-a\tau_g\};1]$.

Предложение 12. *Разбиения* $\mathrm{Til}(i)$ *и* $T(i)$ *совпадают при всех* $i\geq 1$.

Доказательство. Вначале убедимся, что длины отрезков разбиения $T(i)$ равны τ_g^{i+1} и τ_g^i.

При i — четном отрезки будут двух видов $\left[\{-m\tau_g\};\{-\left(m+F_{i-1}^{(g)}\right)\tau_g\}\right]$, где $0\leqslant m<F_i^{(g)}$, и $\left[\{-m\tau_g\};\{-\left(m-F_i^{(g)}\right)\tau_g\}\right]$, где $F_i^{(g)}\leqslant m<F_{i-1}^{(g)}+F_i^{(g)}$. Длины этих отрезков равны длинам отрезков $\left[0;\{-F_{i-1}^{(g)}\tau_g\}\right]$ и $\left[0;\{F_i^{(g)}\tau_g\}\right]$, соответственно.

Легко убедиться, что $\left\{(-1)^i\,F_i^{(g)}\tau_g\right\}=\tau_g^{i+1}$, поэтому длины указанных отрезков равны $\left\{-F_i^{(g)}\tau_g\right\}=\tau_g^i$ и $\left\{F_i^{(g)}\tau_g\right\}=\tau_g^{i+1}$, причем отрезков длины τ_g^i в разбиении $T(i)$ всего $F_{i-1}^{(g)}$, а длины τ_g^{i+1}, соответственно, $F_i^{(g)}$. В случае нечетного i аналогично получаем отрезки только двух длин τ_g^{i+1} и τ_g^i в тех же количествах.

Рассматривая координаты концов отрезков разбиений $T(i)$ и $T(i+1)$, убеждаемся, что все короткие отрезки разбиения $T(i)$ становятся длинными в разбиении $T(i+1)$. Каждый из длинных отрезков разбиения $T(i)$ распадается на $g+1$ отрезков: один короткий и g длинных разбиения $T(i+1)$, причем при i нечетном слева будет короткий, а при i четном — справа.

Итак, имеем
$$T(i+1) = \begin{cases} B_1\left(T(i)\right), & \text{если} \quad i - \text{нечетное}, \\ B_2\left(T(i)\right), & \text{если} \quad i - \text{четное}. \end{cases}$$

Для доказательства предложения остается проверить, что $\mathrm{Til}(1) = T(1)$ и воспользоваться индукцией по i.

Доказанное предложение означает, что разбиения $\mathrm{Til}(i)$ получаются сдвигом классических разбиений Фибоначчи, определенных в [14].

3. Теорема о геометризации

Теорема 1. *Множество $X_0(i)$, где $i \geqslant 0$, состоит из всех коротких и такого же числа длинных отрезков разбиения $\mathrm{Til}(i+1)$, причем каждый короткий, объединяется с идущим вслед за ним длинным. Множество $X_j(i)$, где $1 \leqslant j \leqslant g-1$, состоит из всех $(j+1)$-ых длинных, идущих после каждого короткого отрезка разбиения $\mathrm{Til}(i+1)$. Множество $X_g(i)$, состоит из всех оставшихся отрезков разбиения $\mathrm{Til}(i+1)$. Порядок отсчета отрезков при четных и нечетных i: при четных — слева направо, а при нечетных — справо налево.*

Доказательство. Согласно предложению 10, разбиение $\mathrm{Til}(i)$ состоит из отрезков, длины которых равны τ_g^i и τ_g^{i+1}. Обозначим через $L(i)$ объединение длинных отрезков, а через $S(i)$ — объединение коротких отрезков разбиения $\mathrm{Til}(i)$. Очевидно, что для $L(i)$ и $S(i)$ справедливы равенства аналогичные тождеству (13).

Непосредственным вычислением проверяется, что теорема 1 верна при $i = 0$ и $i = 1$. В силу равенств (12) и (13) получаем, что теорема верна при любых i.

В представлении (2) зафиксируем первые $l+1$ значений ε_i, т.е. ε_0, ..., ε_l. Обозначим через $\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$ множество целых неотрицательных чисел, у которых фиксированы значения $\varepsilon_0(n) = \varepsilon_0$, ..., $\varepsilon_l(n) = \varepsilon_l$.

Пусть $X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$ — замыкание множества значений функции $\chi(n)$ при $n \in \mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$. Очевидно, что множество $X(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ является пересечением множеств $X_j(i)$, где $i = 0, 1, \ldots, l$, а $j = 0, 1, \ldots, g'$, т. е.

$$X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right) = \bigcap_{i=0}^{l} X_j(i), \quad \text{где} \quad j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varepsilon_i = 0, \\ 1, & \text{если} \quad \varepsilon_i = 1, \\ \ldots & \\ g', & \text{если} \quad \varepsilon_i = g'. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 2. *Для любых наборов ε_0, ..., ε_l, состоящих из целых чисел от нуля до g', где $g' = g-1$ при $i = 0$, и $g' = g$ при $i \geqslant 1$, таких что если $\varepsilon_{i+1} = g$, то $\varepsilon_i = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant l-1$, множество $X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$ есть отрезок $[\{-a\tau_g\}; \{-b\tau_g\}]$, где a, b — эффективно вычислимые целые числа, такие что $0 \leqslant a$, $b < F_l^{(g)} + F_{l+1}^{(g)}$.*

Доказательство. Согласно (19) $X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$ — это пересечение множеств $X_j(i)$, где $i = 0, 1, \ldots, l$, а $j = 0, 1, 2 \ldots, g'$, являющихся объединением конечного числа отрезков разбиения $\mathrm{Til}(l+1)$. Следовательно, $X\left(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l\right)$ представляет собой объединение конечного числа отрезков разбиения $\mathrm{Til}(l+1)$. Докажем, что $X\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_l\right)$ состоит из одного отрезка.

Подсчитаем количество возможных комбинаций $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l$, таких что если $\varepsilon_{i+1} = g$, то $\varepsilon_i = 0$, где $0 \leqslant i \leqslant l-1$, а $j = 0, 1, \ldots, g'$. Комбинация, дающая наименьшее из возможных чисел, состоит из всех нулей, т.е. $\varepsilon_i = 0$ при всех $0 \leqslant i \leqslant l$. Комбинации, дающие наибольшее из возможных натуральных чисел при четном и нечетном l различны.

Если l четное, то $\varepsilon_0 = g-1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = ... = \varepsilon_l = g$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = ... = \varepsilon_{l-1} = 0$; если l нечетное, то $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = ... = \varepsilon_{l-1} = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = ... = \varepsilon_l = g$. Числа, соответствующие этим комбинациям, подсчитаем, используя (1). При l четном:

$$gF_l^{(g)} + gF_{l-2}^{(g)} + \ldots + gF_2^{(g)} + (g-1)F_0^{(g)} = \left(gF_l^{(g)} + F_{l-1}^{(g)}\right) - F_{l-1}^{(g)} +$$

$$+ \left(gF_{l-2}^{(g)} + F_{l-3}^{(g)}\right) - F_{l-3}^{(g)} + \ldots + \left(gF_2^{(g)} + F_1^{(g)}\right) - F_1^{(g)} + (g-1)F_0^{(g)} =$$

$$= F_{l+1}^{(g)} - F_{l-1}^{(g)} + F_{l-1}^{(g)} - F_{l-3}^{(g)} + F_{l-3}^{(g)} - \ldots - F_1^{(g)} + (g-1)F_0^{(g)} = F_{l+1}^{(g)} - 1;$$

при l нечетном:

$$gF_l^{(g)} + gF_{l-2}^{(g)} + \ldots + gF_3^{(g)} + gF_1^{(g)} = \left(gF_l^{(g)} + F_{l-1}^{(g)}\right) - F_{l-1}^{(g)} +$$

$$+ \left(gF_{l-2}^{(g)} + F_{l-3}^{(g)}\right) - F_{l-3}^{(g)} + \ldots + \left(gF_3^{(g)} + F_2^{(g)}\right) - F_2^{(g)} + \left(gF_1^{(g)} + F_0^{(g)}\right) - F_0^{(g)} =$$

$$= F_{l+1}^{(g)} - F_{l-1}^{(g)} + F_{l-1}^{(g)} - F_{l-3}^{(g)} + F_{l-3}^{(g)} - \ldots - F_2^{(g)} + F_2^{(g)} - F_0^{(g)} = F_{l+1}^{(g)} - 1.$$

Таким образом, наименьшее из чисел множества $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ – это ноль, а наибольшее $F_{l+1}^{(g)} - 1$. Все промежуточные комбинации $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ также задают натуральные числа, следовательно, имеется $F_{l+1}^{(g)}$ различных множеств $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$, и каждому из этих множеств соответствует свое $X(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$. Ясно, что множества, соответствующие различным наборам $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ при фиксированном l не пересекаются. Следовательно, $\bigcup X(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ должно содержать не менее чем $F_{l+1}^{(g)}$ отрезков.

В ходе доказательства предложения 12 было показано, что в разбиении $T(l+1)$ имеется $F_l^{(g)}$ коротки и $F_{l+1}^{(g)}$ длинных отрезков. Согласно теореме 1 множества $X_j(i)$, где $j = 0, 1, \ldots, g'$, состоят из отдельно стоящих длинных отрезков и только $X_0(i)$ — это множество всех коротких, объединенных с таким же количеством длинных отрезков, расположенных рядом с короткими.

Это означает, что общее количество отрезков, соответствующих числу различных множеств $X(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ равно $F_{l+1}^{(g)}$.

Согласно предложению 12 разбиения $\mathrm{Til}(l+1)$ и $T(l+1)$ совпадают, поэтому количество комбинаций $\bigcap\limits_{i=0}^{l} X_j(i)$ равно $F_{l+1}^{(g)}$ отрезкам, являющихся непересекающимися частями разбиения $T(l+1)$. Следовательно, каждому из множеств $X(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_l)$ соответствует в точности один отрезок, концы которого совпадают с точками разбиения $T(l)$.

4. Теоретико-числовые приложения

Пусть A_N — число натуральных чисел n, меньших или равных N, таких что все члены последовательности $\{n\alpha\}$ принадлежат отрезку $[a; b]$, т.е.

$$A_N = \sharp\{n : 1 \leqslant n \leqslant N, \{n\alpha\} \in I_{a,b}\},$$

где $I_{a,b} = [a, b]$.

В силу теоремы Вейля для любого иррационального α справелива асимптотическая формула

$$A_N = (b-a)N + o(N). \tag{20}$$

Во многих случаях остаточный член асимптотики (20) может быть улучшен. В частности, если α — иррациональность с ограниченными неполными частными разложения в цепную дробь, то [18], [3]

$$A_N = (b-a)N + O(\ln N). \tag{21}$$

Кроме того, известна теорема Гекке [1], утверждающая, что если для длины интервала $I_{a,b}$ справедливо включение $b-a \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, то

$$A_N = (b-a)N + O(1). \tag{22}$$

Обозначим через $A_N(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ — число натуральных чисел, не превосходящих N, у которых в представлении (2) зафиксированы первые $l+1$ значений $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l$, то есть

$$A_N(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = \sharp\left\{n : 1 \leqslant n \leqslant N, n \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)\right\}.$$

Теорема 3. *Для любого натурального N справедлива асимптотическая формула*

$$A_N(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = cN + O(1),$$

где c — эффективно вычислимая константа, зависящая только от $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$.

Доказательство. Согласно теореме 2, если $n \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$, то

$$\chi(n) \in [\{-a\tau_g\}; \{-b\tau_g\}] = J_{a,b},$$

причем a, b — эффективно вычислимые целые неотрицательные числа. Следовательно,

$$A_N(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = \sharp\left\{n : 1 \leqslant n \leqslant N, \chi(n) \in J_{a,b}\right\}.$$

Поскольку длина интервала $J_{a,b}$ принадлежит $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, учитывая определение $\chi(n)$ и теорему Гекке (22), имеем

$$A_N(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = |J_{a,b}|N + O(1).$$

Отсюда получаем утверждение теоремы с константой

$$c = |\{-a\tau_g\} - \{-b\tau_g\}|.$$

Следствие 1. *Пусть $\rho(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ — плотность распределения чисел множества*

$$\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$$

на числовой прямой, тогда

$$\rho(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = \begin{cases} \tau_g^l, & \text{если} \quad \varepsilon_l = 1, \\ \tau_g^{l+1} + \tau_g^l, & \text{если} \quad \varepsilon_l = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно определению плотность распределения множества точек на числовой прямой — это

$$\rho(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = \lim_{N\to\infty} \frac{A_N(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)}{N}.$$

Воспользуемся утверждением теоремы 3 и запишем

$$\rho(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)=\lim_{N\to\infty}\frac{|\{-a\tau_g\}-\{-b\tau_g\}|N+O(1)}{N}=$$

$$=|\{-a\tau_g\}-\{-b\tau_g\}|+\lim_{N\to\infty}\frac{O(1)}{N}=|\{-a\tau_g\}-\{-b\tau_g\}|.$$

Разбиение $\mathrm{Til}(l+1)$ состоит из $F_l^{(g)}$ коротких и $F_{l+1}^{(g)}$ длинных отрезков. В ходе доказательства теоремы 2 было показано, что количество различных комбинаций $\bigcap\limits_{i=0}^{l} X_j(i)$ совпадает с $F_{l+1}^{(g)}$ отрезками, дающими при объединении отрезок $[0;1]$. Следовательно, $F_l^{(g)}$ отрезков разбиения $\mathrm{Til}(l+1)$ являются составляющими частями отрезков, совпадающих с числом возможных вариантов $\bigcap\limits_{i=0}^{l} X_j(i)$.

Согласно определению множество $X_0(l)$ представляет собой объединение коротких и стоящих рядом с ними длинных отрезков разбиения $\mathrm{Til}(l+1)$, длины которых равны $\tau_g^{l+2}+\tau_g^{l+1}$, а множества $X_j(l)$, где $j=1,2,\ldots,g$ — объединение длинных отрезков разбиения $\mathrm{Til}(l+1)$, длины которых равны τ_g^{l+1}.

Обозначим через $A_N^{s,q}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ — число натуральных чисел, меньших или равных N, принадлежащих множеству $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ и являющихся членами арифметической прогрессии $st+q$, где $s,t\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant q\leqslant s-1$, то есть

$$A_N^{s,q}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)=\sharp\left\{n:1\leqslant n\leqslant N, n\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l), n=st+q\right\}.$$

Теорема 4. *Для фиксированного s и любого натурального N справедлива асимптотическая формула*

$$A_N^{s,q}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)=\rho(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)\frac{N}{s}+O_l\left(\ln\frac{N}{s}\right).$$

Доказательство. Зная, что условие $n\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$ эквивалентно тому, что $\chi(n)\in$ $\in J_{a,b}$, и воспользовавшись принадлежностью n арифметической прогрессии $st+q$, можно утверждать, что

$$A_N^{s,q}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)=\sharp\left\{t:1\leq st+q\leqslant N,\{(st+q+1)\tau_g\}\in J_{a,b}\right\}.$$

Число $\tau_g=\frac{\sqrt{g^2+4}-1}{2}$ — квадратичная иррациональность, значит числа $\tau_g'=s\tau_g$ и $\tau_g''=$ $=(q+1)\tau_g$, где s, $q\in\mathbb{N}$, также являются квадратичными иррациональностями.

Пусть $A_N'=\left\{n:1\leqslant n\leqslant N, n\tau_g'+\tau_g''\in J_{a,b}\right\}$. Согласно теореме Лагранжа разложение квадратичной иррациональности в цепную дробь является периодическим, возможно с предпериодом. Это означает, что неполные частные разложения квадратичной иррациональности в цепную дробь ограничены. Поэтому, в силу (21),

$$A_N'=|\{-a\tau_g\}-\{-b\tau_g\}|N+O_l(\ln N).$$

Из неравенств $1\leqslant st+q\leqslant N$ получаем $1\leqslant t\leqslant t_{max}$, причем $\left[\frac{N}{s}\right]\leqslant\leqslant t_{max}\leqslant\frac{N}{s}$, так как $0\leqslant\frac{q}{s}<1$.

$$A_N^{s,q}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)=A_{t_{max}}'=|\{-a\tau_g\}-\{-b\tau_g\}|\frac{N}{s}+O_l\left(\ln\frac{N}{s}\right).$$

Далее остается воспользоваться равенством

$$\rho(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)=|\{-a\tau_g\}-\{-b\tau_g\}|. \tag{23}$$

Пусть $\pi\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n\right)$ — количество простых чисел, не превосходящих n и принадлежащих множеству $\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)$, а $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n.

Теорема 5. *Множество $\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)$ содержит бесконечно много простых чисел. Более того*

$$\pi(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)=\rho\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)\pi(n)(1+o(1)).$$

Доказательство. Пусть p_n — n-е простое число. Согласно теореме И. М. Виноградова [7] для любого иррационального α последовательность $\{p_n\alpha\}$ равномерно распределена по модулю один, то есть

$$\sharp\{n:p_n\leqslant N,\{p_n\alpha\}\in[a;b]\}=(b-a)\pi(n)(1+o(1))$$

для любого отрезка $[a;b]\in[0;1)$. Следовательно, последовательность $\{\chi(p_n)\}$ также равномерно распределена на промежутке $[0;1)$ в силу иррациональности τ_g.

Известно, что $\chi(n)\in J_{a,b}$, если $n\in\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)$. Значит, если $p\in\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)$, то значения функции $\chi(p)=\{(p+1)\tau_g\}$ также принадлежат $J_{a,b}$, откуда, с учетом равномерной распределенности и равенства (23), немедленно вытекает требуемый результат.

Обозначим через $s_m\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n\right)$ число решений уравнения

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n, \tag{24}$$

где $n_i\in\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)$, $i=1,2,\ldots,l$.

Теорема 6. *Справедлива асимптотическая формула*

$$s_m\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n\right)=c_m\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l,\{n\tau_g\}\right)n^{m-1}+O_{m,l}\left(n^{m-2}\ln n\right),$$

где $c_m\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l,\delta\right)$ — некоторая эффективно вычислимая функция.

Доказательство. Пусть $r_m\left(\alpha,I_1,\ldots,I_m,n\right)$ — число решений уравнения (24) с дополнительным условием $\{n_i\alpha\}\in I_i$, где I_i — некоторый интервал, $i=1,2,\ldots,m$.

В работах [28], [29] получена следующая асимптотическая формула

$$r_m\left(\alpha,I_1,\ldots,I_m,n\right)=c_m\left(I_1,\ldots,I_m,\{n\alpha\}\right)n^{m-1}+O_m\left(n^{m-2}\Delta(\alpha,n)\right), \tag{25}$$

где $c_m\left(\alpha,I_1,\ldots,I_m,\delta\right)$ — периодическая, с периодом один, функция, вычисляемая по формуле

$$c_m\left(I_1,\ldots,I_m,\delta\right)=\frac{1}{m-1}\int\limits_{I^m(\delta)}c_{m-1}\left(I_1,\ldots,I_{m-1},x\right)dx.$$

Здесь $I^m(\delta)=\iota_\delta(I_m)$, и функция $c_1\left(I_1,\delta\right)$ задается на периоде $[0;1)$ условиями

$$c_1(I_1,\delta)=\begin{cases}1, & \text{при}\quad \delta\in I_1,\\ 0, & \text{при}\quad \delta\notin I_1,\end{cases}$$

и $\Delta(\alpha,n)=O(\ln n)$, если α — квадратичная иррациональность. Более того, в работе [29] показано, что функция $c_m\left(\alpha,I_1,\ldots,I_m,\{n\alpha\}\right)$ является кусочным многочленом степени $m-1$. Кроме того, эта функция непрерывна при $m\geqslant 2$.

По условию $n_i\in\mathbb{F}^{(g)}\left(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l\right)$, то есть $\chi(n)\in J_{a,b}$. Очевидно, что если $\chi(n_i)=\{(n_i+1)\,\tau_g\}\in J_{a,b}$, то $\{n_i\tau_g\}\in J_{a-1,b-1}$, причем $I=J_{a-1,b-1}$ — некоторый отрезок на единичной окружности.

Это означает, что для нахождения асимптотической формулы для $s_m(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)$ можно воспользоваться (25) в случае $\alpha=\tau_g$ — квадратичной иррациональности и $I_1=\ldots=I_m=I$. Получим

$$s_m(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)=c_m(I,I,\ldots,I,\{n\tau_g\})\,n^{m-1}+O_{m,l}\left(n^{m-2}\ln n\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Пусть $t(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)$ — число решений задачи Лагранжа, т.е. количество решений уравнения

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2=n, \tag{26}$$

с дополнительным условием $n_i\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, $i=1,2,3,4$.

Теорема 7. *Справедлива асимптотическая формула*

$$t(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)=\rho^4(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)\,Q(n)+O_l\left(n^{0{,}9+\delta}\right),$$

где $Q(n)$ представляет собой число решений задачи Лагранжа без дополнительного условия $n_i\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, $\delta>0$ — произвольное положительное число.

Доказательство. Пусть $G(n)$ — число решений уравнения (26) с дополнительным условием $a<\{\alpha n_i\}<b$, $i=1,2,3,4$. В работе [10] в случае квадратичной иррациональности α найдена асимптотическая формула

$$G(n)=(b-a)^4Q(n)+O\left(n^{0{,}9+\delta}\right).$$

По условию $n_i\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, значит $\chi(n_i)\in J_{a,b}$, а, следовательно, $\{n_i\tau_g\}\in I$ для некоторго интервала I той же самой длины, что и $J_{a,b}$. Воспользуемся приведенным выше утверждением и равенством (23) и получим доказываемую асимптотическую формулу.

Тернарная проблема Гольдбаха состоит в нахождении числа решений уравнения

$$p_1+p_2+p_3=n, \tag{27}$$

где n — нечетное натуральное число и p_1, p_2, p_3 — простые числа.

Пусть $\nu(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)$ — число решений уравнения (27) с дополнительным условием $p_i\in\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l)$, $i=1,2,3$.

Теорема 8. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\nu(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_l;n)=Q_{3,1}(n)\sigma(n,a,b)+O_l\left(n^2\ln^C n\right),$$

где

$$Q_{3,1}(n)=\frac{n^2}{2\ln^3 n}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right),$$

$$\sigma(n,a,b)=\sum_{|m|<\infty}e^{2\pi i m(\tau_g n-1{,}5(a+b))}\frac{\sin^3\pi m(b-a)}{\pi^3m^3},$$

и a, b — некоторые эффективно вычислимые числа из кольца $\mathbb{Z}[\tau_g]$.

Доказательство. В работе [11] в случае квадратичной иррациональности α получена асимптотическая формула для $G_{3,1}$ — числа решений уравнения (27) с условием $a<\{\alpha p_i\}<b$, $i=1,2,3$

$$G_{3,1}(n)=Q_{3,1}(n)\sigma(n,a,b)+O\left(n^2\ln^C n\right).$$

Согласно условию теоремы $p_i \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$, что означает $\chi(p_i) \in J_{a,b}$, а, следовательно, $\{p_i\tau_g\} \in I$ для некоторго интервала I. Применим сформулированное выше утверждением и получим доказываемую асимптотическую формулу.

Проблема Хуа–Локена состоит в нахождении числа решений уравнения

$$p_1^2 + \ldots + p_5^2 = n, \tag{28}$$

где $n \equiv 5 \pmod{24}$ и $p_1, \ldots p_5$ — простые числа.

Пусть $\mu(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l; n)$ — число решений уравнения (28) с дополнительным условием $p_i^2 \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$, $i = 1, \ldots, 5$.

Теорема 9. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\mu(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l; n) = Q_{5,2}(n)\sigma_1(n, a, b) + O_l\left(n^{3/2-0{,}00002}\right),$$

где $Q_{5,2}(n)$ *— число решений задачи Хуа–Локена без дополнительных ограничений на* p_i^2,

$$\sigma_1(n, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\tau_g n - 2{,}5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5},$$

и a, b *— некоторые эффективно вычислимые числа из кольца* $\mathbb{Z}[\tau_g]$.

Доказательство. В работе [11] в случае квадратичной иррациональности α получена асимптотическая формула для $G_{5,2}(n)$ — числа решений уравнения (28) с условием $a < \{\alpha p_i\} < b$, $i = 1, \ldots, 5$

$$G_{5,2}(n) = Q_{5,2}(n)\sigma_1(n, a, b) + O\left(n^{3/2-0{,}00002}\right).$$

Согласно условию теоремы $p_i^2 \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$, т.е. $\chi\left(p_i^2\right) \in J_{a,b}$, а, следовательно, $\left\{p_i^2\tau_g\right\} \in I$ для некоторго интервала I. Применим сформулированное в начале доказательства утверждение и получим доказываемую асимптотическую формулу.

Обозначим через $A_N^P(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ — число натуральных чисел, меньших или равных N, принадлежащих множеству $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$ и являющихся членами значениями многочлена $n = P(t)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, где $t \in \mathbb{N}$, $P(t) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i t^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 0$ при $0 \leq i < k$, $a_k > 0$ то есть

$$A_N^P(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) = \sharp\left\{n : 1 \leqslant n \leqslant N, n \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l), n = P(t), t \in \mathbb{N}\right\}.$$

Теорема 10. *Для любого фиксированного многочлена* $P(t) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i t^i$ *с целыми неотрицательными коэффициентами и* $a_k > 0$ *и любого натурального* N *справедлива асимптотическая формула*

$$A_N^P(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) \sim \rho(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l) \sqrt[k]{\frac{N}{a_k}}.$$

Доказательство. Пусть $B^P(N)$ – количество натуральных чисел, не превосходящих N и представимых в виде $N = P(t)$ для некоторого натурального t. Легко видеть, что

$$B^P(N) \sim \sqrt[k]{\frac{N}{a_k}}.$$

Согласно теореме Вейля [6], для любого многочлена $P'(t)$ с иррациональным старшим коэффициентом последовательность дробных долей $\{P'(t)\}$ равномерно распределена по модулю один, то есть

$$\sharp\left\{t : 1 \le t \le K, \{P'(t)\} \in I\right\} \sim |I|K$$

для любого отрезка $I \in [0;1)$. Следовательно, в силу иррациональности τ_g, последовательность $\{\chi(P(t))\}$ также является равномерно распределенной по модулю один, то есть

$$\sharp\{t : 1 \le t \le K, \chi(P(t)) \in I\} \sim |I|K.$$

Выбирая $I = J_{a,b}$ и $K = B^P(N)$, немедленно получаем требуемый результат.

5. Заключение

В настоящей работе получена геометрическая интерпретация принадлежности натурального числа множеству $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$. Найдены асимптотические формулы для количества натуральных чисел из указанного множества, удовлетворяющих тем или иным условиям, количество решений задачи Лагранжа о четырех квадратах $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n$ в числах из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$; тернарной проблемы Гольдбаха $p_1 + p_2 + p_3 = n$ в простых числах из $\mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$; задачи Хуа-Локена $p_1^2 + \ldots + p_5^2 = n$ в простых числах с условием $p_i^2 \in \mathbb{F}^{(g)}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. №5. P. 54–76.

2. Knuth D. E. Fibonacci multiplication // Appl. Math. Lett. 1988. V. 1. P. 57–60.

3. Pinner C. G. On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha+\gamma\}$ // J. Number Theory. 1997. V. 65. P. 48–73.

4. Van Ravenstein T. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. V. 45. P. 360–370.

5. Shutov A. V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, A. Laurincikas and E. Manstavicius (Eds). 2007. P. 190–203. Vilnius:TEV

6. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. 1910. №30. P. 377–407.

7. Виноградов И. М. Новый метод в аналитической теории чисел // Труды МИАН. 1937. Т. 10. С. 5–122.

8. Грехэм Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика // М.: Мир. 1998.

9. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Задача Хуа-Локена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, №7. С. 497–500.

10. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2010. Т. 5(76), №18. С. 83–87.

11. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52, №6. С. 413–417.

12. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, №6. С. 1–23.

13. Журавлев В. Г. Одномерные квазирешетки Фибоначчи и их приложения к диофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, №3. С. 177–208.

14. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, №2. С. 89–122.

15. Журавлев В. Г. Суммы квадратов над ◦-кольцом Фибоначчи // Записки научного семинара ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 165–190.

16. Журавлев В. Г. Уравнение Пелля над ◦-кольцом Фибоначчи // Записки научного семинара ПОМИ. 2008. Т. 350. С. 139–159.

17. Журавлев В. Г. Четно-фибоначчевы числа: бинарная аддитивная задача, распрделение по прогрессиям и спектр // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, №3. С. 18–46.

18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей // М.: Мир. 1985.

19. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Некоторые вопросы вложения решеток в одномерные квазипериодические разбиения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. №7(57). С. 84–91.

20. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения, допускающие вложение прогрессий // Известия вузов. Математика. 2009. №7. С. 3–9.

21. Матиясевич Ю. В. Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гилберта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 8. С. 132–144.

22. Матиясевич Ю. В. Две редукции 10-й проблемы Гилберта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 8. С. 145–158.

23. Швагирева И. К. Бинарные аддитивные задачи над ◦-прогессиями Фибоначчи // Материалы VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тула, 11-16 мая 2010 года ТГПУ, Тула. 2010. С. 198–200.

24. Шутов А. В. Арифметика и геометрия одномерных квазирешеток // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. С. 255–262.

25. Шутов А. В. Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, №6. С. 189–202.

26. Шутов А. В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 112–121.

27. Шутов А. В. О распределении дробных долей II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. 2005. №3. С. 146–158.

28. Шутов А. В. Об одной аддитивной задаче с числами специального вида // Математика, информатика и методика их преподавания. Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ. М. 2011. С. 102–104.

29. Шутов А. В. Об одной аддитивной задаче с дробными долями // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2013. Т. 5(148), №30. С. 111–120.

30. Шутов А. В. Перенормировки вращений окружности // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 4. С. 125–143.

31. Шутов А. В. Последовательности Штурма: графы Рози и форсинг // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 2. С. 128–139.

32. Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 272–284.

33. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 3. С. 110–128.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. 1921. "Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins", *Math. Sem. Hamburg Univ.*, no. 5, pp. 54–76.

2. Knuth D. E. 1988. "Fibonacci multiplication", *Appl. Math. Lett.*, Vol. 1, pp. 57–60. doi: 10.1016/0893-9659(89)90131-6.

3. Pinner C. G. 1997. "On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha + \gamma\}$", *J. Number Theory*, Vol. 65, pp. 48–73. doi:10.1006/jnth.1997.2080.

4. Van Ravenstein T. 1988. "The three gap theorem (Steinhaus conjecture)", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, Vol. 45, pp. 360–370. doi:10.1017/S1446788700031062.

5. Shutov A. V. 2007. "New estimates in the Hecke-Kesten problem ", *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, A. Laurincikas and E. Manstavicius (Eds)*, pp. 190–203. Vilnius: TEV

6. Weyl H. 1910. "Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene", *Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo*, no. 30, pp. 377–407.

7. Vinogradov I.M. 1937. "Novyj metod v analiticheskoj teorii chisel", *Trudy MIAN*, Vol. 10, pp. 5–122. (Russian)

8. Graham R., Knuth D., Patashnik O. 1994. "Concrete Mathematics ", *Addison-Wesley.*

9. Gricenko S. A., Mot'kina N.N. 2009. "Zadacha Hua-Lokena s prostymi chislami special'nogo vida", *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 7, pp. 497–500. (Russian)

10. Gricenko S. A., Mot'kina N.N. 2010. "O nekotoryh additivnyh zadachah teorii chisel", *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika*, Vol. 5(76), no. 18, pp. 83–87. (Russian)

11. Gricenko S. A., Mot'kina N.N. 2009. "Ob odnom variante ternarnoj problemy Gol'dbaha", *DAN respubliki Tadzhikistan*, Vol. 52, no. 6, pp. 413–417. (Russian)

12. Davletj'yarova E. P., Zhukova A. A., Shutov A. V. 2013. "Geometrizacija sistemy schislenija Fibonacci i ee prilozhenija k teorii chisel", *Algebra i analiz*, Vol. 25, no. 6, pp. 1–23. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2014, 25:6, 893-907. doi:10.1090/S1061-0022-2014-01321-0.

13. Zhuravlev V. G. 2007. "Odnomernye kvazireshetki Fibonacci i ih prilozhenija k diofantovym uravnenijam i algoritmu Evklida", *Algebra i analiz*, Vol. 19, no. 3, pp. 177–208. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2008, 19:3, 431-454. doi:10.1090/S1061-0022-08-01005-4.

14. Zhuravlev V. G. 2007. "Odnomernye razbienija Fibonacci", *Izv. RAN. Ser. matem.*, Vol. 71, no. 2, pp. 89-122. (Russian) translation in Izvestiya: Mathematics, 2007, 71:2, 307–340. doi: 10.1070/IM2007v071n02ABEH002358.

15. Zhuravlev V. G. 2006. "Summy kvadratov nad ∘-kol'com Fibonacci", *Zapiski nauchnogo seminara POMI*, Vol. 337, pp. 165–190. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2007, 143:3, 3108-3123. doi: 10.1007/s10958-007-0195-1.

16. Zhuravlev V. G. 2008. "Uravnenie Pellja nad ∘-kol'com Fibonacci", *Zapiski nauchnogo seminara POMI*, Vol. 350, pp. 139–159. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences, 2008, 150:3, 2084-2095. doi: 10.1007/s10958-008-0123-z.

17. Zhuravlev V. G. 2008. "Chetno-fibonachchevy chisla: binarnaja additivnaja zadacha, raspredelenie po progressijam i spectr", *Algebra i analiz*, Vol. 20, no. 3, pp. 18–46. (Russian) translation in St. Petersburg Mathematical Journal, 2009, 20:3, 339-360. doi: 10.1090/S1061-0022-09-01051-6.

18. Kuipers L., Niederreiter G. 1974. "Uniform Distribution of Sequences ", *New York, Wiley.*

19. Krasil'shhikov V. V., Shutov A. V. 2007. "Nekotorye voprosy vlozhenija reshetok v odnomernye kvaziperiodicheskie razbienija", *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaja serija*, no. 7(57), pp. 84–91. (Russian)

20. Krasil'shhikov V. V., Shutov A. V. 2009. "Odnomernye kvaziperiodicheskie razbienija, dopuskajushhie vlozhenie progressij", *Izvestija vuzov. Matematika*, no. 7, pp. 3–9. (Russian). translation in Russian Mathematics, 2009, 53:7, 1–6. doi: 10.3103/S1066369X09070019.

21. Matijasevich Ju. V. 1968. "Svjaz' sistem uravnenij v slovah i dlinah s 10-j problemoj Gilberta", *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI*, Vol. 8, pp. 132–144. (Russian)

22. Matijasevich Ju. V. 1968. "Dve redukcii 10-j problemy Gilberta", *Zapiski nauchnyh seminarov LOMI*, Vol. 8, pp. 145–158. (Russian)

23. Shvagireva I. K. 2010. "Binarnye additivnye zadachi nad ∘-progessijami Fibonachchi", *Materialy VII mezhdunarodnoj konferencii "Algebra i teorija chisel: sovremennye problemy i prilozhenija posvjashhennoj pamjati professora Anatolija Alekseevicha Karatsuby, Tula, 11–16 maja 2010 goda TGPU, Tula*, pp. 198–200. (Russian)

24. Shutov A. V. 2010. "Arifmetika i geometrija odnomernyh kvazireshetok", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 11, pp. 255–262. (Russian)

25. Shutov A. V. 2010. "Neodnorodnye diofantovy priblizhenija i raspredelenie drobnyh dolej", *Fundamental'naja i prikladnaja matematika*, Vol. 16, no. 6, pp. 189–202. (Russian). translation in Journal of Mathematical Sciences (New York), 2012, 182:4, 576-585. doi: 10.1007/s10958-012-0762-y.

26. Shutov A. V. 2004. "O raspredelenii drobnyh dolej", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 5, no. 3, pp. 112–121. (Russian)

27. Shutov A. V. 2005. "O raspredelenii drobnyh dolej II", *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcional'nomu analizu i smezhnym voprosam*, no. 3, pp. 146–158. (Russian)

28. Shutov A. V. 2011. "Ob odnoj additivnoj zadache s chislami special'nogo vida", *Matematika, informatika i metodika ih prepodavanija. Materialy Vserossijskoj konferencii, posvjashhennoj 110-letiju matematicheskogo fakul'teta MPGU. M.*, pp. 102–104. (Russian)

29. Shutov A. V. 2013. "Ob odnoj additivnoj zadache s drobnymi doljami", *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika*, Vol. 5(148), no. 30, pp. 111–120. (Russian)

30. Shutov A. V. 2004. "Perenormirovki vrashhenij okruzhnosti", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 5, no. 4, pp. 125–143. (Russian)

31. Shutov A. V. 2007. "Posledovatel'nosti Sturma: grafy Rauzy i forcing", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 8, no. 2, pp. 128–139. (Russian)

32. Shutov A. V. 2004. "Proizvodnye povorotov okruzhnosti i podobie orbit", *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, Vol. 314, pp. 272–284. (Russian). translation in Journal of Mathematical Sciences, 2006, 133:6, 1765-1771. doi: 10.1007/s10958-006-0088-8.

33. Shutov A. V. 2006. "Sistemy schislenija i mnozhestva ogranichennogo ostatka", *Chebyshevskii1 sbornik*, Vol. 7, no. 3, pp. 110–128. (Russian)

Владимирский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
Получено 5.04.2015 г.
Принято в печать 10.06.2016 г.