ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 2

УДК 517.9

КЛАССЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

И. В. Горючкина (г. Москва)

Аннотация

В этой работе выделяются общие классы формальных решений конечного порядка алгебраического (полиномиального) обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), которые могут быть вычислены с помощью методов плоской степенной геометрии, основанных на определении ведущих членов уравнения по многоугольнику Ньютона–Брюно, который является многоугольным множеством на плоскости.

Кроме того, в этой работе доказывается теорема о том, что если формальное решение выделенного класса существует, то первое приближение (укорочение) этого решения является (формальным) решением первого приближения исходного уравнения (укороченного уравнения). Вычисляемые с помощью этих методов формальные ряды относятся к еще более общим классам формальных рядов, называемых в иностранной литературе grid-based series и transseries. Такие ряды являются относительно новыми объектами и, несмотря на большое число работ, пока слабо изучены. Они достаточно часто встречаются среди формальных решений дифференциальных уравнений, в том числе, важных в физике. Других общих методов вычисления таких рядов пока не существует. Поэтому так важно выделить классы формальных рядов, которые можно вычислить алгоритмически методами плоской степенной геометрии.

Ключевые слова: алгебраическое ОДУ, формальное решение, вычисление формального решения, классификация формальных решений, transseries.

Библиография: 22 названия.

CLASSES OF FINITE ORDER FORMAL SOLUTIONS OF AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

I. V. Goryuchkina (Moscow)

Abstract

In this paper we select general classes of finite order formal solutions of an algebraic (polynomial) ordinary differential equation (ODE), that can be calculated by the methods of the planar power geometry based on determining leading terms of the equation by the Newton–Bruno polygon.

Beside that in this paper we prove the theorem that if a formal solution of the selected class exists then the first approximation (the truncation) of this solution is a (formal) solution of the first approximation of the initial equation (that is called the truncated equation). Calculated formal solutions by means of these methods relate to much more general classes of the formal solutions that are called grid-based series and transseries in the foreign papers. Grid-based series and transseries are fairly new objects and in spite of the large number of publications they are slightly studied. Such series appear among formal solutions of differential equations including equations that are important in physics. Other general methods of the calculation of such series do not exist yet. Therefore it is important to select the classes of formal solutions that can be calculated algorithmically by the methods of the planar power geometry.

Keywords: algebraic ODE, formal solution, calculation of formal solution, classification of formal solutions, transseries.

Bibliography: 22 titles.

Обозначения

$\mathcal{D}$ — открытое связное подмножество множества комплексных чисел, замыкание которого содержит нуль;
$\mathcal{D}_\infty$ — открытое связное подмножество множества комплексных чисел, замыкание которого содержит бесконечность;
$\overline{\mathbb{R}}$ — множество вещественных чисел, пополненное $+\infty$ и $-\infty$;
$\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{C}^*$ — множества вещественных и комплексных чисел без нуля соответственно;
$\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{R}_+$ — множества неотрицательных целых и вещественных чисел соответственно;
$\mathcal{O}(\mathcal{D})$ — множество голоморфных в области $\mathcal{D}$ функций;
$\mathbb{C}[x]$ — множество многочленов с комплексными коэффициентами;
$\mathbb{C}[x, 1/x]$ — множество многочленов Лорана с комплексными коэффициентами;
$\mathbb{C}[[x]]$ — множество формальных рядов Тейлора с комплексными коэффициентами в окрестности точки $x = 0$;
$\mathbb{C}(x)$ — множество рациональных функций с комплексными коэффициентами;
$\mathbb{C}((x))$ — множество формальных рядов Лорана с конечной главной частью и комплексными коэффициентами в окрестности точки $x = 0$;
i — мнимая единица;
$O^*(\varphi(x))$ — функция, по модулю не превосходящая произведения положительной константы и модуля функции $\varphi(x)$, но не являющаяся бесконечно малой величиной по сравнению с $\varphi(x)$ во всех предельных точках рассматриваемой области (в отличие от стандартного $O\,(\varphi(x))$, которое допускает $o\,(\varphi(x))$). Подробнее об обозначениях O и o см. в гл. 1 [1].

1. Введение

Предложенные в работе [2] методы плоской степенной геометрии позволяют для аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений вычислять их формальные решения (или формальные асимптотики решений), имеющие вид функциональных рядов, содержащих степенные функции с комплексными показателями степени, кратные и некратные логарифмы. Напомним, что уравнение вида

$$f(x, y_0, \ldots, y_n) = 0, \qquad y_j = x^j y^{(j)}, \tag{1}$$

где $f(x, y_0, \ldots, y_n)$ — это аналитическая функция в некоторой области $U \subseteq \mathbb{C}^{n+2}$, называется (комплексным) *аналитическим обыкновенным дифференциальным уравнением.* Частным случаем аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений являются алгебраические обыкновенные дифференциальные уравнения. (Комплексное) *алгебраическое обыкновенное дифференциальное уравнение* — это уравнение вида (1), где $f(x, y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}[x, y_0, \ldots, y_n]$, т. е. $f(x, y_0, \ldots, y_n)$ — это полином своих аргументов с постоянными комплексными коэффициентами. Далее в работе будут рассматриваться только алгебраические обыкновенные дифференциальные уравнения и их формальные решения. Отметим, что под вычислением формального решения, имеющего вид функционального ряда, обычно понимается вычисление коэффициентов начальной части ряда, описание его структуры (системы функций), а также определение количества произвольных постоянных и членов, в которых эти произвольные постоянные содержатся. Напомним, что формальный функциональный ряд с упорядоченными членами является формальным решением обыкновенного дифференциального уравнения, если после подстановки его в уравнение, используя формальные правила умножения, сложения и дифференцирования рядов, получается формальный ряд с нулевыми коэффициентами, к которому применимы те же самые правила упорядочивания, что и для исходного ряда.

В процессе развития методов плоской степени геометрии появилась связанная с вычислениями классификация формальных решений. Так, для шестого уравнения Пенлеве с помощью методов плоской степенной геометрии [3] были найдены (в указанном в предыдущем абзаце смысле) все формальные решения в окрестностях особых и неособых точек при всех значениях параметров уравнения, условно разделенные на пять типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные, экзотические и полуэкзотические. Все формальные решения обыкновенного дифференциального уравнения этих пяти типов в каждой особой точке можно записать единым выражением. Например, все формальные решения шестого уравнения Пенлеве этих пяти типов в окрестности точки $x = 0$ можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)\, x^{s_k}, \tag{2}$$

где $s_k \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s_k < \operatorname{Re} s_{k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re} s_k = +\infty$, а коэффициенты $c_k(x)$ различаются согласно типам:

- $c_0(x) \in \mathbb{C}^*$, остальные $c_k(x) \in \mathbb{C}[x^{\alpha \mathrm{i}}, x^{-\alpha \mathrm{i}}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (*степенные разложения*),
- $c_0(x) \in \mathbb{C}^*$, остальные $c_k(x) \in \mathbb{C}[\ln x]$ (*степенно-логарифмические разложения*),
- все $c_k(x) \in \mathbb{C}((\ln^{-1} x))$ (*сложные разложения*),
- $c_0(x) \in \mathbb{C}[x^{\beta \mathrm{i}}, x^{-\beta \mathrm{i}}]$, остальные $c_k(x) \in \mathbb{C}(x^{\beta \mathrm{i}}) \subset \mathbb{C}((x^{\beta \mathrm{i}}))$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ (*полуэкзотические разложения*),
- все $c_k(x) \in \mathbb{C}(x^{\gamma \mathrm{i}}) \subset \mathbb{C}((x^{\gamma \mathrm{i}}))$, $\gamma \in \mathbb{R}^*$ (*экзотические разложения).*

На самом деле, показатели степени s_k целые для всех формальных решений вида (2) шестого уравнения Пенлеве, кроме степенных разложений.

Еще раз напомним, что согласно введенным в начале статьи обозначениям $\mathbb{C}((x^{\beta \mathrm{i}}))$ — это множество формальных рядов Лорана с конечной главной частью в точке $x^{\beta \mathrm{i}} = 0$. При этом число β одинаковое для всех $c_k(x)$, т. е. каждый коэффициент $c_k(x)$ — это степенной ряд по возрастающим степеням $x^{\beta \mathrm{i}}$, где β может быть как положительным, так и отрицательным вещественным числом.

Отметим, что среди формальных решений конечного порядка остальных пяти уравнений Пенлеве также имеются только разложения пяти вышеописанных типов (см., например, [4]–[8]). Но, в отличие от шестого уравнения Пенлеве, для них имеются еще формальные решения в виде *экспоненциальных разложений* $c\, e^{\phi(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x)\, (c\, e^{\phi(x)})^k$, где $c \in \mathbb{C}$, $b_k(x) \in \mathbb{C}((x))$, $\phi(x) \in \mathbb{C}[\ln x]((x))$ (см. [9]). Эти разложения в этой работе не рассматриваются, поскольку имеют бесконечный порядок членов.

В этой работе рассматриваются всевозможные типы формальных решений конечного порядка алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения, которые могут быть получены с помощью методов плоской степенной геометрии. В разделе 2 строится класс таких формальных решений. В частности, в этот класс входят ряды с коэффициентами $c_k(x)$, которые содержат кратные логарифмы и рациональные функции от степенных функций с комплексными показателями степени.

Напомним, что методы плоской степенной геометрии основываются на методе выделения ведущих членов уравнения по многоугольнику Ньютона–Брюно. Многоугольник Ньютона–Брюно аналитического обыкновенного дифференциального уравнения — это многоугольное множество на плоскости, граница которого состоит из вершин и ребер. Каждая вершина или ребро соответствуют одному, нескольким или многим слагаемым в исходном обыкновенном дифференциальном уравнении. Эти слагаемые являются ведущими в определенных областях независимой и зависимой переменных и образуют *укороченные уравнения* (приближенные уравнения). Чуть подробней о методе выделения укороченных уравнений написано в разделе 4. Более подробно см. [2] и [3, гл. 1].

До сих пор считалось само собой разумеющимся, что первое приближение формального решения (2) (первый член $c_0(x)x^{s_0}$ ряда (2)) является решением укороченного уравнения. Это очевидно для степенных разложений с вещественными показателями степени [2], но требует доказательства для остальных типов, перечисленных ранее. Доказательство такого утверждения (теорема 1 из раздела 4) и является основным результатом статьи. В разделах 2 и 3 предъявлены построения общих замкнутых классов формальных решений конечного порядка, к которым относятся указанные выше 5 типов (лемма 1 из раздела 3). Теорема 1 раздела 4 доказывается для общих замкнутых классов формальных решений конечного порядка, построенных в разделе 2. Также стоит сказать, что пока неизвестны другие представители этих общих классов, кроме формальных рядов этих пяти типов.

Отметим, что ключевым понятием при построении многоугольника Ньютона–Брюно является понятие порядка функции. Будем говорить, что *функция* $\varphi(\xi)$ *в точке* $\xi = 0$ *имеет порядок* $\operatorname{ord}_0 \varphi(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}$, *если существует предел*

$$\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi\in\mathcal{D}}} \frac{\ln|\varphi(\xi)|}{\ln|\xi|} = \operatorname{ord}_0 \varphi(\xi). \tag{3}$$

Подобным образом определим порядок функции $\varphi(\xi)$ в точке $\xi = \infty$. *Функция* $\varphi(\xi)$ *в точке* $\xi = \infty$ *имеет порядок* $\operatorname{ord}_\infty \varphi(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}$, *если существует предел*

$$\lim_{\substack{\xi\to \infty\\ \xi\in\mathcal{D}_\infty}} \frac{\ln|\varphi(\xi)|}{\ln|\xi|} = \operatorname{ord}_\infty \varphi(\xi). \tag{4}$$

Подобное определение порядка функции встречается в теории целых функций, см., например, гл. V в [11].

Отметим, что среди функций, содержащихся в формальных решениях конечного порядка уравнений Пенлеве, имеются степенные функции с комплексными показателями степени и логарифмы. Любая из этих функций обладает тем свойством, что ее порядки в нуле и бесконечности совпадают. Более того, если продифференцировать любую из этих функций n раз, то получается функция, порядки которой в нуле и в бесконечности также совпадают (конечно, если только эта функция не равна тождественно нулю), но меньше на n единиц порядков в нуле и в бесконечности исходной функции. Например, рассмотрим степенную функцию x^α и ее n-ую производную $\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Для них имеем соотношения

$$\operatorname{ord}_0 x^\alpha = \operatorname{ord}_\infty x^\alpha = \operatorname{Re}\alpha$$

и

$$\operatorname{ord}_0(\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}) = \operatorname{ord}_\infty(\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}) = \operatorname{Re}\alpha - n.$$

Задача этой работы: *выделить общие классы формальных решений конечного порядка алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть вычислены с помощью методов плоской степенной геометрии.*

Это значит, что необходимо выделить классы формальных функциональных рядов, которые содержат только те ряды, укорочения $\hat{\varphi}$ (первые слагаемые) которых являются такими формальными рядами комплексной переменной ξ, что порядки в точках $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ каждого их члена совпадают с порядком исходного ряда (понятие порядка формального ряда будет дано в разделе 2). Кроме того, после подстановки укорочения $\hat{\varphi}$ в однородное обыкновенное дифференциальное уравнение $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n) = 0$ (где $u_j = x^j u^{(j)}$, $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}[u_0, \ldots, u_n]$) получается формальный ряд $\mathcal{P}_0(\hat{\varphi}_0, \ldots, \hat{\varphi}_n)$ ($\hat{\varphi}_j = x^j \hat{\varphi}^{(j)}$) того же класса, что и исходный ряд, имеющий либо ненулевые коэффициенты (тогда порядки функций при этих коэффициентах в точках $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ равны порядку получившегося формального ряда и порядку исходного ряда), либо все его коэффициенты — это нули (тогда порядок получившегося ряда равен $-\infty$, поскольку этот ряд соответствует тождественному нулю и в этом случае говорят, что формальный ряд удовлетворяет этому уравнению). Также необходимо доказать, что выделенные классы замкнуты относительно алгебраических операций и дифференцирования. Для этого от функций, содержащихся в функциональных рядах, мы будем требовать понижения порядка на единицу после дифференцирования и наложим ограничения на их рост (см. условия 1–3 в разделе 2). Так, например, функции x и $\ln^{-1} x$ удовлетворяют условию 1. Но первая из них удовлетворяет только условию 2, а вторая — только условию 3. Кроме того, как уже было сказано ранее, в разделе 4 доказывается теорема 1 для формальных решений (выделенного класса) алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе [12, гл. 1] доказывается аналог теоремы 1 из раздела 2 для формальных решений, которые являются рядами, содержащими вещественные степени x и $\ln x$. При этом только предполагается, а не доказывается замкнутость класса формальных решений дифференциальных уравнений относительно алгебраических операций и дифференцирования.

2. О классах формальных решений ОДУ, которые могут быть найдены методами плоской степенной геометрии

2.1. Построение классов

Рассмотрим последовательность функций
$$\{\varphi_{k_0}(\xi_0)\}_{k_0=0}^{\infty}, \tag{5}$$
где ξ_0 — это независимая комплексная переменная, $\xi_0 \in \mathcal{D}$, $\varphi_{k_0}(\xi_0) \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$,
$$\lim_{\substack{\xi_0 \to 0 \\ \xi_0 \in \mathcal{D}}} \frac{\varphi_{k_0+1}(\xi_0)}{\varphi_{k_0}(\xi_0)} = 0,$$
т. е. $\varphi_{k_0+1} = o(\varphi_{k_0})$.

Рассмотрим формальный ряд
$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \alpha_{k_0}\, \varphi_{k_0}(\xi_0), \quad \alpha_{k_0} = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \tag{6}$$
соответствующий системе функций (5).

Пусть класс $\widetilde{\mathcal{C}}_0$ образован формальными рядами вида (6).

Определим по индукции классы $\widetilde{\mathcal{C}}_j$ формальных рядов $j+1$ переменных $\xi_0, \ldots, \xi_j$, где $j = 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$. На первом шаге индукции определим класс
$$\widetilde{\mathcal{C}}_1 = \left\{ \sum_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1)\, \varphi_{k_0}(\xi_0) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_{k_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}_0 \right\},$$

на втором — класс

$$\widetilde{\mathcal{C}}_2 = \left\{ \sum_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1, \xi_2)\, \varphi_{k_0}(\xi_0) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_{k_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}_1 \right\},$$

и. т. д., и на N-ом шаге — класс

$$\widetilde{\mathcal{C}}_N = \left\{ \sum_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1, \ldots, \xi_N)\, \varphi_{k_0}(\xi_0) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_{k_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{N-1} \right\},$$

где

$$\varphi_{k_0}(\xi_0) \in \mathcal{O}(\mathcal{D}), \;\; \varphi_{k_0+1} = o(\varphi_{k_0}),$$

$$\xi_0 \in \mathcal{D}, \;\; \xi_{i+1} = \xi_{i+1}(\xi_i), \;\; \xi_{i+1} \in \mathcal{O}(\mathcal{D}), \;\; i = 0, \ldots, N-1.$$

Отметим, что ряд $\sum\limits_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1)\varphi_{k_0}(\xi_0)$ класса $\mathcal{C}_1$ можно записать в виде

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \alpha_{k_0 k_1} \varphi_{k_0 k_1}(\xi_1) \right) \varphi_{k_0}(\xi_0),$$

ряд $\sum\limits_{k_0=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1, \xi_2)\varphi_{k_0}(\xi_0)$ класса $\mathcal{C}_2$ — в виде

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \alpha_{k_0 k_1 k_2} \varphi_{k_0 k_1 k_2}(\xi_2) \right) \varphi_{k_0 k_1}(\xi_1) \right) \varphi_{k_0}(\xi_0),$$

и. т. д.

Далее аргументы функций, указанные в скобках, будем опускать в тех случаях, когда это не приводит к путанице, с целью облегчения восприятия текста.

Сформулируем условия, необходимые для определения специальных классов формальных рядов $\mathcal{C}(\xi_0)$, $\ldots$, $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$, $N \in \mathbb{N}$, которые являются решениями алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений и могут быть вычислены с помощью методов плоской степенной геометрии [2] (основанных на выделении приближенных уравнений посредством многоугольника Ньютона–Брюно).

Условие 1. Пусть функция $\varphi(\xi)$ непрерывно дифференцируема ℓ раз в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$, $\ell \in \mathbb{N}$. Кроме того, для нее и ее производных справедливы соотношения

$$\operatorname{ord}_0 \varphi(\xi) = \operatorname{ord}_\infty \varphi(\xi) \in \mathbb{R},$$

и если $\varphi^{(\ell)}(\xi) \not\equiv 0$ и $\varphi^{(\ell-1)}(\xi) \not\equiv 0$, то

$$\operatorname{ord}_0 \varphi^{(\ell)}(\xi) = \operatorname{ord}_\infty \varphi^{(\ell)}(\xi) = \operatorname{ord}_0 \varphi^{(\ell-1)}(\xi) - 1 = \operatorname{ord}_\infty \varphi^{(\ell-1)}(\xi) - 1 \in \mathbb{R}.$$

Условие 2. Пусть функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условию 1 и в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ при $\varphi^{(\ell)}(\xi) \not\equiv 0$ имеет место равенство

$$\frac{\xi^\ell \varphi^{(\ell)}(\xi)}{\varphi(\xi)} = O^*(1).$$

Условие 3. Пусть функция $\phi(\xi)$ удовлетворяет условию 1 и в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ для нее справедливы соотношения

$$\phi^{(\ell)}(\xi) \not\equiv 0,$$

$$\frac{\xi^\ell\,\phi^{(\ell)}(\xi)}{\phi(\xi)} = O(1).$$

Кроме того, обратная функция $\xi(\phi)$ непрерывно дифференцируема ℓ раз в области $\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — это образ отображения $\phi:\ \widetilde{\mathcal{D}} \to \mathcal{E}$, $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ или $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_\infty$, множество $\widetilde{\mathcal{D}}$ такое, что при $\xi \to 0$ или при $\xi \to \infty$, $\xi \in \widetilde{\mathcal{D}}$, выполняется $\phi(\xi) \to 0$, $\phi(\xi) \in \mathcal{E}$. И имеет место равенство

$$\lim_{\substack{\phi\to 0\\ \phi\in\mathcal{E}}} \phi^\ell\,\xi^{(\ell)}(\phi) \;=\; \lim_{\substack{\phi\to 0\\ \phi\in\mathcal{E}}} \xi(\phi).$$

Пользуясь условиями 1–3, определим индуктивно специальные классы формальных рядов $\mathcal{C}(\xi_0)$, …, $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$.

Формальный ряд класса $\widetilde{\mathcal{C}}_0$ *будем относить к классу* $\mathcal{C}(\xi_0)$, *если функции* φ_{k_0} *удовлетворяют условию 2.*

Формальный ряд класса $\widetilde{\mathcal{C}}_j$, $j = 1, \ldots, N$, *будем относить к классу* $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_j)$, *если*

- *функции* $\varphi_{k_0}(\xi_0)$, …, $\varphi_{k_0\ldots k_j}(\xi_{k_j})$ *удовлетворяют условию 2,*
- *функции* $\xi_{i+1}(\xi_i)$ *удовлетворяют условию 3,* $i = 0, \ldots, j-1$,
- $\xi_i = o(\xi_{i+1})$, $\ln|\xi_{i+1}| = o(\ln|\xi_i|)$,
- $\varphi_{k_0} = o(\varphi_{k_0k_1})$, …, $\varphi_{k_0\ldots k_{j-1}} = o(\varphi_{k_0\ldots k_j})$ *для всех* φ_{k_0}, …, $\varphi_{k_0\ldots k_j}$, *кроме тех, для которых произведение* $\varphi_{k_0}\ldots\varphi_{k_0\ldots k_j}$ *постоянно.*

Также будем полагать, что нуль (нулевой ряд) включен в классы $\mathcal{C}(\xi_0)$, …, $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$.

2.2. Примеры рядов выделенных классов

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_0=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} c_{k_0k_1}\,(\ln^{-1} x)^{k_1}\right)\, x^{k_0} \tag{7}$$

класса $\mathcal{C}\left(x, \ln^{-1} x\right)$ (также этот ряд относится к *сложным разложениям* в классификации разложений, указанных в работах [2] и [3]), где

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} c_{k_0k_1}(\ln^{-1} x)^{k_1} \in \mathbb{C}[[\ln^{-1} x]],$$

$x \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ — открытый сектор с вершиной в нуле конечного раствора и конечного радиуса, кроме того, интервал $(0, 1] \subset \mathcal{D}$, а $\mathcal{D}_\infty$ — это множество, полученное инверсией множества $\mathcal{D}$.

Проверим условия принадлежности формального ряда (7) классу $\mathcal{C}\left(x,\ \ln^{-1} x\right)$.

- Функции x^{k_0} удовлетворяют условиям 1 и 2. Действительно,

$$\operatorname{ord}_0 x^{k_0} = \operatorname{ord}_\infty x^{k_0} = k_0.$$

Если $k_0 \geqslant \ell$, тогда

$$\operatorname{ord}_0 \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)} = \operatorname{ord}_\infty \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)} = k_0 - \ell,$$

$$\operatorname{ord}_0 \left(x^{k_0}\right)^{(\ell-1)} = \operatorname{ord}_\infty \left(x^{k_0}\right)^{(\ell-1)} = k_0 - \ell + 1$$

и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathcal{D}}} \frac{x^\ell \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)}}{x^{k_0}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathcal{D}_\infty}} \frac{x^\ell \left(x^{k_0}\right)^{(\ell)}}{x^{k_0}} =$$
$$= k_0\,(k_0-1)\cdot\ldots\cdot(k_0-\ell+1) \in \mathbb{N}.$$

- Функции $\xi_1^{k_1}$, $\xi_1 = \ln^{-1} x$, удовлетворяют условиям 1 и 2 относительно переменной ξ_1. Рассуждения такие же, как для функций x^{k_0}. Поэтому их не повторяем.
- Функция $\ln^{-1} x$ удовлетворяет условиям 1 и 3. Действительно,

$$\operatorname{ord}_0 \ln^{-1} x = \operatorname{ord}_\infty \ln^{-1} x = 0.$$

Кроме того,

$$\operatorname{ord}_0 \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)} = \operatorname{ord}_\infty \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)} = -\ell,$$

$$\operatorname{ord}_0 \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell-1)} = \operatorname{ord}_\infty \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell-1)} = -\ell + 1,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathcal{D}}} \frac{x^\ell \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)}}{\ln^{-1} x} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathcal{D}_\infty}} \frac{x^\ell \left(\ln^{-1} x\right)^{(\ell)}}{\ln^{-1} x} = 0,$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathcal{E}}} t^\ell \left(\exp\left(1/t\right)\right)^{(\ell)} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathcal{E}}} \exp\left(1/t\right), \tag{8}$$

где $t = \ln^{-1} x$, $\mathcal{E} = \{\operatorname{Re} t < 0\}$ при $x \to 0$ или $\mathcal{E} = \{\operatorname{Re} t > 0\}$ при $x \to \infty$.

- $x^{k_0+1} = o(x^{k_0})$, $(\ln^{-1} x)^{k_1+1} = o\left((\ln^{-1} x)^{k_1}\right)$,
- $x = o(\ln^{-1} x)$, $\ln|\ln^{-1} x| = o(\ln|x|)$,
- $x^{k_0} = o\left((\ln^{-1} x)^{k_1}\right)$ для любых k_0 и k_1.

Все необходимые условия выполняются, следовательно, ряд (7) принадлежит классу $\mathcal{C}\left(x, \ln^{-1} x\right)$.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_0=0}^{\infty} \mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\, x^{k_0} \tag{9}$$

класса $\mathcal{C}\,(x)$, где $\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right) x^j$ — это функции, рациональные относительно функции x^{i} ($j = 0, \ldots, \ell \in \mathbb{Z}_+$) и голоморфные в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$, $\mathcal{D}$ — это открытый сектор конечного раствора и малого радиуса в $\mathbb{C}^*$ с вершиной в нуле, а $\mathcal{D}_\infty$ — это множество, полученное инверсией множества $\mathcal{D}$, угол раствора и радиус сектора $\mathcal{D}$ настолько малы, что оба множества $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ не содержат в себе *особых точек* $x^{\mathrm{i}} = a \neq 0$ (или, что то же самое, $\ln x = \arg a - \mathrm{i}\ln|a|$), расположенных на лучах $\arg x = -\ln|a|$, a — это полюс или нуль рациональных функций $\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right) x^j$. Отметим, что этот ряд может относиться к *степенным, полуэкзотическим* или *экзотическим разложениям* в классификации разложений, указанных в работах [2] и [3]. Отметим, что функция $x^{\mathrm{i}} = \exp(-\arg x)\cdot\exp(\mathrm{i}\ln|x|)$ ограничена в $\mathcal{D}$ и в $\mathcal{D}_\infty$ (значение $\arg x$ ограничено, а значения функции $\exp(\mathrm{i}\ln|x|)$ лежат на единичной окружности).

Проверим условия принадлежности формального ряда (9) классу $\mathcal{C}\,(x)$.

- Функции $\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}$ удовлетворяют условию 1. Действительно,

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=k_0.$$

Порядок произведения функций равен сумме порядков этих функций и в нуле, и в бесконечности, поэтому

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=\operatorname{ord}_0\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\,+\,k_0,$$

$$\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)=\operatorname{ord}_\infty\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\,+\,k_0,$$

а

$$\operatorname{ord}_0\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=\operatorname{ord}_\infty\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=0.$$

Убедимся в этом. Рассмотрим функционал

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ \xi\in\mathcal{D}}}\frac{\ln\left|\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|}{\ln|x|}.$$

Поскольку функция $\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)$ не обращается ни в нуль, ни в бесконечность в области $\mathcal{D}$, модуль $|x^{\mathrm{i}}|=\exp(-\arg x)$ ограничен с двух сторон положительными константами, следовательно, модуль $\left|\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|$ также ограничен с двух сторон положительными константами в области $\mathcal{D}$. Отсюда следует, что функция $\ln\left|\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|$ также ограничена в области $\mathcal{D}$ при неограниченном стремлении $|x|$ к нулю, т. е. $\operatorname{ord}_0\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=0$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{ord}_\infty\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)=0$.

В силу того, что $\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}\not\equiv 0$,

$$\ln\left|\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}\right|=\ln\left|x^{k_0-\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j\,\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|=\ln\left|x^{k_0-\ell}\right|+\ln\left|\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j\,\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|,$$

где

$$\alpha_j=\mathrm{C}_j^{\ell}\prod_{t=1}^{j}(k_0-j+1),$$

C_j^{ℓ} — биноминальные коэффициенты, модуль $\left|\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j\,\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\right|$ ограничен с двух сторон положительными константами в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ (это следует из того, что модуль $|x^{\mathrm{i}}|=\exp(-\arg x)$ ограничен с двух сторон положительными константами, а функции $\mathcal{R}_{k_0}^{(j)}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\,x^j$ не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность в областях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$) и в этих областях справедливы равенства

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}=\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}=k_0-\ell,$$

$$\operatorname{ord}_0\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell-1)}=\operatorname{ord}_\infty\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell-1)}=k_0-\ell+1,$$

$$\frac{x^{\ell}\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right)^{(\ell)}}{\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}}=O^*(1).$$

- $\mathcal{R}_{k_0+1}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0+1} = o\left(\mathcal{R}_{k_0}\left(x^{\mathrm{i}}\right)\ x^{k_0}\right).$

Все необходимые условия выполняются, следовательно, ряд (9) принадлежит классу $\mathcal{C}(x)$.

Лемма 1. *Указанные во введении пять типов формальных решений, а именно, степенные, степенно-логарифмические, сложные, полуэкзотические и экзотические разложения, относятся к выделенным классам $\mathcal{C}(x, \ln^{-1} x)$ и $\mathcal{C}(x)$.*

Доказательство леммы 1 проводится аналогично доказательству принадлежности формальных рядов из примеров 1 и 2 к классам $\mathcal{C}(x, \ln^{-1} x)$ и $\mathcal{C}(x)$.

Отметим, что в большинстве случаев вычисление формальных рядов выделенных классов (даже в указанном во введении смысле) является довольно сложной задачей. Изучение свойств (асимптотичность, сходимость, суммируемость) таких рядов еще более сложная задача. Иногда вычислить даже второе слагаемое формального решения уравнения в виде произведения степенной функции с вещественным показателем степени и функции нулевого порядка невозможно. Но можно исследовать (обычно линейное) обыкновенное дифференциальное уравнение на второе слагаемое во всех его особых точках (чтобы получить информацию о настоящем решении этого уравнения) и предъявить его формальное решение в виде произведения степенной функции с тем же самым вещественным показателем степени и степенного ряда по функции нулевого порядка в окрестности нуля (или в окрестности другой особой или неособой точки, в зависимости от поставленной задачи). То же самое имеет место и для следующих слагаемых ряда. По этой причине вычислить области $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_\infty$ в которых все слагаемые бесконечного ряда будут вести себя регулярно возможно в исключительных случаях.

Многие известные формальные ряды выделенных классов — объекты новые и крайне сложные. Их также можно отнести к рядам, называемым в иностранной литературе, *grid-based series* и *transseries* (см., например, [13]–[16]). Строгие определения понятий *grid-based series* и *transseries* требуют нескольких отдельных параграфов. Поскольку в этой работе *grid-based series* и *transseries* не являются предметом исследования, а в работах [13]–[16] можно найти строгие определения и основы методов их построения и изучения, то мы определим их неформально. *Grid-based series* – это ряды Лорана многих переменных в окрестности нуля с конечной главной частью, каждая переменная ряда — это функция независимой переменной, которая в некоторой окрестности нуля является бесконечно малой величиной. *Transseries* — это хорошо упорядоченные формальные суммы членов, образованных комбинациями и композициями степенных функций, логарифмов и экспонент с конечным числом образующих функций. Под хорошо упорядоченными суммами можно понимать асимптотическую упорядоченность, но поскольку сравниваются члены *transseries*, которые могут содержать расходящиеся ряды (т. е. члены *transseries* могут не являться настоящими функциями, для которых можно рассматривать предел частного), то правильнее будет называть такую упорядоченность формальной асимптотической упорядоченностью. Примером *transseries* является сумма

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} x^{-k} e^{-mx}$$

с образующими x^{-1} и e^{-x}, $x \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$. А ряды (см. [13])

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-e^{kx}}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \ x \to +\infty,$$

не являются *transseries* поскольку первый ряд противоречит формальным правилам асимптотической упорядоченности, а второй – имеет бесконечное число образующих. Изучение формальных асимптотик и рядов представляет большой интерес, поскольку они претендуют на роль асимптотик и асимптотических разложений настоящих решений уравнений. Например, шестое уравнение Пенлеве при некоторых значениях параметров уравнения интегрируется в эллиптических функциях [17], и его решение имеет поведение вблизи особых и неособых точек, подобное поведению формальных асимптотик, вычисленных с помощью методов плоской степенной геометрии. И, как уже было сказано, эти формальные асимптотики продолжаются в разложения.

2.3. О порядке формального ряда выделенных классов

Формальный ряд $\check{\varphi}$, принадлежащий классу $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$, записывается в виде

$$\check{\varphi} = \sum_{k_0,k_1,\ldots,k_N=0}^{\infty} \alpha_{k_0k_1\ldots k_N}\ \varphi_{k_0k_1\ldots k_N}(\xi_N)\ldots\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\ \varphi_{k_0}(\xi_0). \tag{10}$$

Порядком $p(\check{\varphi}) \in \mathbb{R}$ ненулевого формального ряда (10) *класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ будем считать порядок его первого ненулевого члена в точке $\xi_0 = 0$ (или в точке $\xi = \infty$, поскольку порядки первого слагаемого ряда, указанного класса, совпадают и в нуле, и в бесконечности)*, т. е.

$$p(\check{\varphi}) = \operatorname{ord}_0(\alpha_{0\ldots0}\ \varphi_{0\ldots0}\ldots\ \varphi_0) = \operatorname{ord}_\infty(\alpha_{0\ldots0}\ \varphi_{0\ldots0}\ldots\ \varphi_0), \quad \alpha_{0\ldots0} \neq 0.$$

Более того, отметим, что $p(\check{\varphi}) = \operatorname{ord}_0(\varphi_0(\xi_0)) = \operatorname{ord}_\infty(\varphi_0(\xi_0))$. Действительно,

$$p(\check{\varphi}) = \lim_{\substack{\xi_0\to0\\ \xi_0\in\mathcal{D}}} \frac{\ln|\alpha_{0\ldots0}\ \varphi_{0\ldots0}\cdots\ \varphi_0|}{\ln|\xi_0|} =$$

$$= \lim_{\substack{\xi_0\to0\\ \xi_0\in\mathcal{D}}} \left[\frac{\ln|\alpha_{0\ldots0}|}{\ln|\xi_0|} + \frac{\ln|\varphi_0|}{\ln|\xi_0|} + \frac{\ln|\varphi_{00}|}{\ln|\xi_1|}\,\frac{\ln|\xi_1|}{\ln|\xi_0|} + \cdots + \frac{\ln|\varphi_{0\ldots0}|}{\ln|\xi_N|}\,\frac{\ln|\xi_N|}{\ln|\xi_0|}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{\xi_0\to0\\ \xi_0\in\mathcal{D}}} \frac{\ln|\varphi_0|}{\ln|\xi_0|} = \operatorname{ord}_0(\varphi_0(\xi_0)) = \operatorname{ord}_\infty(\varphi_0(\xi_0)).$$

Порядком нулевого ряда класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ будем считать $-\infty$.

Напомним, что нулевой ряд класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ – это ряд вида (10), где все $\alpha_{k_0\ldots k_N} = 0$.

Замечание 1. *При дифференцировании постоянного члена ряда, получается ряд с нулевым членом. Естественно было бы его исключить из бесконечной суммы, перенумеровав члены ряда. Но мы этого делать не будем, поскольку это приведет к усложнению изложения. Наоборот, мы сохраним нумерацию в полученном после дифференцирования ряде. При этом нуль будем записывать, как некоторую нам удобную функцию с нулевым коэффициентом.*

3. Доказательство замкнутости выделенного класса относительно алгебраических операций и дифференцирования

3.1. Доказательство замкнутости относительно дифференцирования

Предложение 1. *Формальный ряд $\dfrac{d\check{\varphi}}{d\xi_0}$, полученный в результате дифференцирования по ξ_0 ряда $\check{\varphi}$ порядка $p(\check{\varphi})$ класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$:*

1) *также принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$, и*

2) *его порядок больше или равен $p(\check{\varphi}) - 1$.*

Замечание 2. *В условиях предложения 1 порядок формального ряда* $\dfrac{d\check{\varphi}}{d\xi_0}$ *будет больше, чем* $p(\check{\varphi})-1$, *только в том случае, если ряд* $\check{\varphi}$ *начинается с постоянного члена и не содержит других членов нулевого порядка, во всех остальных случаях имеется равенство* $p\left(\dfrac{d\check{\varphi}}{d\xi_0}\right)=p(\check{\varphi})-1$.

Доказательство предложения 1. Докажем сначала первую часть предложения 1. Для простоты изложения будем рассматривать случай $N=1$, т. е. $\check{\varphi}\in\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$.

Запишем ряд $\check{\varphi}$ в виде

$$\check{\varphi}=\sum_{k_0,k_1=0}^{\infty}\alpha_{k_0k_1}\,\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\varphi_{k_0}(\xi_0).$$

Продифференцируем его по ξ_0 и получим ряд

$$\frac{d\check{\varphi}}{d\xi_0}=\sum_{k_0,k_1=0}^{\infty}\alpha_{k_0k_1}\,\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\frac{\varphi_{k_0}(\xi_0)}{\xi_0},\tag{11}$$

где

$$\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)=\varphi'_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\,+\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}$$

при $\varphi'_{k_0}(\xi_0)\not\equiv 0$ или $\varphi'_{k_0k_1}(\xi_1)\not\equiv 0$, и

$$\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)=\frac{\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)}{\xi_1}\,\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0,\quad \text{а}\quad \alpha_{k_0k_1}=0,$$

при $\varphi_{k_0}(\xi_0)\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)=\mathrm{const}$.

Покажем, что ряд (11) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$, т. е. функции $\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)$ и $\varphi_{k_0}(\xi_0)$ обладают свойствами

1. $\Phi_{k_0k_1+1}=o(\Phi_{k_0k_1})$,
2. $\dfrac{\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^{\ell}}{\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)}=O^*(1)$, если $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\not\equiv 0$,
3. $\mathrm{ord}_0\left(\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right)=\mathrm{ord}_0\left(\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right)-1$ и
$$\mathrm{ord}_\infty\left(\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right)=\mathrm{ord}_\infty\left(\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right)-1,$$
если $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)$, $\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\not\equiv 0$,
4. $\varphi_{k_0}=o\left(\Phi_{k_0k_1}\right)$ для всех φ_{k_0} и $\Phi_{k_0k_1}$, кроме тех, для которых произведения $\varphi_{k_0}\Phi_{k_0k_1}$ постоянны.

Свойство 1. Рассмотрим отношение $\Phi_{k_0k_1+1}/\Phi_{k_0k_1}$. Поскольку функции $\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)$ и $\varphi_{k_0}(\xi_0)$ удовлетворяют условию 2, а функция $\xi_1(\xi_0)$ удовлетворяет условию 3, то

$$\Phi_{k_0s}(\xi_1)=\begin{cases}O^*\left(\varphi_{k_0s}(\xi_1)\right), & \text{если } \varphi'_{k_0}(\xi_0)\not\equiv 0,\\[2ex] O^*\left(\varphi_{k_0s}(\xi_1)\,\dfrac{\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0}{\xi_1(\xi_0)}\right), & \text{если } \varphi'_{k_0}(\xi_0)\equiv 0,\end{cases}\tag{12}$$

$s = k_1,\ k_1 + 1$. Тогда
$$\frac{\Phi_{k_0k_1+1}}{\Phi_{k_0k_1}} = O^*\left(\frac{\varphi_{k_0k_1+1}}{\varphi_{k_0k_1}}\right).$$
А поскольку $\varphi_{k_0k_1+1} = o(\varphi_{k_0k_1})$, то свойство 1 выполнено.

Свойство 2. Требуется доказать, что если $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$, то
$$\frac{\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^\ell}{\Phi_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1).$$

Продифференцируем ℓ раз по ξ_1 функцию $\Phi_{k_0k_1}$. Будем полагать, что производная $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$. При этом, если $\varphi'_{k_0}(\xi_0) \not\equiv 0$ или $\varphi'_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$, то получаем выражение
$$\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) = \sum_{p=0}^{\ell} \mathrm{C}_\ell^p \left[\varphi^{(\ell-p+1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\left(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\right)^{(p)}_{\xi_1} + \varphi^{(\ell-p)}_{k_0k_1}(\xi_1)\left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}\right)^{(p)}_{\xi_1}\right],$$
а если $\varphi'_{k_0}(\xi_0) \equiv 0$ и $\varphi'_{k_0k_1}(\xi_1) \equiv 0$, то выражение
$$\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) = (-1)^\ell \ell!\ \frac{\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)}{\xi_1^{\ell+1}}\ \left(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\right)^{(\ell)}_{\xi_1}.$$

Далее воспользуемся формулой Фаа-ди-Бруно производной сложной функции (см. [18])
$$\frac{d^p f(g(x))}{dx^p} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{p} tm_t = p} \frac{p!}{m_1!\ldots m_p!}\ f^{(m_1+\cdots+m_p)}(g)\ \prod_{t=1}^{p} \frac{\left(g^{(t)}(x)\right)^{m_t}}{t!},$$
$p \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{Z}_+$. Применяя эту формулу к членам выражений выше, получаем соотношения
$$\left(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\right)^{(p)}_{\xi_1} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{p} tm_t = p} \frac{p!}{m_1!\ldots m_p!}\ \left(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\right)^{(m_1+\cdots+m_p)}_{\xi_0}\ \prod_{t=1}^{p} \frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!}$$
и
$$\left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}\right)^{(p)}_{\xi_1} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{p} tm_t = p} \frac{p!}{m_1!\ldots m_p!}\ \left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}\right)^{(m_1+\cdots+m_p)}_{\xi_0}\ \prod_{t=1}^{p} \frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!}.$$

Расписав более подробно выражения выше и учитывая тот факт, что функции $\varphi_{k_0}(\xi_0)$, $\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)$ удовлетворяют условию 2, а функция $\xi_1(\xi_0)$ удовлетворяет условию 3, получаем равенства
$$\xi_1^{\ell-p+1}\,\varphi^{(\ell-p+1)}_{k_0k_1}(\xi_1) = O^*\left(\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\right), \quad \xi_1^{\ell-p}\,\varphi^{(\ell-p)}_{k_0k_1}(\xi_1) = O^*\left(\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\right),$$
$$\xi_0^{m_1+\cdots+m_p}\ \left(\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0\right)^{(m_1+\cdots+m_p)}_{\xi_0} = O^*\left(\xi_1(\xi_0)\right),$$
$$\xi_0^{m_1+\cdots+m_p}\ \left(\frac{\varphi'_{k_0}(\xi_0)\xi_0}{\varphi_{k_0}(\xi_0)}\right)^{(m_1+\cdots+m_p)}_{\xi_0} = O^*(1),$$
$$\xi_1^p\ \prod_{t=1}^{p}\left(\xi_0^{(t)}(\xi_1)\right)^{m_t} = \prod_{t=1}^{p}\left(\xi_0^{(t)}(\xi_1)\,\xi_1^t\right)^{m_t}, \tag{13}$$

где

$$\lim_{\xi_1\to 0}\prod_{t=1}^{p}\left(\xi_0^{(t)}(\xi_1)\,\xi_1^t\right)^{m_t}=\lim_{\xi_1\to 0}\xi_0^{m_0+\dots+m_p}(\xi_1).$$

Таким образом, получаем, что функция

$$\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^{\ell}=\begin{cases} O^*\left(\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\right), & \text{если } \varphi'_{k_0}(\xi_0)\not\equiv 0,\\[2ex] O^*\left(\varphi_{k_0k_1}(\xi_1)\,\dfrac{\xi_1'(\xi_0)\,\xi_0}{\xi_1(\xi_0)}\right), & \text{если } \varphi'_{k_0}(\xi_0)\equiv 0.\end{cases}\tag{14}$$

Наконец, из формул (12) и (14) следует, что свойство 2 выполняется.

Свойство 3. Равенство

$$\operatorname{ord}_0(\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1))=\operatorname{ord}_0(\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1))-1$$

при $\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\not\equiv 0$ и $\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\not\equiv 0$, равносильно равенству

$$\lim_{\xi_1\to 0}\ln\left|\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)/\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right|=\lim_{\xi_1\to 0}\ln|\xi_1|.\tag{15}$$

При этом равенство (15) выполняется, если выполняется равенство

$$\lim_{\xi_1\to 0}\left|\Phi^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)/\Phi^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right|=\lim_{\xi_1\to 0}|\xi_1|\ \ (=0).\tag{16}$$

Аналогичные формулы получаем при $\xi_1\to\infty$. Применяя формулу (14) к левой части равенства (16), видим, что функции $\Phi_{k_0k_1}$ обладают свойством 3.

Свойство 4. Пользуясь формулой (12), нетрудно убедиться, что $\varphi_{k_0}=o(\Phi_{k_0k_1})$.

Первая часть предложения 1 доказана, ряд (11) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$.

Докажем вторую часть предложения 1. Поскольку ряд (11) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0,\xi_1)$, то его порядок определяется по первому ненулевому члену ряда, т. е.

$$p\left(\frac{d\check\varphi}{d\xi_0}\right)=\operatorname{ord}_0\left(\alpha_{\kappa_0\kappa_1}\,\Phi_{\kappa_0\kappa_1}(\xi_1)\varphi_{\kappa_0}(\xi_0)\right),\quad \alpha_{\kappa_0\kappa_1}\neq 0.$$

Учитывая формулу (12), и то, что функция $\xi_1(\xi_0)$ удовлетворяет условию 1, получаем равенство

$$\lim_{\xi_0\to 0}\frac{\ln\left|\dfrac{\alpha_{\kappa_0\kappa_1}\,\Phi_{\kappa_0\kappa_1}\,\varphi_{\kappa_0}}{\xi_0}\right|}{\ln|\xi_0|}=\lim_{\xi_0\to 0}\left(\frac{\ln|\alpha_{\kappa_0\kappa_1}|}{\ln|\xi_0|}+\frac{\ln|\Phi_{\kappa_0\kappa_1}|}{\ln|\xi_0|}+\frac{\ln|\varphi_{\kappa_0}|}{\ln|\xi_0|}-1\right)=$$
$$=\operatorname{ord}_0\varphi_{\kappa_0}(\xi_0)-1\geqslant\operatorname{ord}_0\varphi_0(\xi_0)-1=p(\check\varphi)-1.\quad\square$$

3.2. Доказательство замкнутости относительно суммирования

Предложение 2. *Сумма $\check\varphi+\check\psi\neq 0$ формальных рядов $\check\varphi$ и $\check\psi$ класса $\mathcal{C}(\xi_0,\dots,\xi_N)$ порядков $p(\check\varphi)$ и $p(\check\psi)\in\mathbb{R}$ соответственно является формальным рядом $\check\theta$ класса $\mathcal{C}(\xi_0,\dots,\xi_N)$ порядка $p(\check\theta)\in\mathbb{R}$, где $p(\check\theta)\geqslant\min(p(\check\varphi),p(\check\psi))$.*

Замечание 3. *В условиях предложения 2 вместо неравенства $p(\check\theta)\geqslant\min(p(\check\varphi),p(\check\psi))$ можно написать равенство $p(\check\theta)=\min(p(\check\varphi),p(\check\psi))$, если $p(\check\varphi)\neq p(\check\psi)$ или если $p(\check\varphi)=p(\check\psi)$, но не все слагаемые с $k_0=0$ в этих рядах взаимнообратные.*

Доказательство предложения 2. Снова для простоты изложения будем рассматривать случай $N = 1$, т. е. $\breve{\varphi}$, $\breve{\psi} \in \mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$.

Запишем ряды $\breve{\varphi}$ и $\breve{\psi}$ в виде

$$\breve{\varphi} = \sum_{k_0=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1)\, \varphi_{k_0}(\xi_0), \qquad \tilde{\varphi}_{k_0}(\xi_1) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \alpha_{k_0 k_1}\, \varphi_{k_0 k_1}(\xi_1), \tag{17}$$

$$\breve{\psi} = \sum_{k_0=0}^{\infty} \tilde{\psi}_{k_0}(\xi_1)\, \psi_{k_0}(\xi_0), \qquad \tilde{\psi}_{k_0}(\xi_1) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \beta_{k_0 k_1}\, \psi_{k_0 k_1}(\xi_1), \tag{18}$$

а их сумму $\breve{\theta}$ — в виде

$$\breve{\theta} = \sum_{k_0=0}^{\infty} \tilde{\theta}_{k_0}(\xi_1)\, \theta_{k_0}(\xi_0), \qquad \tilde{\theta}_{k_0}(\xi_1) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \gamma_{k_0 k_1}\, \theta_{k_0 k_1}(\xi_1). \tag{19}$$

Упорядочим члены ряда (19) следующим образом:

$$\theta_0 = \begin{cases} \varphi_0 & \text{при} \quad \psi_0 = o(\varphi_0), \\ \psi_0 & \text{при} \quad \varphi_0 = o(\psi_0), \\ \varphi_0 & \text{при} \quad \psi_0 = O^*(\varphi_0), \end{cases}$$

если $k_0 \geqslant 1$, то $\theta_{k_0} = \varphi_{m_0}$ при

$$\begin{cases} \varphi_{m_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \psi_{p_0} = o(\varphi_{m_0}) \ \text{для} \ \forall\, p_0 \ \text{таких, что} \ \psi_{p_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \varphi_{m_0-1} \neq o(\theta_{k_0-1}) \ \text{при} \ m_0 \geqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{m_0} = O^*(\psi_{p_0}), \\ \varphi_{m_0} = o(\theta_{k_0-1}), \ \text{но} \ \varphi_{m_0-1} \neq o(\theta_{k_0-1}) \ \text{при} \ m_0 \geqslant 1; \end{cases}$$

$\theta_{k_0} = \psi_{p_0}$ при

$$\begin{cases} \psi_{p_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \varphi_{m_0} = o(\psi_{p_0}) \ \text{для} \ \forall\, m_0 \ \text{таких, что} \ \varphi_{m_0} = o(\theta_{k_0-1}), \\ \psi_{p_0-1} \neq o(\theta_{k_0-1}) \ \text{при} \ p_0 \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \tilde{\varphi}_{m_0} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta_{k_0} = \varphi_{m_0}, \\ \psi_{p_0} \neq O^*(\varphi_{m_0}) \ \text{для} \ \forall p_0; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \tilde{\psi}_{p_0} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta_{k_0} = \psi_{p_0}, \\ \psi_{p_0} \neq O^*(\varphi_{m_0}) \ \text{для} \ \forall\, m_0; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{k_0} = \tilde{\varphi}_{m_0} + \tilde{\psi}_{p_0}\,\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta_{k_0} = \varphi_{m_0}, \\ \varphi_{m_0} = O^*(\psi_{p_0}), \quad \text{но} \quad \tilde{\varphi}_{k_0}\varphi_{k_0} \neq -\tilde{\psi}_{k_0}\psi_{k_0}, \end{cases}$$

где

$$\theta_{k_0 0} = \varphi_{m_0 0}$$

при $\psi_{p_0 0} = o(\varphi_{m_0 0})$ или $\varphi_{m_0 0} = O^*(\psi_{p_0 0})$, $\beta_{p_0 0} = 0$;

$$\theta_{k_0 0} = \psi_{p_0 0}\,\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}$$

при $\varphi_{m_0 0} = o(\psi_{p_0 0})$ или $\varphi_{m_0 0} = O^*(\psi_{p_0 0})$, $\alpha_{m_0 0} = 0$;

$$\theta_{k_0 0} = \varphi_{m_0 0} + \psi_{p_0 0}\,\frac{\beta_{p_0 0}}{\alpha_{m_0 0}}\,\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}$$

при $\varphi_{m_0 0} = O^*(\psi_{p_0 0})$ и $\alpha_{m_0 0},\ \beta_{p_0 0} \in \mathbb{C}^*$;
если $k_0 + k_1 \geqslant 1$, то $\theta_{k_0 k_1} = \varphi_{m_0 m_1}$ при

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \psi_{p_0 p_1} = o(\varphi_{m_0 m_1}) \quad \text{для } \forall\, p_1 \text{ таких, что } \psi_{p_0 p_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = O^*(\psi_{p_0 p_1}), \ \ \beta_{p_0 p_1} = 0, \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \ \text{но } \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\theta_{k_0 k_1} = \psi_{p_0 p_1}\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}} \quad \text{при}$$

$$\begin{cases} \psi_{p_0 p_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\psi_{p_0 p_1}) \ \text{ для } \ \forall\, m_1 \text{ таких, что } \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \\ \psi_{p_0 p_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = O^*(\psi_{p_0 p_1}),\ \alpha_{m_0 m_1} = 0, \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \ \text{но } \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\theta_{k_0 k_1} = \varphi_{m_0 m_1} + \frac{\beta_{p_0 p_1}}{\alpha_{m_0 m_1}}\,\psi_{p_0 p_1}\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}} \quad \text{при}$$

$$\begin{cases} \varphi_{m_0 m_1} = O^*(\psi_{p_0 p_1}), \\ \varphi_{m_0 m_1} = o(\theta_{k_0 k_1 - 1}), \ \text{но } \varphi_{m_0 m_1 - 1} \neq o(\theta_{k_0 k_1 - 1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1, \\ \alpha_{m_0 m_1},\ \beta_{p_0 p_1} \neq 0. \end{cases}$$

Теперь покажем, что ряд (19) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$, т. е. функции $\theta_{k_0 k_1}(\xi_1)$ и $\theta_{k_0}(\xi_0)$ обладают свойствами

1. $\theta_{k_0k_1+1} = o(\theta_{k_0k_1})$,

2. $\dfrac{\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^\ell}{\theta_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$, если $\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

3. $\operatorname{ord}_0\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1$ и

$$\operatorname{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$

если $\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ и $\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

4. $\theta_{k_0} = o\left(\theta_{k_0k_1}\right)$ для всех $\theta_{k_0}\theta_{k_0k_1} \neq \mathrm{const}$.

Нетрудно видеть, что функции $\theta_{k_0}(\xi_0)$ и $\theta_{k_0k_1}(\xi_1)$ обладают свойствами 1 и 4 в силу введенной упорядоченности. Докажем, что функции $\theta_{k_0k_1}(\xi_1)$ обладают свойством 2.

Достаточно рассмотреть случай

$$\theta_{k_0} = \varphi_{m_0}, \ \ \theta_{k_0k_1} = \psi_{p_0p_1}\,\frac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}, \ \ \psi_{p_0} = O^*(\varphi_{m_0}),$$

так как во всех остальных случаях справедливость свойства 2 либо очевидна, либо очевидно следует из этого случая.

Дифференцируя $\psi_{p_0p_1}\dfrac{\psi_{p_0}}{\varphi_{m_0}}$ по ξ_1 ℓ раз, получаем выражения

$$\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\,\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(\ell)}_{\xi_1} = \sum_{j=0}^{\ell} \mathrm{C}_\ell^j\,\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\right)^{(\ell-j)}\,\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(j)}_{\xi_1},$$

при $j \geqslant 1$

$$\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(j)}_{\xi_1} = \sum_{\sum\limits_{t=1}^{j} t m_t = j} \frac{j!}{m_1!\dots m_j!}\,\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(m_1+\dots+m_j)}_{\xi_0}\,\prod_{t=1}^{j}\frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!},$$

$m_1,\dots,m_j \in \mathbb{Z}_+$.

Применяя снова формулы производной произведения, производной сложной функции и учитывая то, что функции $\varphi_{m_0}(\xi_0)$, $\psi_{p_0}(\xi_0)$ и $\psi_{p_0p_1}(\xi_1)$ удовлетворяют условию 2, получаем выражения

$$\xi_1^{\ell-j}\psi^{(\ell-j)}_{p_0p_1}(\xi_1) = O^*\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\right),$$

$$\xi_0^{m_1+\dots+m_j}\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(m_1+\dots+m_j)}_{\xi_0} = O^*\left(\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right).$$

Кроме того, для выражения $\displaystyle\prod_{t=1}^{j}\frac{(\xi_0^{(t)}(\xi_1))^{m_t}}{t!}$ справедлива формула (13).

Тогда имеем соотношение

$$\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\,\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right)^{(\ell)}_{\xi_1}\,\xi_1^\ell = O^*\left(\psi_{p_0p_1}(\xi_1)\,\frac{\psi_{p_0}(\xi_0)}{\varphi_{m_0}(\xi_0)}\right). \tag{20}$$

Следовательно, равенство
$$\frac{\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\,\xi_1^\ell}{\theta_{k_0k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$$
выполняется.

Нетрудно проверить, что при $\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ и $\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ свойство 3 выполняется, т. е. имеют место соотношения
$$\operatorname{ord}_0\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1$$
и
$$\operatorname{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_\infty\left(\theta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1.$$
Доказательство этих соотношений не приводим, поскольку оно аналогично доказательству выполнения свойства 3 предложения 1 с учетом формулы (13).

Итак, мы доказали, что ряд $\check\theta = \check\varphi + \check\psi$ принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$.

Из введенной упорядоченности членов ряда $\check\theta$ очевидно следует, что его порядок $p(\check\theta) \in \mathbb{R}$ и выполняется неравенство $p(\check\theta) \geqslant \min\,(p(\check\varphi), p(\check\psi))$. $\square$

3.3. Доказательство замкнутости относительно произведения

Предложение 3. *Произведение $\check\varphi \cdot \check\psi \neq 0$ формальных рядов $\check\varphi$ и $\check\psi$ класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ порядков $p(\check\varphi)$ и $p(\check\psi) \in \mathbb{R}$ соответственно является формальным рядом $\check\vartheta$ класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ порядка $p(\check\vartheta) = p(\check\varphi) + p(\check\psi)$.*

Доказательство. Снова для простоты изложения будем рассматривать случай $N = 1$.

Рассмотрим ряды (17) и (18). Их произведение $\check\vartheta$ запишем в виде
$$\check\vartheta = \sum_{k_0=0}^{\infty} \tilde\vartheta_{k_0}(\xi_1)\,\vartheta_{k_0}(\xi_0), \qquad \tilde\vartheta_{k_0}(\xi_1) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \delta_{k_0k_1}\,\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1). \tag{21}$$
где
$$\vartheta_0 = \varphi_0\psi_0, \qquad \delta_{00}\,\vartheta_{00} = \alpha_{00}\,\beta_{00}\,\varphi_{00}\psi_{00}, \quad \alpha_{00},\, \beta_{00} \in \mathbb{C}^*,$$
$$\vartheta_{k_0} = \varphi_{m_0}\psi_{p_0} \quad \text{при} \quad k_0 \geqslant 1 \;\; \text{и} \quad \begin{cases} \varphi_{m_0}\psi_{p_0} = o(\vartheta_{k_0-1}), \text{ но} \\[2ex] \varphi_{m_0-1}\psi_{p_0} \neq o(\vartheta_{k_0-1}) \quad \text{при} \quad m_0 \geqslant 1, \\[2ex] \varphi_{m_0}\psi_{p_0-1} \neq o(\vartheta_{k_0-1}) \quad \text{при} \quad p_0 \geqslant 1, \end{cases}$$
$\vartheta_{k_0k_1} = \varphi_{m_0m_1}\psi_{p_0p_1}$ при $k_0 + k_1 \geqslant 1$ и
$$\begin{cases} \vartheta_{k_0} = \varphi_{m_0}\psi_{p_0}, \\[2ex] \varphi_{m_0m_1}\psi_{p_0p_1} = o(\vartheta_{k_0k_1-1}), \text{ но} \\[2ex] \varphi_{m_0m_1-1}\psi_{p_0p_1} \neq o(\vartheta_{k_0k_1-1}) \quad \text{при} \quad m_1 \geqslant 1, \\[2ex] \varphi_{m_0m_1}\psi_{p_0p_1-1} \neq o(\vartheta_{k_0k_1-1}) \quad \text{при} \quad p_1 \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что ряд (21) принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$, т. е. функции $\vartheta_{k_0k_1}(\xi_1)$ и $\vartheta_{k_0}(\xi_0)$ обладают свойствами

1. $\vartheta_{k_0+1} = o(\vartheta_{k_0})$ и $\vartheta_{k_0 k_1+1} = o(\vartheta_{k_0 k_1})$,

2. $\dfrac{\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0)\,\xi_0^\ell}{\vartheta_{k_0}(\xi_0)} = O^*(1)$ и $\dfrac{\vartheta^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1)\,\xi_1^\ell}{\vartheta_{k_0 k_1}(\xi_1)} = O^*(1)$,
   если $\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0) \not\equiv 0$ и $\vartheta^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

3. $\operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0}(\xi_0)\right) - 1$ и
$$\operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_0\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$
$$\operatorname{ord}_\infty\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0}(\xi_0)\right) = \operatorname{ord}_\infty\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0}(\xi_0)\right) - 1$$
   и
$$\operatorname{ord}_\infty\left(\vartheta^{(\ell)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) = \operatorname{ord}_\infty\left(\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0k_1}(\xi_1)\right) - 1,$$
   если $\vartheta^{(\ell)}_{k_0 k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$ и $\vartheta^{(\ell-1)}_{k_0 k_1}(\xi_1) \not\equiv 0$,

4. $\vartheta_{k_0} = o\left(\vartheta_{k_0 k_1}\right)$ для всех $\vartheta_{k_0}\vartheta_{k_0 k_1} \neq \mathrm{const}$.

Для функций $\vartheta_{k_0}(\xi_0)$ и $\vartheta_{k_0 k_1}(\xi_1)$ свойства 1 и 4 выполнены согласно введенной упорядоченности. Нетрудно проверить, что для функций $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, удовлетворяющих условию 2, справедливо равенство
$$\frac{(\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi))^{(\ell)}\xi^\ell}{\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)} = O^*(1), \tag{22}$$
если $\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi) \neq \mathrm{const}$. Из равенства (22) следует, что функции $\vartheta_{k_0}(\xi_0)$ и $\vartheta_{k_0 k_1}(\xi_1)$ обладают свойством 2.

Повторяя рассуждения доказательства свойства 3 предложения 1 с учетом формулы (22), получаем, что свойство 3 предложения 3 также справедливо.

Итак, ряд $\check\vartheta = \check\varphi \cdot \check\psi$ принадлежит классу $\mathcal{C}(\xi_0, \xi_1)$.

Из введенной упорядоченности членов ряда $\check\vartheta$ очевидно следует, что его порядок $p(\check\vartheta)$ равен $p(\check\varphi) + p(\check\psi)$. $\square$

4. О формальных рядах класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$, являющихся формальными решениями алгебраического ОДУ

Рассмотрим формальный ряд вида (10) класса $\mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$. Обозначим его порядок $p(\check\varphi) = \rho_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть ряд (10) является формальным решением (см. замечание 1) алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения
$$f(\xi_0, y_0, \ldots, y_n) = 0, \tag{23}$$
где $y_j = \xi_0^j \,\dfrac{d^j y}{d\xi_0^j}$, $f(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)$ – многочлен своих переменных, т. е.
$$f(\xi_0, \check\varphi_0, \ldots, \check\varphi_n) \equiv 0, \qquad \check\varphi_j = \xi_0^j\,\frac{d^j\check\varphi}{d\xi_0^j},$$

и в силу предложений 1–3
$$f(\xi_0, \check{\varphi}_0, \ldots, \check{\varphi}_n) \in \mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N).$$
Согласно предложению 1
$$p(\check{\varphi}_0) = \rho_0, \ \ldots, \ p(\check{\varphi}_n) = \rho_0.$$
Каждому слагаемому уравнения (23) вида
$$\lambda\, \xi_0^{q_1}\, y_0^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot y_n^{q_{2n}},$$
где $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $q_1, q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, можно поставить в соответствие точку (векторный показатель степени этого слагаемого) (q_1, q_2), $q_2 = q_{20} + \cdots = q_{2n}$. Согласно предложениям 2 и 3
$$p(\xi_0^{q_1}\, \check{\varphi}_0^{q_{20}} \cdot \ldots \cdot \check{\varphi}_n^{q_{2n}}) = q_1 + q_2\rho_0.$$

Пусть множество $\{Q_i = (q_1^i, q_2^i),\ i = 0, \ldots, m\}$ — это носитель уравнения (23), т. е. множество, содержащее все векторные показатели степени всех слагаемых этого уравнения, а R — это вектор $(1, \rho_0)$. Рассмотрим все возможные скалярные произведения $\langle Q_i, R\rangle = c_i \in \mathbb{R}$. Пусть $c = \min\limits_{i=0,\ldots,m} c_i$. Сумма слагаемых уравнения (23) с такими векторными показателями степени, что $\langle Q_i, R\rangle = c \in \mathbb{R}$, называется *укороченной суммой* (см. [2]), обозначим ее $\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)$, а уравнение
$$\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n) = 0 \tag{24}$$
— *укороченным уравнением.* Уравнение (24) является *квазиоднородным* обыкновенным дифференциальным уравнением, это означает, что
$$\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)\Big|_{y=\xi_0^{\rho_0} u} = \xi_0^c\, \mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n),$$
где $\mathcal{P}_0(u_0, \ldots, u_n)$ — это многочлен с постоянными коэффициентами, $u_j = \xi_0^j\, u^{(j)}$.

Теорема 1. *Если уравнение* (23) *имеет формальное решение* $\check{\varphi} \in \mathcal{C}(\xi_0, \ldots, \xi_N)$ *вида* (10)*, тогда укороченное уравнение* (24) *имеет укороченное* (*формальное*) *решение*
$$y = \hat{\varphi}, \qquad \hat{\varphi} = \tilde{\varphi}_0(\xi_1, \ldots, \xi_N)\, \varphi_0(\xi_0). \tag{25}$$

Доказательство. Если $\rho_0 \neq 0$, то в уравнении (23) и его формальном решении $\check{\varphi}$ вида (10) сделаем степенное преобразование
$$y = \xi_0^{\rho_0} u. \tag{26}$$
Получаем уравнение
$$F(\xi_0, u_0, \ldots, u_n) = 0, \tag{27}$$
с решением $u = \check{\Phi}$, $\check{\varphi} = \xi_0^{\rho_0}\, \check{\Phi}$, $p(\check{\Phi}) = 0$. Уравнение (27) уже не полином, поскольку содержит ξ_0 в вещественных степенях. Действительно, после степенного преобразования (26) каждое слагаемое уравнения (23) вида
$$\beta\, \xi_0^{q_1}\, y_0^{q_{20}} \ldots y_n^{q_{2n}},$$
где $\beta \in \mathbb{C}$, $q_1, q_{20}, \ldots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, переходит в сумму слагаемых вида
$$\tilde{\beta}\, \xi_0^{q_1 + q_2\rho_0} u_0^{\tilde{q}_{20}} \ldots u_n^{\tilde{q}_{2n}}, \tag{28}$$
где $\tilde{\beta} \in \mathbb{C}^*$, $\tilde{q}_{20}, \ldots, \tilde{q}_{2n} \in \mathbb{Z}_+$, $\tilde{q}_{20} + \cdots + \tilde{q}_{2n} = q_2$. Следовательно, под действием степенного преобразования (26) вся укороченная сумма $\hat{f}(\xi_0, y_0, \ldots, y_n)$ переходит в выражение

$\xi_0^c\, \mathcal{P}_0(u_0,\dots,u_n)$, где c — это минимум всех значений $q_1+q_2\rho_0$, $\mathcal{P}_0(u_0,\dots,u_n)$ — это многочлен с постоянными коэффициентами, $u_j=\xi_0^j\, u^{(j)}$, а остальные слагаемые перейдут в сумму слагаемых вида (28) с $q_1+q_2\rho_0>c$. Поэтому уравнение (27) имеет вид

$$\xi_0^c\,[\mathcal{P}_0(u_0,\dots,u_n)+\xi_0^{v_1}\mathcal{P}_1(u_0,\dots,u_n)+\dots+\xi_0^{v_t}\mathcal{P}_t(u_0,\dots,u_n)]=0,$$

где $\mathcal{P}_0(u_0,\dots,u_n)$, …, $\mathcal{P}_t(u_0,\dots,u_n)$ — это многочлены с постоянными коэффициентами, числа v_1, …, $v_n\in\mathbb{R}_+$, v_1, …, $v_n\neq 0$. Разделим это уравнение на ξ_0^c, получим уравнение

$$\mathcal{P}_0(u_0,\dots,u_n)+\xi_0^{v_1}\mathcal{P}_1(u_0,\dots,u_n)+\dots+\xi_0^{v_t}\mathcal{P}_t(u_0,\dots,u_n)=0, \tag{29}$$

которое обозначим $g(\xi_0,u_0,\dots,u_n)=0$. Из записи (29) и предложений 1–3 следует, что порядок $p\left(g(\xi_0,\check\Phi_0,\dots,\check\Phi_n)\right)\geqslant 0$.

Решение

$$u=\check\Phi,\qquad \check\Phi=\sum_{k_0=0}^{\infty}\tilde\Phi_{k_0}(\xi_1,\dots,\xi_N)\,\Phi_{k_0}(\xi_0)$$

уравнения (29) запишем в виде

$$u=\hat\Phi+w,\qquad \hat\Phi=\tilde\Phi_0(\xi_1,\dots,\xi_N)\,\Phi_0(\xi_0). \tag{30}$$

Подставим решение (30) в уравнение (29), а затем (учитывая то, что уравнение (29) полиномиально по $u_0,\dots,u_n$) в выражении после подстановки раскроем скобки по формуле бинома Ньютона, получим выражение

$$\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\dots,\hat\Phi_n)+\left[\frac{\partial\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\dots,\hat\Phi_n)}{\partial u_0}\,w_0+\dots+\frac{\partial\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\dots,\hat\Phi_n)}{\partial u_n}\,w_n\right]+$$
$$+\dots+\xi_0^{v_1}\mathcal{P}_1(\hat\Phi_0,\dots,\hat\Phi_n)+\dots=0,\qquad \hat\Phi_j=\xi_0^j\,\hat\Phi^{(j)},\qquad w=\xi_0^j\,w^{(j)}. \tag{31}$$

Отдельно оценивая порядок каждого слагаемого уравнения (31), убеждаемся, что наименьший порядок функций в нуле и в бесконечности имеют члены ряда $\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\,\dots,\,\hat\Phi_n)$, при этом порядок ряда $p(\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\,\dots,\,\hat\Phi_n))$ либо равен нулю, либо равен $-\infty$ (если $\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\,\dots,\,\hat\Phi_n)=0$). А порядки остальных ненулевых слагаемых равенства (31) больше нуля. Действительно, порядок $p(w_j)>p(\hat\Phi_j)=0$, многочлены $\mathcal{P}_0(u_0,\,\dots,u_n)$, …, $\mathcal{P}_t(u_0,\,\dots,\,u_n)$ и их производные по u_0, …, u_n (которые тоже многочлены) при $u_j=\hat\Phi_j$ либо равны нулю, либо имеют порядок, равный нулю в силу предложений 2 и 3, а числа $v_n>\dots>v_1>0$. Но поскольку ряд $\check\Phi$ формально удовлетворяет уравнению (29), то сумма всех слагаемых минимального порядка в выражении (31) равна нулю, т. е. $\mathcal{P}_0(\hat\Phi_0,\dots,\hat\Phi_n)=0$. Делая в уравнении $\mathcal{P}_0(u_0,\dots,u_n)=0$ обратное преобразование к преобразованию (26) и домножая результат на ξ_0^c, получаем, что

$$\hat f(\xi_0,\hat\varphi_0,\dots,\hat\varphi_n)=0,\qquad \hat\varphi_j=\xi_0^j\,\hat\varphi^{(j)},\qquad \hat\varphi=\xi_0^{\rho_0}\,\hat\Phi.\quad\square$$

Отметим, что обратное утверждение к утверждению теормы 1 неверно. Уравнение (23) может не иметь формального решения, которое начинается с решения укороченного уравнения (24). Но методы плоской степенной геометрии позволяют алгоритмично определить решения укороченных уравнений, которые не являются формальными асимптотиками. А именно, среди всех решений уравнения (24) выбираются только те, которые имеют порядок ρ_0. Число ρ_0 такое, что минимум (или максимум, если $x\to\infty$) скалярных произведений $q_1+q_2\rho_0$ по всем q_1, q_2 уравнения (23) достигается именно на членах уравнения (24). Только такие решения укороченного уравнения могут продолжаться в ряды, которые являются формальными решениями полного уравнения.

5. Заключение

Операции сложения, умножения и дифференцирования формальных рядов класса

$$\mathcal{C}(\xi_0, \dots, \xi_N)$$

не выводят их из этого класса. Кроме того, если такой формальный ряд удовлетворяет алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению, то его укорочение (первое приближение ряда) является формальным решением укороченного уравнения (первого приближения уравнения). Результаты этой работы являются теоретической базой для методов плоской степенной геометрии [2], позволяющих вычислять формальные ряды выделенного класса.

Глубоко благодарю рецензентов за замечания к тексту статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эрдейи А. Асимптотические разложения, М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962, 128 с.

2. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи математических наук, 2004, т. 59, № 3, с. 429–480.

3. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО, 2010, т. 71, с. 6–118.

4. Брюно А. Д., Петрович В. Ю. Особенности решений первого уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2004, № 75, 17 с.

5. Брюно А. Д., Гриднев А. В. Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003, № 51, 19 с.

6. Брюно А. Д., Гриднев А. В. Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2010, № 10, 18 с.

7. Bruno A. D. Power Geometry as a new calculus, Analysis and Applications - ISAAC 2001, Eds. H. G. W. Begehr, R. P. Gilbert and M. W. Wong, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/ London, 2003, pp. 51-71.

8. Брюно А. Д., Парусникова А. В. Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Доклады АН, 2011, т. 438, № 4, с. 439–443.

9. Брюно А. Д. Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Доклады АН, 2012, т. 443, № 5, с. 539–544.

10. Брюно А. Д. Элементы нелинейного анализа, Математический форум, серия “Итоги науки. Юг России”, ЮМИВНЦ, 2015, с. 13–33.

11. Шабат Б. В. Введение в теорию аналитических функций. Часть 1., М.: Наука, 1985, 336 с.

12. Брюно А. Д., Шадрина Т. В. Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды ММО, 2007, т. 68, с. 224–287.

13. Costin O. Asymptotics and Borel Summability, CRC Press. London, 2009.

14. Van der Hoeven J. Transseries and Real Differential Algebra // Lecture Notes in Mathematics. Springer. New York, 2006, vol. 1888.

15. Aschenbrenner M., Van den Dries L., Van der Hoeven J. Asymptotic Differential Algebra and Model Theory of Transseries, 2015. Available at: http: //arxiv.org/abs/1509.02588.

16. Edgar G. A. Transseries for beginners // Real Analysis Exchange, 2010, no. 35, pp. 253–310.

17. Горючкина И. В. Точное решение шестого уравнения Пенлеве и экзотическая асимптотика // Доклады АН, 2013, т. 450, № 4, с. 381-383.

18. Кудрявцев В. А. Общая формула для производной n-го порядка степени некоторой функции // Математическое Просвещение. М.-Л.: ОНТИ, Выпуск 1, 1934, с. 24-27.

19. Grigor'ev D.Yu., Singer M. F. Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents // Trans. Amer. Math. Soc., 1991, vol. 327, no. 1, pp. 329-351.

20. Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории, Москва-Ижевск: Институт компьютерных иследований, 2002.

21. Balser W. From divergent power series to analytic functions, Springer-Verlag, 1994.

22. Sibuya Y. Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation // Transl. Math. Monographs. A.M.S., 1990, vol. 82.

REFERENCES

1. Erdélyi, A., 1955, “Asymptotic expansions”, *Dover, New York*, 108 p.

2. Bruno, A. D., 2004, “Asymptotic behaviour and expansions of solutions of an ordinary differential equation”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 59, No. 3, pp. 31–80.

3. Bruno, A. D., Goryuchkina, I. V., 2010, “Asymptotic expansions of the solutions of the sixth Painlevé equation”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, pp. 1–104.

4. Bruno, A. D., Petrovich, V. Yu., 2004, “Singularities of solutions to the first Painleve equation” *Keldysh Institute preprints*, no. 75, 17 pp.

5. Bruno, A. D., Gridnev, A. V., 2003, “Power and exponential expansions of solutions to the third Painlevé equation”, *Keldysh Institute preprints*, No. 51, 19 pp.

6. Bruno, A. D., Gridnev, A. V., 2010, “Nonpower expansions of solutions to the third Painleve equation”, *Keldysh Institute preprints*, No. 10, 18 pp.

7. Bruno, A. D., 2003, “Power Geometry as a new calculus”, *Analysis and Applications - ISAAC 2001, Eds. H. G. W. Begehr, R. P. Gilbert and M. W. Wong, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/ Boston/ London*, pp. 51-71.

8. Bruno, A. D., Parusnikova, A. V., 2011, “Local expansions of solutions to the Fifth Painlevé equation”, *Doklady Math.*, vol. 438, no. 4, pp. 348-352.

9. Bruno, A. D., 2012, “Exponential expansions of solutions to an ordinary differential equation”, *Doklady Math.*, vol. 85, no. 2, pp. 259-264.

10. Bruno, A. D., 2015, “Elements of Nonlinear Analisys”, *Mathematical Forum, Ser. “Itogi nauki. Yug Rossii”. Yuzh. Math. Inst. Vladikavkaz Scien. Center*, pp. 13-33.

11. Shabat, B. V., 2002, “Introduction to complex analysis. Part 1”, *Moscow, Nauka,* in Russian.

12. Bryuno, A. D., Shadrina, T. V., 2007, “An axisymmetric boundary layer on a needle”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, pp. 201–259.

13. Costin, O., 2009, “Asymptotics and Borel Summability”, *CRC Press. London.*

14. Van der Hoeven, J., 2006, “Transseries and Real Differential Algebra”, *Lecture Notes in Mathematics. Springer. New York*, vol. 1888.

15. Aschenbrenner, M., Van den Dries, L., Van der Hoeven, J., 2015, “Asymptotic Differential Algebra and Model Theory of Transseries”, Available at: http://arxiv.org/abs/1509.02588.

16. Edgar, G. A., 2010, “Transseries for beginners”, *Real Analysis Exchange*, no. 35, pp. 253–310.

17. Goryuchkina, I. V., 2013, “Exact solution of the sixth Painlevé equation and exotic asymptotic expansion”, *Doklady Mathematics*, vol. 87, no. 3, pp. 314-317.

18. Kudryavtsev, V. A., 1934, “General formula for the n-th order derivative of some function”, *Matematicheskoye Prosveshenie. Moscow-Leningrad: ONTI*, in Russian.

19. Grigor’ev, D.Yu., Singer, M. F., 1991, “Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 327, no. 1, pp. 329-351.

20. Ramis, J.-P., 1993, “Séries divergentes et théories asymptotiques”, *Société mathématique de france*, vol. 121.

21. Balser, W., 1994, “From divergent power series to analytic functions”, *Springer-Verlag.*

22. Sibuya, Y., 1990, “Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation”, *Transl. Math. Monographs. A.M.S.*, vol. 82.

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук.
Получено 22.12.2015 г.
Принято в печать 10.06.2016 г.