

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 516.36

ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ ПАРУСНИКОВ

А. И. Аптекарев, А. Б. Батхин, А. Д. Брюно (г. Москва)

Аннотация

Владимир Игоревич Парусников скончался 22 августа 2015 года после тяжелой и продолжительной болезни. Он родился в Москве 21 января 1957 года. Владимир Игоревич окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, в 1982 году — аспирантуру и в 1983 году защитил кандидатскую диссертацию на мехмате МГУ. В Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша он работал с 1982 года младшим, а с 1996 — старшим научным сотрудником. Опубликовал более 45 научных работ по функциональным и числовым цепным дробям и их обобщениям.

В. И. Парусников был добрым, честным, ответственным человеком и талантливым математиком. Его кончина — это большая потеря для ИПМ им. М. В. Келдыша и для науки в целом. Похоронен на Хованском кладбище в Москве.

Здесь даётся обзор его математических работ. Сначала он изучал обобщённые функциональные цепные дроби и получил по ним сильные результаты. Последние двадцать лет он совместно с А. Д. Брюно искал многомерное обобщение цепной дроби, дающее как наилучшие диофантовы приближения, так и периоды в алгебраическом случае. Такое обобщение было найдено.

Первый раздел статьи подготовлен А. И. Аптекаревым, второй раздел — А. Д. Брюно, список научных работ В. И. Парусникова — А. Б. Батхиным.

Ключевые слова: рациональная аппроксимация, цепная дробь, многомерное обобщение цепной дроби.

Библиография: 71 название.

VLADIMIR IGOREVICH PARUSNIKOV

A. I. Aptekarev, A. B. Batkhin, A. D. Bruno (Moscow)

Abstract

Vladimir Igorevich Parusnikov died on August 22, 2015 after a long and serious illness. He was born in Moscow on January 21, 1957. Vladimir Igorevich graduated from the Department of Mechanics and Mathematics of the Lomonosov Moscow State University, finished his postgraduate studies in 1982 and he defended his thesis in 1983 in there. At the Keldysh Institute of Applied Mathematics he worked since 1982 as a junior researcher, and since 1996 — as a senior researcher. He has published more than 45 scientific papers on functional and numerical continued fractions and their generalizations.

V. I. Parusnikov was kind, honest, responsible man and a talented mathematician. His passing is a great loss for the KIAM and for science in general. He was buried at Khovanskoye cemetery in Moscow.

We provide a survey of his mathematical work. First, he studied the generalized functional continued fractions and got rather strong results. The last twenty years he, together with A. D. Bruno, was looking for a multi-dimensional generalization of the continued fraction giving the best Diophantine approximations and the periods in the algebraic case. Such a generalization was finally found.

The first Section of the paper was written by A. I. Aptekarev, the second Section was written by A. D. Bruno, the list of scientific publications of V. I. Parusnikov was prepared by A. B. Batkhin.

Keywords: rational approximation, continued fraction, multidimensional generalization of continued fraction.

Bibliography: 71 titles.



Владимир Игоревич Парусников
21.01.1957 — 22.08.2015

1. Первый цикл работ

Научным руководителем Владимира Парусникова на механико-математическом факультете МГУ был профессор Е. М. Никишин. В те годы Никишин заинтересовался задачами теории чисел и рациональных приближений аналитических функций. По его совету Владимир начал исследования векторных функциональных непрерывных дробей, в которые с помощью алгоритма Якоби-Перрона раскладывались наборы степенных рядов. Этот алгоритм получения рациональных приближений с общим знаменателем для набора чисел был предложен Якоби в [47, 48] и развит Перроном в [49], причём мотивированы они были проблемой характеристики иррациональностей порядка выше, чем квадратичные. Однако, для набора корней алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, вектор подходящих дробей приближал эти корни не наилучшим образом, поэтому интерес к числовым векторным дробям Якоби-Перрона постепенно угас (см. последнюю монографию по этой тематике [50]). В то же время появился устойчивый интерес к функциональным векторным непрерывным дробям, и, во многом, в этом заслуга принадлежит Владимиру Игоревичу. Надо сказать, что первые попытки перенести алгоритм Якоби-Перрона с наборов действительных чисел на наборы степенных рядов не выглядели обнадеживающими. М. де Брюен [51, 52] рассматривал применение этого алгоритма к набору степенных рядов с центром разложения в точке 0 и обнаружил, что для получающихся векторных функциональных дробей, вообще говоря, не справедливо обобщение критерия Кронекера, который утверждает, что одномерная функциональная непрерывная дробь обры-

вается тогда и только тогда, когда раскладываемая функция является рациональной. В своей первой работе [1] В. И. Парусников построил формальную теорию векторных непрерывных дробей для наборов степенных рядов с центром разложения в точке ∞ и, в частности, доказал аналог критерия Кронекера: остановка алгоритма Якоби-Перрона эквивалентна рациональной зависимости набора функций (степенных рядов), разлагаемых в векторную непрерывную дробь. Этот результат (составивший основу его кандидатской диссертации [2]) получил широкую известность.

Дальнейшие работы Владимира Игоревича по векторным непрерывным дробям Якоби-Перрона [3, 4, 5, 6, 7, 8] касались аналитического аспекта теории, т. е. были посвящены вопросам их асимптотического поведения и сходимости. Здесь надо выделить результаты о предельно периодических дробях, которые по сути представляют собой развитие глубоких теорем Пуанкаре и Перрона (см. [53, 54]) об асимптотике решений рекуррентных соотношений на случай полиномиальной зависимости коэффициентов рекуррентных соотношений от комплексного параметра z . Как и в случае независимых от параметра коэффициентов, асимптотикой решений управляют собственные значения матрицы трансляции решений рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами (т. е. с пределами коэффициентов). При наличии зависимости коэффициентов от z , речь идёт о ветвях алгебраической функции — корнях характеристического многочлена матрицы трансляции. Объединение точек $z \in \mathbb{C}$, в которых не существует максимальной по модулю ветви этой алгебраической функции, образует набор аналитических кривых, разбивающих комплексную плоскость на области, в которых, как доказал В. И. Парусников (см. [3, 8]), имеет место сходимость в смысле проективного пространства $\mathbb{CP}^m$. При этом, в компоненте разбиения, содержащей точку ∞ , имеет место обычная поточечная сходимость (за исключением конечного числа точек) подходящей непрерывной дроби, т. е. вектора рациональных функций с общим знаменателем, а в других компонентах сходимость в одной точке влечёт сходимость во всех точках этой компоненты. Ясный, достаточно просто формулируемый результат, описывающий поведение очень нетривиального объекта!

Техника функциональных векторных непрерывных дробей Якоби-Перрона, развитая В. И. Парусниковым, сразу нашла применение в теории рациональных аппроксимаций аналитических вектор-функций (в монографии [57] ей был посвящён специальный параграф). Этот интерес был обусловлен тем, что подходящие дроби этих непрерывных дробей являются диагональными рациональными аппроксимациями Эрмита-Паде для набора аналитических функций (степенных рядов), заданных в точке ∞ . Эти функциональные рациональные аппроксимации были введены Эрмитом при доказательстве трансцендентности числа e . Отметим, что функциональные непрерывные дроби Якоби-Перрона (в отличие от числовых векторных непрерывных дробей) не теряют своей актуальности в теории чисел, генерируя рациональные аппроксимации, явный вид которых используется в доказательствах иррациональности и трансцендентности математических констант. Периодические функциональные непрерывные дроби Якоби-Перрона породили широкий класс рациональных аппроксимаций Эрмита-Паде (см. [55]), в котором доступна проверка общих гипотез Наттолла [56] об асимптотике знаменателей этих аппроксимаций. То обстоятельство, что эти дроби являются естественным обобщением классических непрерывных J -дробей, обусловило их полезность при построении обобщения теории ортогональных многочленов (совместно ортогональных многочленов [58]) и спектральной теории несимметричных разностных операторов, задаваемых ленточными матрицами (обобщениями тридиагональных матриц Якоби), см. [59, 60, 61, 62].

По долгу своей работы в ИПМ им. М. В. Келдыша, Владимир Игоревич принимал участие в разработке численных методов для расчёта обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. В частности, в [9] совместно с Ю. Б. Радвогиным был предложен метод решения трёхмерной

стационарной задачи обтекания передней части заострённого тела с присоединённой ударной волной при наличии дозвукового течения за ударной волной. В предложенном методе искомое течение отыскивается установлением по времени решения системы уравнений газовой динамики, модифицированной путём замены оператора $\partial/\partial t$ на $z \partial/\partial t$. Численный алгоритм базируется на явно-неявной безусловно устойчивой разностной схеме по критическому направлению — от тела к ударной волне. Задачи подобного рода не являются экзотикой: при обтекании заострённых тел слабо сверхзвуковым потоком как раз с такими течениями и приходится иметь дело.

Другой прикладной задачей, решённой им в ИПМ им. М. В. Келдыша, было создание в [16] алгоритма вычисления эллиптических функций. Комбинируя этот алгоритм и алгоритм конформного отображения, удалось вычислить аэродинамические характеристики обтекания эллиптического профиля вблизи земли под разными углами атаки и численно исследовать асимптотики этих характеристик, когда расстояние до земли стремится к бесконечности.

2. Последние два цикла работ

Новый цикл работ В. И. Парусникова (совместно с А. Д. Брюно) по трёхмерному обобщению обычных (двумерных) цепных дробей был начат в 1994 г. препринтом [10] в ответ на статью Ж. Лашо [63] «Многогранники Арнольда ...», опубликованную в Докладах Парижской Академии Наук и представленную туда академиком В. И. Арнольдом. Ибо предложенный там геометрический подход, названный многогранниками Арнольда, повторял конструкцию Ф. Клейна [64], опубликованную в 1895 г. К этому циклу относятся также работы [11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 34]. В этих работах, опубликованных сначала в виде препринтов, а затем — статей, вычислялись многогранники Клейна для последовательности экстремальных кубических тернарных форм, являющихся произведением трёх тернарных линейных форм. Две первые из этих кубических форм нашел Давенпорт [65] в 1943 г., а 17 дальнейших — Свиннертон-Дайер [66] в 1971 г. Целью этих работ было изучение общих закономерностей многогранников Клейна и возможности существования на их основе алгоритма, обобщающего обычную цепную дробь. Начиная с работы [11] на базе многогранников Клейна сравнивалось качество различных матричных обобщений цепной дроби: Эйлера, Якоби, Пуанкаре, Бруна, Парусникова и двух алгоритмов Брюно. Оказалось, что ни один из этих алгоритмов не является периодическим во всех случаях. Кроме того, подходящие дроби многих из них не остаются на поверхности многогранника Клейна, а уходят вглубь него. Хуже всех оказался алгоритм Пуанкаре. А единственным всегда работающим оказался нематричный алгоритм Вороного [67]. На базе этих работ в 2000 г. было осознано, что многогранники Клейна не дают основы для построения алгоритма, обобщающего цепную дробь, и в препринте [27] обсуждались другие возможности обобщений, которые оказались неудачными. Хотя до сих пор многие последователи В. И. Арнольда продолжают изучать свойства многогранников Клейна, считая, что занимаются обобщением цепной дроби. На фоне этих неудач в обобщении числовой цепной дроби В. И. Парусников обратился к изучению сходимости некоторых обобщённых функциональных цепных дробей [28, 35].

В 2003 г. в препринте [68] А. Д. Брюно предложил модульный или модулярный многогранник, который как бы является выпуклой оболочкой четырех многогранников Клейна. Алгоритм, обобщающий цепную дробь, заключался в движении по поверхности этого многогранника. Вскоре в препринте [30] В. И. Парусников вычислил эти модульные многогранники для тех кубических экстремальных форм, для которых ранее вычислялись многогранники Клейна. Оказалось, что строение модульных многогранников существенно проще, чем многогранников Клейна. Этим препринтом начался новый цикл работ В. И. Парусникова (совместный с

А. Д. Брюно) по обобщениям цепной дроби [31, 32, 33, 36, 37, 41, 43], основанный на алгоритмах движения по поверхности модульного многогранника или многоугольника [69]. В 2015 г. А. Д. Брюно [70] предложил отказаться от пошагового вычисления границы модульного многоугольника, многогранника и их аналогов в любой размерности, а вычислять ее с помощью стандартных программ вычисления границ выпуклых оболочек, что завершило обобщение цепной дроби на любую размерность. Наконец, в [71] получено сильное продвижение в ряде областей теории чисел, основанное на этом многомерном обобщении цепной дроби.

Параллельно с описанным обобщением числовой цепной дроби В. И. Парусников изучал цепные дроби до ближайшего чётного [38, 39, 40, 42] и аналоги цепных дробей для неоднородных линейных форм, которые ему потребовались для построения пошаговых алгоритмов вычисления модульного многогранника в размерности 4 [44, 45, 46].

В целом работы В. И. Парусникова подтверждают мнение, что числовые цепные дроби (и их обобщения) устроены сложнее, чем функциональные.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ В. И. ПАРУСНИКОВА

1. Парусников В. И. Алгоритм Якоби-Перрона и совместное приближение функций // Математический сборник. 1981. Т. 114. № 2. С. 322–333.
2. Парусников В. И. Алгоритм Якоби-Перрона и совместное приближение функций // дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1983.
3. Парусников В. И. Предельно периодические многомерные непрерывные дроби // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 1983. № 62. 24 с.
4. Парусников В. И. Слабо совершенные системы функций и многомерные цепные дроби // Вестник МГУ, Сер. I, 1984, № 2. С. 13–17.
5. Парусников В. И. О скорости покоеффициентной сходимости совместных приближений, получаемых по алгоритму Якоби-Перрона // Сиб. Мат. Журнал, 1984, Т. 25, № 6(148). С. 128–135.
6. Parusnikov V. I. On the convergence of the multidimensional limit-periodic continued fractions // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 1985. № 1237. P. 217.
7. Парусников В. И. Алгоритм Якоби-Перрона и совместное приближение функций // Теория функций и приближений, Часть 3, СГУ, Саратов, 1986. С. 65–67.
8. Parusnikov V. I. On the convergence of the multidimensional limit-periodic continued fractions // Rational Approximation and Applications in Mathematics and Physics (Lancut, 1985), Lecture Notes in Math., Vol. 1237, Springer-Verlag, 1987. P. 145–160.
9. Парусников В. И., Радвогин Ю. Б. Расчет трехмерного стационарного обтекания передней части заостренного тела слабо сверхзвуковым потоком газа в режиме присоединенной ударной волны // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 1991. № 54. 28 с.
10. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 1994. № 48. 32 с.
11. Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 1994. № 52. 28 с.

12. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Математические заметки. 1994. Т. 56. № 4. С. 9–27.
13. Bruno A. D., Parusnikov V. I. Klein's polyhedra and multidimensional generalizations of continued fractions // ICM94, Abstracts, Short Communications, Zurich, 1994, p. 37.
14. Парусников В. И. Многогранники Клейна для третьей экстремальной тернарной кубической формы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1995. № 137. 29 с.
15. Парусников В. И. Многогранники Клейна для третьей экстремальной тернарной кубической формы // Труды Международной чебышевской конференции, М., МГУ, 1996, с. 283–286.
16. Волевич Л. Р., Казанджан Э. П., Парусников В. И. Численная реализация точного решения задачи обтекания двусвязной области несжимаемой жидкостью // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1996. № 24. 21 с.
17. Брюно А. Д., Арансон А. Б., Варин В. П., Васильев М. М., Кондратьева М. Ф., Крутицкий П. А., Парусников В. И., Петрович В. Ю., Пустыльников Л. Д., Садов С. Ю. Локальный нелинейный анализ и его приложения // 1996, Отчет о НИР № 96-01-01411 (РФФИ).
18. Калягин В. А., Аптекарев А. И., Парусников В. И., Сорокин В. Н., Туляков Д. Н. Метод Эрмита-Паде в исследовании аналитических свойств резольвентных функций несимметричных операторов // 1996, отчет о НИР № 96-01-00730 (РФФИ).
19. Парусников В. И. Многогранники Клейна с большими гранями // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 1997. № 93. 21 с.
20. Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Математические заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 339–348.
21. Парусников В. И., Брюно А. Д., Пустыльников Л. Д. Многомерные обобщения цепных дробей и их приложения // Отчет о НИР № 97-01-00268 (РФФИ).
22. Парусников В. И. Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 36. 30 с.
23. Парусников В. И. Многогранники Клейна для пятой экстремальной кубической формы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 69. 20 с.
24. Parusnikov V. I. Klein polyhedra for complete decomposable forms // Number theory. Diophantine, Computational and Algebraic Aspects. Editors: K. Györy, A. Pethő and V. T. Sós. De Gruyter. Berlin, New York. 1998. P. 453–463.
25. Парусников В. И. Многогранники Клейна для шестой экстремальной кубической формы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999. № 69. 31 с.
26. Парусников В. И. Многогранники Клейна для седьмой экстремальной кубической формы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999. № 79. 32 с.
27. Парусников В. И. Новые обобщенные цепные дроби для кратных векторов экстремальных форм // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2000. № 66. 20 с.
28. Парусников В. И. Обобщение теоремы Пинкерле для k -членных рекуррентных соотношений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2000. № 83. 23 с.

29. Парусников В. И. Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы // Математические заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 110–128.
30. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники модулей троек линейных форм // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. № 93. 20 с.
31. Parusnikov V. I. Comparison of several generalizations of the continued fraction // Чебышевский сборник (Тула). 2004. Т. 5. № 4(16). С. 180–188.
32. Брюно А. Д., Парусников В. И. Дальнейшее обобщение цепной дроби // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. № 40. 24 с.
33. Брюно А. Д., Парусников В. И. New generalizations of the continued fraction // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2005. № 52. 20 с. URL:http://keldysh.ru/papers/2005/prep52/prep2005_52.pdf
34. Парусников В. И. Многогранники Клейна для трех экстремальных кубических форм // Математические заметки. 2005. Т. 77. № 4. С. 566–583.
35. Парусников В. И. Обобщение теоремы Пинкерле для k -членных рекуррентных соотношений // Математические заметки. 2005. Т. 78. № 6. С. 892–906.
36. Брюно А. Д., Парусников В. И. Дальнейшее обобщение цепной дроби // Доклады Академии наук. 2006. Т. 410. № 1. С. 12–16.
37. Брюно А. Д., Парусников В. И. Двустороннее обобщение цепной дроби // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 58. 25 с. URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-58>
38. Парусников В. И. Цепные дроби до ближайшего четного // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 87. 27 с. URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-87>
39. Парусников В. И. Цепные дроби до ближайшего четного. Короткий вариант // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 88. 12 с.
URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-88>
40. Парусников В. И. Цепная дробь до ближайшего четного // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429. № 5. С. 590–594.
41. Брюно А. Д., Парусников В. И. Двустороннее обобщение цепной дроби // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429. № 6. С. 727–730.
42. Парусников В. И. Ряды Фарея и цепные дроби до ближайшего четного // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 85. 12 с. URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-85>
43. Парусников В. И. Четырехмерное обобщение цепных дробей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2011. № 78. 16 с. URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-78>
44. Парусников В. И. О статистике дробных долей чисел $j\alpha$ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 5. 16 с. URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-5>
45. Парусников В. И. Цепная дробь неоднородной линейной формы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 58. 15 с. URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-58>
46. Парусников В. И. Цепная дробь неоднородной линейной формы $\alpha X + Y - \beta$ // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского (Казань). 2013. Т. 46. № 11. С. 358–360.

V. I. PARUSNIKOV BIBLIOGRAPHY

1. Parusnikov, V. A. 1981, "The Jacobi–Perron algorithm and simultaneous approximation of functions" // *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1982, vol. 42, no 2, pp. 287–296.
2. Parusnikov, V. A. 1981, "The Jacobi–Perron algorithm and simultaneous approximation of functions" //
3. Parusnikov, V. A. 1983, "Limit periodic multidimensional continued fractions" // *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
4. Parusnikov, V. A. 1984, "Weakly perfect systems of functions and multidimensional continued fractions" // *Vestn. Mosk. Univ. Seriya 1 Mat. Mekhanika*, no. 2, pp. 13–17.
5. Parusnikov, V. A. 1984, "Coefficientwise convergence rate of joint approximations obtained by Jacobi–Perron algorithm" // *Sib. Math. Journ.*, vol. 25, no. 6(148), pp. 128–135.
6. Parusnikov, V. I. 1985, "On the convergence of the multidimensional limit-periodic continued fractions" // *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, no. 1237. P. 217.
7. Parusnikov, V. I. 1986, "The Jacobi–Perron algorithm and simultaneous approximation of functions" // *Theory of functions and approximations*, Part 3, SGU, Saratov, pp. 65–67.
8. Parusnikov, V. I. 1987, "On the convergence of the multidimensional limit-periodic continued fractions" // *Rational Approximation and Applications in Mathematics and Physics (Lancut, 1985)*, Lecture Notes in Math., vol. 1237, Springer-Verlag, pp. 145–160.
9. Parusnikov, V. I. & Radvogin, Yu. B. 1991, "Computation of the three-dimensional stationary flow over the front of the body pointed weakly supersonic gas flow mode attached shock" // *Preprint no. 54 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
10. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 1994, "Klein’s polyhedra for the two cubic forms of Davenport" // *Preprint no. 48 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
11. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 1994, "Comparison of different generalizations of continued fractions" // *Preprint no. 52 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
12. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 1994, "Klein polyhedra for two cubic Davenport forms" // *Math. Notes*, vol. 56, no. 3-4, pp. 994–1007.
13. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 1994, "Klein’s polyhedra and multidimensional generalizations of continued fractions" // *ICM94, Abstracts, Short Communications*, Zurich, p. 37.
14. Parusnikov, V. I. 1995, "Klein’s polyhedra for the third extremal ternary cubic form" // *Preprint no. 137 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
15. Parusnikov, V. I. 1996, "Klein’s polyhedra for the third extremal ternary cubic form" // *Proceedings of the Chebyshev International Conference*, MSU, Moscow, pp. 283–286.
16. Volevich, L. R. & Kazandzhan, E. P. & Parusnikov, V. I. 1996, "Numerical implementation of the exact solution of flow past doubly connected region of an incompressible fluid" // *Preprint no. 24 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
17. Bruno, A. D. & Aranson, A. B. & Varin, V. P. & Vasiliev, M. M. & Kondrat’eva, M. F. & Krutitsky, P. A. & Parusnikov, V. I. & Petrovich, V. Yu. & Pustyl’nikov, L. D. & Sadov, S. Yu. 1996, "Local nonlinear analysis and its applications" // *Report on Scientific Research Work*, № 96-01-01411 (RFBR).

18. Kalyagin, V. A. & Aptekarev, A.I & Parusnikov, V.I. & Sorokin, V.N. & Tulyakov, D.N. 1996, "Hermite-Pade method in investigation of analytic properties of resolvent functions of non-symmetric operators" // *Report on Scientific Research Work*, № 96-01-00730 (RFBR).
19. Parusnikov, V. I. 1997, "Klein's polyhedra with big faces" // *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
20. Bruno, A. D. & Parusnikov, V.I. 1997, "Comparison of different generalizations of continued fractions" // *Mathem. Notes*, vol. 61, no. 3, pp. 278–286.
21. Parusnikov, V. I. & Bruno, A.D. & Pustyl'nikov, L.D. "Multidimensional generalizations of continued fractions and their applications" // *Report on Scientific Research Work*, no. 97-01-00268 (RFBR).
22. Parusnikov, V. I. 1998, "Klein's polyhedra for the fourth extremal cubic form" // *Preprint no. 36 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
23. Parusnikov, V. I. 1998, "Klein's polyhedra for the fifth extremal cubic form" // *Preprint no. 69 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
24. Parusnikov, V.I. 1998, "Klein polyhedra for complete decomposable forms" // *Number theory. Diophantine, Computational and Algebraic Aspects*, editors: K. Györy, A. Pethő and V. T. Sós, De Gruyter, Berlin, New York, pp. 453–463.
25. Parusnikov, V. I. 1999, "Klein's polyhedra for the sixth extremal cubic form" // *Preprint no. 69 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
26. Parusnikov, V. I. 1999, "Klein's polyhedra for the seventh extremal cubic form" // *Preprint no. 79 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
27. Parusnikov, V. I. 2000, "New generalized continued fractions for the multiple vectors of extremal forms" // *Preprint no. 60 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
28. Parusnikov, V. I. 2000, "A Generalization of Pincherle's Theorem to k -Term Recursion Relations" // *Preprint no. 83 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
29. Parusnikov, V. I. 2000, "Klein's polyhedra for the fourth extremal cubic form" // *Mathematical Notes*, vol. 67, no. 1, pp. 87–102.
30. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 2003, "Polyhedra of absolute values for triple of linear forms" // *Preprint no. 93 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
31. Parusnikov, V. I. 2004, "Comparison of several generalizations of the continued fraction" // *Chebyshevsky sbornik (Tula)*, vol. 5, no. 4(16), pp. 180–188.
32. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 2005, "Further generalization of the continued fraction" // *Preprint no. 40 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
33. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 2005, "New generalizations of the continued fraction" // *Preprint no. 52 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
34. Parusnikov, V. I. 2005, "Klein polyhedra for three extremal cubic forms" // *Mathematical Notes*, vol. 77, no. 4, pp. 523–538.
35. Parusnikov, V. I. 2005, "A Generalization of Pincherle's Theorem to k -Term Recursion Relations" // *Mathematical Notes*, vol. 78, no. 6, pp. 827–840.

36. Bruno, A. D. & Parusnikov, V.I. 2005, "Further generalization of the continued fraction" // *Doklady Mathematics*, vol. 74, no. 2, pp. 628–632.
37. Bruno, A. D. & Parusnikov, V.I. 2009, "Two-way generalization of the continued fraction", // *Preprint no. 58 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
38. Parusnikov, V. I. 2009, "Continued fractions by the nearest even number" // *Preprint no. 87 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
39. Parusnikov, V. I. 2009, "Continued fractions by the nearest even number. The short type" // *Preprint no. 88 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
40. Parusnikov, V. I. 2009, "Continued fractions by the nearest even number" // *Doklady Mathematics*, vol. 80, no. 3, pp. 867–871.
41. Bruno, A. D. & Parusnikov, V. I. 2009, "Two-way generalization of the continued fraction" // *Doklady Mathematics*, vol. 80, no. 3, pp. 887–890.
42. Parusnikov, V. I. 2010, "Farey series and continued fractions to the nearest even number" // *Preprint no. 85 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
43. Parusnikov, V. I. 2011, "4-dimensional generalization of the continued fractions" // *Preprint no. 78 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
44. Parusnikov, V. I. 2013, "About statistics of fractional parts of numbers $j\alpha$ " // *Preprint no. 5 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
45. Parusnikov, V. I. 2013, "A continued fraction of a inhomogeneous linear form" // *Preprint no. 58 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
46. Parusnikov, V. I. 2013, "A continued fraction of a inhomogeneous linear form $\alpha X + Y - \beta$ " // *Works of Lobachevsky Mathematical Center (Kazan)*, vol. 46, no. 11, pp. 358–360.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

47. Jacobi C. G. J. Ueber die Auflösung der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = f_n$ // *J. Reine Angew. Math.* 69 (1868), 1–28.
48. Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorgegebenden gebildet wird // *J. Reine Angew. Math.* 69 (1868), 29–64.
49. Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // *Math. Ann.* 64 (1907), No. 1, 1–76.
50. Bernstein L. The Jacobi–Perron algorithm. Its theory and application // *Lecture notes in Mathematics*, 207, Springer–Verlag, 1971.
51. de Bruin M. G. Convergence of generalized C -fractions // *J. Approx. Theory* 24 (1978), No. 3, 177–207.
52. de Bruin M. G. The interruption phenomenon for generalized continued fractions // *Bull. Austral. Math. Soc.* 19 (1978), No. 2, 245–272.
53. Poincaré H. Sur les equations linéaires aux différentielles et aux différences finies // *Amer. J. Math.*, 1885, Vol. 7, No. 3, P. 203–258.

54. Perron O. Über einen Satz des Herrn Poincaré // J. Reine Angew. Math., 1909, Vol. 136, P. 17–37.
55. Aptekarev A. I., Kalyagin V. A. Analytic properties of two-dimensional continued P -fraction expansions with periodic coefficients and their simultaneous Pade-Hermite approximants // Lecture Notes in Math., Vol. 1237, Springer-Verlag, 1987, P. 145–160.
56. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J. Approx. Theory, 1984, Vol. 42, No. 4, 299–386.
57. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. Наука, 1988.
58. Калягин В. А. Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов // Матем. сб. 1994. Т. 185, вып. 6. С. 79–100.
59. Aptekarev A. I. Multiple Orthogonal Polynomials // J. Comput. Appl. Math. 1998. Vol. 99, No. 1–2. P. 423–447.
60. Aptekarev A. I., Kaliaguine V. A., Van Iseghem J. The Genetic Sums’ Representation for the Moments of a System of Stieltjes Functions and its Application // Constr. Approx. 2000. Vol. 16. P. 487–524.
61. Aptekarev A. I., Kaliaguine V. A., Saff E. B. Higher-Order Three-Term Recurrences and Asymptotics of Multiple Orthogonal Polynomials // Constr. Approx. 2009. Vol. 30. P. 175–223.
62. Aptekarev A. I. Spectral Problems of High-Order Recurrences // Amer. Math. Soc. Transl. 2014. Vol. 233. P. 43–61.
63. Lachaud G. Polyèdre d’Arnol’d et voile d’un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange // C.R. Acad. Sci. Ser. 1. 1993. V. 317. P. 711–716.
64. Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1895. № 3. P. 357–359
65. Davenport H. On the product of three homogeneous linear form. IV // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1943. Vol. 39. P. 1–21.
66. Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous linear forms // Acta Arithmetica. 1971. Vol. 18. P. 371–385.
67. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.
68. Брюно А. Д. Правильное обобщение цепной дроби // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 86. 2003. 17 с.
69. Брюно А. Д. Обобщения цепной дроби // Чебышевский сборник (Тула). 2006. Т. 7, № 3. С. 4–71.
70. Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16, № 2, С. 35–65.
71. Брюно А. Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 1. 20 с.

REFERENCES

47. Jacobi, C. G. J. 1868, “Ueber die Auflöſung der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = f_n$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 69, pp. 1–28.
48. Jacobi, C. G. J. 1868, “Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorgegebenden gebildet wird”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 69, pp. 29–64.
49. Perron, O. 1907, “Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus”, *Math. Ann.*, vol. 64, no. 1, pp. 1–76.
50. Bernstein, L 1971, *The Jacobi–Perron algorithm. Its theory and application*, Lecture notes in Mathematics, 207, Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
51. Bruin, M. G. de 1978, Convergence of generalized C -fractions // *J. Approx. Theory*, vol. 24, no. 3, pp. 177–207.
52. Bruin, M. G. de 1978, The interruption phenomenon for generalized continued fractions // *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 19, no. 2, pp. 245–272.
53. Poincaré, H. 1885 “Sur les equations linéaires aux différentielles et aux différences finies // *Amer. J. Math.*, vol. 7, pp. 203–258.
54. Perron, O. 1909, “Über einen Satz des Herrn Poincare” // *J. Reine Angew. Math.*, vol. 136, pp. 17–37.
55. Aptekarev, A. I. & Kalyagin, V. A. 1987, “Analytic properties of two-dimensional continued P -fraction expansions with periodic coefficients and their simultaneous Pade-Hermite approximants” // *Lecture Notes in Math.*, vol. 1237, Springer-Verlag, pp. 145–160.
56. Nuttall, J. 1984, “Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials” // *J. Approx. Theory*, vol. 42, no. 4, pp. 299–386.
57. Nikishin, EM & Sorokin, VN 1988, *Rational Approximations and Orthogonality*, Nauka, Moscow.
58. Kalyagin, V. A. 1994, “Hermite-Padé approximants and spectral analysis of nonsymmetric operators” // *Mat. Sb.*, vol. 185, no. 6, pp. 79–100.
59. Aptekarev, A. I. 1998, “Multiple Orthogonal Polynomials” // *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 99, no. 1–2, pp. 423–447
60. Aptekarev, A. I. & Kaliaguine, V. A. & Iseghem, J. van 2000 “The Genetic Sums’ Representation for the Moments of a System of Stieltjes Functions and its Application” // *Constr. Approx.*, vol. 16, pp. 487–524.
61. Aptekarev, A. I. & Kaliaguine, V. A. & Saff, E. B. 2009 “Higher-Order Three-Term Recurrences and Asymptotics of Multiple Orthogonal Polynomials” // *Constr. Approx.*, vol. 30, pp. 175–223.
62. Aptekarev, A. I. 2014, “Spectral Problems of High-Order Recurrences” // *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 233, pp. 43–61.
63. Lachaud, G. 1993, “Polyèdre d’Arnol’d et voile d’un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange” // *C.R. Acad. Sci.*, Ser. 1. vol. 317. pp. 711–716.

- 64. Klein, F. 1895, “Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung” // *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, no. 3. pp. 357–359
- 65. Davenport, H. 1943, “On the product of three homogeneous linear form. IV” // *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 39. pp. 1–21.
- 66. Swinnerton-Dyer, H. P. F. 1971, “On the product of three homogeneous linear forms” // *Acta Arithmetica*, vol. 18. pp. 371–385.
- 67. Voronoi, GF 1896, *On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction*, Warsaw University.
- 68. Bruno, A.D. 2003, “The correct generalization of the continued fraction”, *Preprint no. 86 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.
- 69. Bruno, A.D. 2006, “Generalizations of continued fraction”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 7, no. 3, pp. 4–71.
- 70. Bruno, A.D. 2015, “Universal generalization of the continued fraction algorithm”, *Chebyshevsky sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 35–65.
- 71. Bruno, A.D. 2016, “From Diophantine approximations to Diophantine equations”, *Preprint no. 1 of the Keldysh Inst. of Applied Math.*, Moscow.

Институт Прикладной Математики им. М. В. Келдыша РАН.

Получено 15.12.2015

Принято в печать 10.03.2016