

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17 Выпуск 2

УДК 517

О КВАДРАТАХ В СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ
КОНЕЧНОГО ПОЛЯ¹

М. Р. Габдуллин (г. Москва)

Аннотация

В теории чисел имеется обширная тематика, связанная с изучением арифметических свойств чисел с „пропущенными цифрами“ (т.е. тех чисел, цифры которых в фиксированной системе счисления принадлежат заданному множеству). В настоящей работе изучается аналог таких задач в конечных полях.

Рассмотрим линейное пространство, образованное элементами конечного поля $\mathbb{F}_q$, где $q = p^r$, над $\mathbb{F}_p$. Пусть $\{a_1, \dots, a_r\}$ — базис этого пространства. Тогда каждый элемент $x \in \mathbb{F}_q$ имеет единственное представление в виде $\sum_{j=1}^r c_j a_j$, где $c_j \in \mathbb{F}_p$; коэффициенты c_j можно назвать „цифрами“. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{F}_p$. Рассмотрим множество $W_{\mathcal{D}}$ тех элементов $x \in \mathbb{F}_q$, для которых $c_j \in \mathcal{D}$ при всех $1 \leq j \leq r$. При этом элементы $\mathcal{D} \setminus \mathbb{F}_p$ можно назвать „пропущенными цифрами“. В недавней работе C.Dartyge, C.Mauduit, A.Sárközy было показано, что если множество $\mathcal{D}$ достаточно велико, то во множестве $W_{\mathcal{D}}$ имеются квадраты. В данной работе исследуется более общая задача. Зафиксируем множества $D_1, \dots, D_r \subset \mathbb{F}_p$ и пусть $W = W(D_1, \dots, D_r)$ — множество тех элементов $x \in \mathbb{F}_q$, для которых $c_j \in D_j$ при всех $1 \leq j \leq r$. Доказана оценка на количество квадратов во множестве W , из которой вытекают следующие два утверждения:

1) если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $\prod_{i=1}^r |D_i| \geq (2r-1)^r p^{r(1/2+\varepsilon)}$, то справедлива асимптотическая оценка $|W \cap Q| = |W| \left(\frac{1}{2} + O(p^{-\varepsilon/2}) \right)$;

2) при $\prod_{i=1}^r |D_i| \geq 8(2r-1)^r p^{r/2}$ во множестве W имеются ненулевые квадраты.

Ключевые слова: конечные поля, квадраты, суммы характеров.

Библиография: 18 названий.

ON SQUARES IN SPECIAL SETS OF FINITE FIELDS²

M. Gabdullin (Moscow)

Abstract

A large part of number theory deals with arithmetic properties of numbers with “missing digits” (that is numbers which digits in a number system with a fixed base belong to a given set). The present paper explores the analog of such a similar problem in the finite field.

We consider the linear vector space formed by the elements of the finite field $\mathbb{F}_q$ with $q = p^r$ over $\mathbb{F}_p$. Let $\{a_1, \dots, a_r\}$ be a basis of this space. Then every element $x \in \mathbb{F}_q$ has a unique representation in the form $\sum_{j=1}^r c_j a_j$ with $c_j \in \mathbb{F}_p$; the coefficients c_j may be called “digits”. Let us fix the set $\mathcal{D} \subset \mathbb{F}_p$ and let $W_{\mathcal{D}}$ be the set of all elements $x \in \mathbb{F}_q$ such that all its digits belong to the set $\mathcal{D}$. In this connection the elements of $\mathbb{F}_p \setminus \mathcal{D}$ may be called “missing digits”. In a recent paper of C.Dartyge, C.Mauduit, A.Sárközy it has been shown that if the set $\mathcal{D}$ is quite large then there are squares in the set $W_{\mathcal{D}}$. In this paper more common problem is considered.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

²The work is supported by the grant from the Russian Science Foundation (Project 14-11-00702).

Let us fix subsets $D_1, \dots, D_r \subset \mathbb{F}_p$ and consider the set $W = W(D_1, \dots, D_r)$ of all elements $x \in \mathbb{F}_q$ such that $c_j \in D_j$ for all $1 \leq j \leq r$. We prove an estimate for the number of squares in the set W , which implies the following assertions:

- 1) if $\prod_{i=1}^r |D_i| \geq (2r-1)^r p^{r(1/2+\varepsilon)}$ for some $\varepsilon > 0$, then the asymptotic formula $|W \cap Q| = |W| \left(\frac{1}{2} + O(p^{-\varepsilon/2}) \right)$ is valid;
- 2) if $\prod_{i=1}^r |D_i| \geq 8(2r-1)^r p^{r/2}$, then there exist nonzero squares in the set W .

Keywords: finite fields, squares, character sums.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

При любом фиксированном $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, каждое число $n \in \mathbb{N}$ единственным образом представимо в системе счисления с основанием b :

$$n = \sum_{j=0}^{r-1} c_j b^j, \quad 0 \leq c_j \leq b-1, \quad c_{r-1} \geq 1.$$

Во многих работах (см., например, [1]–[12]) изучались арифметические свойства чисел с „пропущенными цифрами“, т.е. тех чисел, b -ичная запись которых состоит из заданных цифр.

В [13] С. Dartyge и А. Sárközy рассмотрели аналог этой задачи в конечных полях. Пусть p — простое число, $\mathbb{F}_q$ — поле из $q = p^r$ элементов, $r \geq 2$, $\{a_1, \dots, a_r\}$ — базис $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{F}_p$. Положим

$$W_{\mathcal{D}} = \{x_1 a_1 + \dots + x_r a_r \mid x_i \in \mathcal{D}\}.$$

Обозначим через Q множество ненулевых квадратов поля F_q . Положим $Q_0 = Q \cup \{0\}$. Будем считать, что $p \geq 3$, так как в случае $p = 2$ мы имеем $\mathbb{F}_q = Q_0$.

В недавней работе С. Dartyge, С. Mauduit, А. Sárközy [14] было показано, что если множество $\mathcal{D}$ достаточно велико, то во множестве $W_{\mathcal{D}}$ имеются квадраты.

ТЕОРЕМА А. Пусть $2 \leq |\mathcal{D}| \leq p-1$. Тогда

$$\left| |W_{\mathcal{D}} \cap Q_0| - \frac{|W_{\mathcal{D}}|}{2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{q}} \left(|\mathcal{D}| + p\sqrt{p-|\mathcal{D}|} \right)^r.$$

Эта оценка нетривиальна, если $|\mathcal{D}| \geq \frac{(\sqrt{5}-1)p}{2}(1+o_p(1))$.

В работе [15] автором были доказаны следующие два утверждения, ослабляющие условие на мощность множества $\mathcal{D}$, гарантирующее наличие квадратов во множестве $W_{\mathcal{D}}$.

ТЕОРЕМА В. Пусть $2r-1 \leq p^{1/2}$, $\delta = (\sqrt{p}(2r-1))^{2-r}$. Тогда при $|\mathcal{D}| \geq (1+\delta)(2r-1)p^{1/2}$ справедливо $|W_{\mathcal{D}} \cap Q| \geq 1$.

ТЕОРЕМА С. Пусть $r \geq 20$, $C(r) = \exp\left(\frac{4\log r + 8}{r}\right) = 1 + o(1)$, $r \rightarrow \infty$. Тогда при $|\mathcal{D}| \geq C(r)p^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\log p + 4\log \log p}{r}\right)$ справедливо $|W_{\mathcal{D}} \cap Q| \geq 1$.

В частности, из теоремы С следует, что при большом r во множестве $W_{\mathcal{D}}$ есть квадраты уже при $|\mathcal{D}| > p^{1/2}$. Отметим, что при $r \gg \frac{\log p}{\log \log p}$, более точный результат дает теорема С, а иначе — теорема В.

В работе R. Dietmann, С. Elsholtz, I. E. Shaprlinski [16], была рассмотрена более общая задача. Пусть $D_1, \dots, D_r$ — подмножества $\mathbb{F}_p$. Положим

$$W = W(D_1, \dots, D_r) = \{x_1 a_1 + \dots + x_r a_r \mid x_i \in D_i\}.$$

Авторы работы [16] отмечают, что доказательство теоремы А [14] переносится на случай, когда множества D_i различны, а именно, при $\min_{1 \leq i \leq r} |D_i| \geq \frac{(\sqrt{5}-1)p}{2}(1+o_p(1))$ справедливо $|W \cap Q_0| \geq 1$, и доказывают более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА D ([16], теорема 3.5). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых множеств $D_1, \dots, D_r$, удовлетворяющих условиям*

$$\prod_{i=1}^r |D_i| \geq p^{(1/2+\varepsilon)r^2/(r-1)}$$

и

$$\min_{1 \leq i \leq r} |D_i| \geq p^\varepsilon$$

справедливо $|W \cap Q_0| = (\frac{1}{2} + O(p^{-\delta})) |W|$.

По аналогии с работой [16], теорема В также может быть перенесена на случай различных множеств D_i . В настоящей работе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Справедлива оценка*

$$\left| |W \cap Q| - \frac{|W|}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|W|^{1-1/(2r)} p^{1/4} (2r-1)^{1/2} + |W|^{1/(2r)} \left(\frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} \right) + 1 \right). \quad (1)$$

Из этой теоремы вытекает аналог теоремы D, а также теорема о достаточных условиях существования квадратов во множестве W .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\prod_{i=1}^r |D_i| \geq (2r-1)^r p^{r(1/2+\varepsilon)}.$$

Тогда $|W \cap Q| = |W| (\frac{1}{2} + O(p^{-\varepsilon/2}))$, причем постоянная в знаке O абсолютна.

Отметим, что следствие 1 усиливает теорему D при фиксированном r (так как в нём отсутствует требование $\min_{1 \leq i \leq r} |D_i| \geq p^\varepsilon$).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\prod_{i=1}^r |D_i| \geq 8(2r-1)^r p^{r/2}$. Тогда $|W \cap Q| \geq 1$.*

Доказательство теоремы будет изложено в разделе 2; оно основывается на оценке сумм характеров специального вида, полученной D. Wan в [17] и сформулированной в удобном для нас виде A. Winterhof в [18].

ЛЕММА. *Пусть χ — мультипликативный характер порядка s в $\mathbb{F}_q$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ — несопряжённые порождающие элементы $\mathbb{F}_q$ над $\mathbb{F}_p$. Тогда*

$$\left| \sum_{\xi \in \mathbb{F}_p} \chi((\xi + \alpha)(\xi + \beta)^{s-1}) \right| \leq (2r-1)p^{1/2}.$$

Следствия 1 и 2 будут доказаны в разделе 3.

Автор признателен С. В. Конягину и рецензенту за полезные обсуждения результатов.

2. Доказательство теоремы

Через χ обозначим квадратичный характер поля $\mathbb{F}_q$; считаем, что $\chi(0) = 0$. Пусть 0 не принадлежит некоторому D_i . Тогда

$$|W \cap Q| = \frac{1}{2} \sum_{x \in W} (1 + \chi(x)) = \frac{1}{2}|W| + \frac{1}{2} \sum_{x \in W} \chi(x) = \frac{1}{2}|W| + \frac{1}{2} \sum_{x \in W} \chi(x).$$

Если же $0 \in D_i$ при всех i , то

$$|W \cap Q| = \frac{1}{2} \sum_{x \in W \setminus \{0\}} (1 + \chi(x)) = \frac{1}{2}(|W| - 1) + \frac{1}{2} \sum_{x \in W} \chi(x).$$

Таким образом, всегда справедливо неравенство

$$\left| |W \cap Q| - \frac{|W|}{2} \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left| \sum_{x \in W} \chi(x) \right|, \quad (2)$$

и для доказательства теоремы нужно оценить сумму характеров $\left| \sum_{x \in W} \chi(x) \right|$. Положим $D = D_2 \times \dots \times D_r$ и $b_j = a_j/a_1$. Тогда $b_1 = 1$ и $\{1, b_2, \dots, b_r\}$ — базис. Имеем

$$\left| \sum_{x \in W} \chi(x) \right| \leq \sum_{c_1 \in D_1} \left| \sum_{c_j \in D_j, j \geq 2} \chi(c_1 a_1 + \dots + c_r a_r) \right| \leq |D_1|^{1/2} A^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$A = \sum_{c_1 \in D_1} \left| \sum_{(c_2, \dots, c_r) \in D} \chi(c_1 + c_2 b_2 + \dots + c_r b_r) \right|^2.$$

Пусть L_d — множество тех наборов $(c_2, \dots, c_r) \in D$, для которых элемент $c_2 b_2 + \dots + c_r b_r$ лежит в подполе порядка p^d и не лежит ни в каком подполе меньшего порядка. Ясно, что $D = \bigsqcup_{d|r} L_d$,

причем $L_1 = \{0\}$, если $0 \in D_i$ при всех $2 \leq i \leq r$, и $L_1 = \emptyset$ иначе. Для $d|r$ определим функцию $f_d(x): D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f_d(c) = \sum_{(c_2, \dots, c_r) \in L_d} \chi(c + c_2 b_2 + \dots + c_r b_r)$. Напомним, что l_2 -норма функции

$g: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ определяется как $\|g\|_2 = \left(\sum_{x \in D_1} |g(x)|^2 \right)^{1/2}$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$A^{1/2} = \left\| \sum_{d|r} f_d \right\|_2 \leq \sum_{d|r} \|f_d\|_2 = \sum_{d|r} A_d^{1/2}, \quad (4)$$

где

$$A_d = \sum_{x \in D_1} \left| \sum_{(c_2, \dots, c_r) \in L_d} \chi(x + c_2 b_2 + \dots + c_r b_r) \right|^2.$$

По определению множества L_d при любом наборе $(c_2, \dots, c_r) \in L_d$ элемент $c_2 b_2 + \dots + c_r b_r$ порождает подполе порядка p^d . Учитывая, что каждый такой элемент имеет не более d сопряженных, и применяя лемму к парам несопряженных элементов, при $d > 1$ имеем

$$\begin{aligned} A_d &\leq \sum_{(c_2, \dots, c_r), (c'_2, \dots, c'_r) \in L_d} \left| \sum_{x \in F_p} \chi(x + c_2 b_2 + \dots + c_r b_r) \overline{\chi}(x + c'_2 b_2 + \dots + c'_r b_r) \right| \leq \\ &\leq \sum_{(c_2, \dots, c_r) \in L_d} \left(dp + (|L_d| - d)(2d - 1)p^{1/2} \right) \leq (2d - 1)p^{1/2}|L_d|^2 + dp|L_d|. \end{aligned}$$

Кроме того, $A_1 \leq |D_1| \leq p$. Обозначим $\mathcal{J} = \{d|r : d > 1 \text{ и } L_d \neq \emptyset\}$. Тогда при $d \in \mathcal{J}$ в силу неравенства $\sqrt{A+B} \leq \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{2A}\right)$, верного при всех положительных A и B , получаем

$$A_d^{1/2} \leq (2d-1)^{1/2} p^{1/4} |L_d| + \frac{dp^{3/4}}{2(2d-1)^{1/2}}.$$

Из этой оценки и неравенства (4) имеем

$$A^{1/2} \leq p^{1/4} S_1 + \frac{1}{2} p^{3/4} S_2 + p^{1/2},$$

где

$$S_1 = \sum_{d \in \mathcal{J}} (2d-1)^{1/2} |L_d|, \quad S_2 = \sum_{d \in \mathcal{J}} \frac{d}{(2d-1)^{1/2}}.$$

Учитывая, что $\sum_{d|r} |L_d| = |D_2| \dots |D_r|$, получаем

$$S_1 \leq (2r-1)^{1/2} |D_2| \dots |D_r|, \quad S_2 \leq \sum_{d \in \mathcal{J}} d^{1/2} \leq \frac{1}{2} r^{3/2}.$$

(Последняя оценка проверяется непосредственно при $2 \leq r \leq 7$, а при $r \geq 8$ вытекает из неравенств $r^{1/2} \leq \frac{1}{6} r^{3/2}$ и $\sum_{d \leq r/2} d^{1/2} \leq \frac{2}{3} (r/2 + 1)^{3/2} \leq \frac{1}{3} r^{3/2}$.) Значит,

$$A^{1/2} \leq p^{1/4} (2r-1)^{1/2} |D_2| \dots |D_r| + \frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2}.$$

Подставляя последнее неравенство в (3), получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in W} \chi(x) \right| &\leq |D_1|^{1/2} \left(p^{1/4} (2r-1)^{1/2} |D_2| \dots |D_r| + \frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} \right) = \\ &= |D_1|^{-1/2} p^{1/4} (2r-1)^{1/2} |W| + |D_1|^{1/2} \left(\frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка

$$\left| \sum_{x \in W} \chi(x) \right| \leq |D_i|^{-1/2} p^{1/4} (2r-1)^{1/2} |W| + |D_i|^{1/2} \left(\frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} \right).$$

Выберем i так, чтобы эта оценка была наилучшей. Рассмотрим функцию $H(x) = x^{-1/2} p^{1/4} (2r-1)^{1/2} |W| + x^{1/2} \left(\frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} \right)$, $1 \leq x \leq |W|$. Имеем

$$H'(x) = \frac{\frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2}}{2x^{1/2}} - \frac{p^{1/4} (2r-1)^{1/2} |W|}{2x^{3/2}},$$

и $H'(x) = 0$ при $x = 4|W| p^{-1/2} \frac{(2r-1)^{1/2}}{r^{3/2} + 4p^{-1/4}} \geq 2|W| p^{-1/2} r^{-1} \geq |W|^{1/2}$ при $|W| \geq 8p^{r/2} (2r-1)^r$.

Таким образом, минимум функции $H(x)$ достигается при $x \geq |W|^{1/2} \geq |W|^{1/r}$. Мы можем выбрать i так, что $|D_i| \geq |W|^{1/r}$; так как $H'(x) < 0$ при $|W|^{1/r} \leq x \leq |W|^{1/2}$, то можно гарантировать оценку

$$\left| \sum_{x \in W} \chi(x) \right| \leq H(|W|^{1/r}) = |W|^{1-1/(2r)} p^{1/4} (2r-1)^{1/2} + |W|^{1/(2r)} \left(\frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} \right).$$

Из неравенства (2) и последней оценки вытекает утверждение теоремы.

3. Доказательство следствий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Из теоремы следует, что

$$|W \cap Q| = |W| \left(\frac{1}{2} + O \left(|W|^{-1/(2r)} p^{1/4} (2r-1)^{1/2} + |W|^{-(2r-1)/(2r)} p^{3/4} r^{3/2} \right) \right).$$

При $|W| \geq (2r-1)^r p^{r(1/2+\varepsilon)}$ имеем $|W|^{-1/(2r)} \leq (2r-1)^{-1/2} p^{-1/4} p^{-\varepsilon/2}$ и

$$|W \cap Q| = |W| \left(\frac{1}{2} + O \left(p^{-\varepsilon/2} + r^{2-r} p^{1-r/2} p^{-(2r-1)\varepsilon/2} \right) \right).$$

Так как $r \geq 2$, то отсюда вытекает утверждение следствия 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Во множестве W есть квадраты, если правая часть неравенства (1) строго меньше, чем $|W| - 1$. Это равносильно условию

$$|W|^{1-1/r} \left(|W|^{1/(2r)} - p^{1/4} (2r-1)^{1/2} \right) > \frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} + |W|^{-1/(2r)}.$$

Покажем, что последнее неравенство выполнено при $|W| \geq 8(2r-1)^r p^{r/2}$. Имеем

$$|W|^{1/(2r)} \geq \left(e^2 (2r-1)^r p^{r/2} \right)^{1/(2r)} \geq (1+1/r) (2r-1)^{1/2} p^{1/4}$$

и

$$\begin{aligned} |W|^{1-1/r} \left(|W|^{1/(2r)} - (2r-1)^{1/2} p^{1/4} \right) &\geq \frac{1}{r} (2r-1)^{1/2} p^{1/4} (2r-1)^{r-1} p^{(r-1)/2} = \\ &= \frac{1}{r} (2r-1)^{r-1/2} p^{(r-1)/2+1/4} \geq \frac{3}{4} p^{3/4} r^{3/2} > \frac{1}{4} p^{3/4} r^{3/2} + p^{1/2} + |W|^{-1/(2r)}. \end{aligned}$$

Здесь предпоследнее неравенство очевидно при $r \geq 3$ и легко проверяется при $r = 2$; последнее неравенство следует из неравенства $\frac{1}{2} p^{3/4} r^{3/2} > p^{1/2} + (2r-1)^{-1/2} p^{-1/4}$, верного при всех $p \geq 3$, $r \geq 2$.

Следствие доказано.

4. Заключение

В работе доказана оценка на количество квадратов во множестве W , дающая аналог результата из работы [16], а также достаточные условия на существование квадратов во множестве W .

Этот результат является обобщением теоремы В предыдущей работы автора [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks W. D., Conflitti A., Shparlinski I. E. Character sums over integers with restricted g -ary digits // Illinois J. Math. 2002. Vol. 46, №3. P. 819–836.
2. Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic properties of numbers with restricted digits // Acta Arith. 2004. Vol. 112. P. 313–332.
3. Col S. Propriétés multiplicatives d'entiers soumis à des contraintes digitales // Thèse de doctorat de mathématiques de l'Université Henri Poincaré-Nancy. 2006. Vol. 1.

4. Col S. Diviseurs des nombres ellipsépiques // *Periodica Mathematica Hungarica*. 2009. Vol. 58, №1. P. 1–23.
5. Coquet J. On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences // *J. Number Theory*. 1978. Vol. 10, №3. P. 291–296.
6. Coquet J. On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences // *J. Number Theory*. 1980. Vol. 12, №2. P. 244–250.
7. Coquet J. Graphes connexes, représentation de entiers et équirépartition // *J. Number Theory*. 1983. Vol. 16, №3. P. 363–375.
8. Dartyge C., Mauduit C. Nombres presque premiers dont l'écriture en base r ne comporte pas certain chiffres // *Journal of Number Theory*. 2000. Vol. 81. P. 270–291.
9. Dartyge C., Mauduit C. Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers // *Journal of Number Theory*. 2001. Vol. 91. P. 230–255.
10. Drmota M., Mauduit C. Weyl sums over integers with affine digits restriction // *Journal of Number Theory*. 2010. Vol. 30. P. 2404–2427.
11. Erdős P., Mauduit C., Sárközy A. On the arithmetic properties of integers with missing digits I: Distribution in residue classes // *Journal of Number Theory*. 1998. Vol. 70, №2. P. 99–120.
12. Konyagin S. V., Mauduit C., Sárközy A. On the number of prime factors of integers characterized by digits properties // *Period. Math. Hung.* 2000. Vol. 40. P. 37–52.
13. Dartyge C., Sárközy A. The sum of digits function in the finite field // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2013. Vol. 141, №12. P. 4119–4124.
14. Dartyge C., Mauduit C., Sárközy A. Polynomial values and generators with missing digits in finite fields // *Functiones et Approximatio*. 2015. Vol. 52, №1. P. 65–74.
15. Габдуллин М. Р. О квадратах во множестве элементов конечного поля с ограничениями на коэффициенты при разложении по базису // *arXiv: 1602.06603v1*.
16. Dietmann R., Elsholtz C., Shparlinski I. E. Prescribing the binary digits of squarefree numbers and quadratic residues // *arXiv: 1601.04754v1*.
17. Wan D. Generators and irreducible polynomials over finite fields // *Math. Comp.* 1997. Vol. 66. P. 1195–1212.
18. Winterhof A. Characters sums, primitive elements, and powers in finite fields // *Journal of Number Theory*. 2001. Vol. 91. P. 153–161.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Banks, W. D., Conflitti, A. & Shparlinski, I. E. 2002, “Character sums over integers with restricted g -ary digits”, *Illinois J. Math.*, vol. 46, no. 3, pp. 819–836.
2. Banks, W. D. & Shparlinski, I. E. 2004, “Arithmetic properties of numbers with restricted digits”, *Acta Arith.*, vol. 112, pp. 313–332.
3. Col, S. 2006, “Propriétés multiplicatives d'entiers soumis à des contraintes digitales”, *Thèse de doctorat de mathématiques de l'Université Henri Poincaré-Nancy*, vol. 1.

4. Col, S. 2009, “Diviseurs des nombres ellipsépiques. *Periodica Mathematica Hungarica*”, vol. 58, no. 1, pp. 1–23.
5. Coquet, J. 1978, “On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences”, *J. Number Theory*, vol. 10, no. 3, pp. 291–296.
6. Coquet, J. 1980, “On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences”, *J. Number Theory*, vol. 12, no. 2, pp. 244–250.
7. Coquet, J. 1983, “Graphes connexes, représentation de entiers et équirépartition”, *J. Number Theory*, vol. 16, no. 3, pp. 363–375.
8. Dartyge, C. & Mauduit, C. 2000, “Nombres presque premiers dont l’écriture en base r ne comporte pas certain chiffres”, *Journal of Number Theory*, vol. 81, pp. 270–291.
9. Dartyge, C. & Mauduit, C. 2001, “Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers”, *Journal of Number Theory*, vol. 91, pp. 230–255.
10. Drmota, M. & Mauduit, C. 2010, “Weyl sums over integers with affine digits restriction”, *Journal of Number Theory*, vol. 30, pp. 2404–2427.
11. Erdős, P., Mauduit, C. & Sárközy, A. 1998, “On the arithmetic properties of integers with missing digits I: Distribution in residue classes”, *Journal of Number Theory*, vol. 70, no. 2, pp. 99–120.
12. Konyagin, S. V., Mauduit, C. & Sárközy, A. 2000, “On the number of prime factors of integers characterized by digits properties”, *Period. Math. Hung.*, vol. 40, pp. 37–52.
13. Dartyge, C. & Sárközy, A. 2013, “The sum of digits function in the finite field”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 141, no. 12, pp. 4119–4124.
14. Dartyge, C., Mauduit, C. & Sárközy, A. 2015, “Polynomial values and generators with missing digits in finite fields”, *Functiones et Approximatio*, vol. 52, no. 1, pp. 65–74.
15. Gabdullin, M. R., “On squares in subsets of finite fields with restrictions on coefficients of basis decomposition”, arXiv: 1602.06603v1 (Russian).
16. Dietmann, R., Elsholtz, C. & Shparlinski, I. E. “Prescribing the binary digits of squarefree numbers and quadratic residues”, arXiv: 1601.04754v1.
17. Wan, D. 1997, “Generators and irreducible polynomials over finite fields”, *Math. Comp.*, vol. 66, pp. 1195–1212.
18. Winterhof, A. 2001, “Characters sums, primitive elements, and powers in finite fields”, *Journal of Number Theory*, vol. 91, pp. 153–161.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук.

Получено 05.01.2016 г.

Принято в печать 10.06.2016 г.