

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 539.3:534.26

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-253-264

Дифракция цилиндрической звуковой волны на упругом многослойном цилиндре при произвольном расположении линейного источника

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolst@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом многослойном цилиндре, находящемся в однородной идеальной сжимаемой жидкости.

Первичное поле возмущений представляет собой цилиндрическую гармоническую звуковую волну, излучаемую линейным источником. Полагается, что оси источника и рассеивателя не являются параллельными и не лежат в одной плоскости.

Получено аналитическое решение задачи.

Ключевые слова: дифракция звука, цилиндрическая звуковая волна, упругий многослойный цилиндр.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:

Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Дифракция цилиндрической звуковой волны на упругом многослойном цилиндре при произвольном расположении линейного источника // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 253–264.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 539.3:534.26

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-253-264

Diffraction of a cylindrical sound wave on an elastic multilayer cylinder at an arbitrary location of a linear source

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergei Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tolst@mail.ru

Abstract

In this paper, the problem of diffraction of a cylindrical sound wave on an elastic multilayer cylinder located in a homogeneous ideal compressible liquid is considered.

The primary disturbance field is a cylindrical harmonic sound wave emitted by a linear source. It is assumed that the axes of the source and the diffuser are not parallel and do not lie in the same plane.

The analytical solution of the problem is obtained.

Keywords: diffraction of sound, cylindrical sound wave, elastic multilayer cylinder.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2026, “Diffraction of a cylindrical sound wave on an elastic multilayer cylinder at an arbitrary location of a linear source” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 253–264.

1. Введение

Исследованию дифракции звуковых волн на упругих однородных изотропных цилиндрах, находящихся в идеальной жидкости, посвящено большое количество работ. В большинстве из них рассматривался круговой цилиндр бесконечной длины, находящийся в безграничном пространстве. Например, случай нормального падения плоской гармонической волны на цилиндр рассматривался в [1], а случай наклонного падения — в [2, 3]. Задачи рассеяния сферической и цилиндрической звуковых волн сплошным упругим цилиндром решены в [4, 5]. Рассеяние плоской волны при нормальном падении на двухслойный упругий цилиндр рассмотрено в [6]. В [7] решена задача о рассеянии произвольно падающей плоской волны дискретно-слоистым цилиндром, состоящим из системы коаксиальных упругих однородных цилиндрических слоев.

Ряд работ посвящен исследованию дифракции звуковых волн на непрерывно-неоднородных упругих телах. Например, в работах [8, 9] решена задача о рассеянии плоских звуковых волн, падающих нормально на радиально-неоднородный изотропный упругий цилиндр. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием рассмотрено в [10]. Задачи дифракции сферической и цилиндрической волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием решены в [11, 12].

Во всех известных работах по дифракции цилиндрических волн на телах цилиндрической формы полагалось, что ось источника, генерирующего звуковую волну, и ось вращения цилиндра являются параллельными. С математической точки зрения непараллельное расположение линейного источника относительно оси вращения цилиндра сильно усложняет дифракционную задачу. В работах [13 – 15] получены решения задач дифракции при произвольном расположении линейного источника в пространстве относительно цилиндра. В [13] рассмотрен самый простой случай, когда рассеиватель являлся абсолютно жестким. В [14, 15] цилиндр полагался упругим и имеющим радиально-неоднородное упругое покрытие. Радиально-неоднородное упругое покрытие можно моделировать системой тонких однородных упругих слоев.

В настоящей работе решается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом многослойном цилиндре при произвольном расположении линейного источника, когда оси источника и рассеивателя не являются параллельными и не лежат в одной плоскости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный круговой цилиндр, состоящий из системы коаксиальных цилиндрических слоев радиусов r_j ($j = 0, 1, 2, \dots, N$). Внешний радиус цилиндрического тела —

r_N , при $j = 0$ имеем сплошной упругий цилиндр радиуса r_0 . Каждый j -й однородный изотропный упругий слой имеет плотность ρ_j и модули упругости λ_j и μ_j . Окружающая тело жидкость является идеальной, ее равновесная плотность — ρ и скорость звука — c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником. Рассмотрим случай, когда оси источника и рассеивателя не лежат в одной плоскости.

Определим акустическое поле, рассеянное телом.

3. Математическая модель задачи

Свяжем с цилиндром прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат. При этом ось z является осью вращения цилиндра, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Начало координат O на оси z выберем так, чтобы из точки O исходил общий перпендикуляр к оси z и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через d . Ось x направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Осуществим параллельный перенос вдоль оси x в точку O прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью прямоугольной декартовой x_1, y_1, z_1 и цилиндрической r_1, φ_1, z_1 систем координат с началом в точке O . При этом ось x_1 совместим с осью x . Обозначим через θ угол между осями z и z_1 (рис.).

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны в системе координат x_1, y_1, z_1 имеет вид

$$\psi_0 = AH_0^{(1)}(kR) \exp(-i\omega t), \quad R = \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2},$$

где A — амплитуда волны; $k = \omega/c$ — волновое число в окружающей жидкости; ω — круговая частота; t — время; $H_0^{(1)}$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. В дальнейшем временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

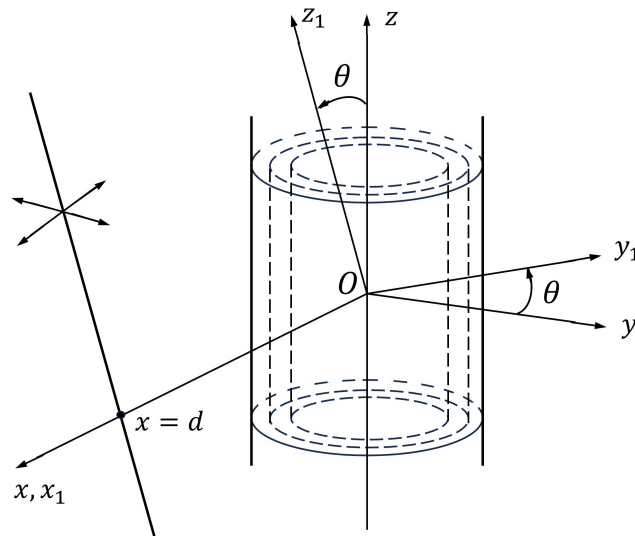


Рис. 1: Геометрия задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0,$$

где ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

В силу линейной постановки задачи потенциал ψ представим в виде $\psi = \psi_0 + \psi_s$, где ψ_s — потенциал скорости рассеянного акустического поля, являющийся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_s + k^2\psi_s = 0. \quad (3.1)$$

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \psi, \quad p = i\rho\omega\psi. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь уравнения, описывающие распространение малых возмущений в упругих цилиндрических слоях.

Представим вектор смещения $\mathbf{u}^{(j)}$ частиц j -го слоя в виде

$$\mathbf{u}^{(j)} = \text{grad } \Psi^{(j)} + \text{rot } \mathbf{\Phi}^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, N),$$

где $\Psi^{(j)}$ и $\mathbf{\Phi}^{(j)}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения в j -ом слое; $\text{div } \mathbf{\Phi}^{(j)} = 0$.

В случае гармонического движения потенциалы смещения являются решениями скалярного и векторного уравнений Гельмгольца [16]

$$\Delta\Psi^{(j)} + k_l^{(j)2}\Psi^{(j)} = 0, \quad \Delta\mathbf{\Phi}^{(j)} + k_\tau^{(j)2}\mathbf{\Phi}^{(j)} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N), \quad (3.3)$$

где $k_l^{(j)} = \omega/c_l^{(j)}$, $k_\tau^{(j)} = \omega/c_\tau^{(j)}$ и $c_l^{(j)} = \sqrt{(\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j}$, $c_\tau^{(j)} = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ — волновые числа и скорости продольных и поперечных упругих волн в j -ом слое соответственно.

Представим вектор $\mathbf{\Phi}^{(j)}$ в виде [17]

$$\mathbf{\Phi}^{(j)} = \text{rot}(L^{(j)}\bar{e}_z) + k_\tau^{(j)}M^{(j)}\bar{e}_z,$$

где $L^{(j)}$ и $M^{(j)}$ — скалярные функции пространственных координат r, φ, z ; $\bar{e}_z$ — единичный вектор оси z . Тогда векторное уравнение (3.2) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций $L^{(j)}$ и $M^{(j)}$

$$\Delta L^{(j)} + k_\tau^{(j)2}L^{(j)} = 0, \quad \Delta M^{(j)} + k_\tau^{(j)2}M^{(j)} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N). \quad (3.4)$$

Граничные условия на внешней поверхности тела заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений.

$$r = r_N : \quad -i\omega u_r^{(N)} = v_r, \quad \sigma_{rr}^{(N)} = -p, \quad \sigma_{r\varphi}^{(N)} = 0, \quad \sigma_{rz}^{(N)} = 0. \quad (3.5)$$

При переходе через границу раздела j -го и $j+1$ -го упругих слоев ($j = 0, 1, \dots, N-1$) должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения.

$$\begin{aligned} r = r_j : \quad u_r^{(j)} &= u_r^{(j+1)}, \quad u_\varphi^{(j)} = u_\varphi^{(j+1)}, \quad u_z^{(j)} = u_z^{(j+1)}, \\ \sigma_{rr}^{(j)} &= \sigma_{rr}^{(j+1)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(j)} = \sigma_{r\varphi}^{(j+1)}, \quad \sigma_{rz}^{(j)} = \sigma_{rz}^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(j)}$, $\sigma_{rz}^{(j)}$ и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}^{(j)}$ в j -ом слое записываются в виде [18]

$$\sigma_{rr}^{(j)} = \lambda_j \left[\frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi^{(j)}}{\partial \varphi} + u_r^{(j)} \right) + \frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial z} \right] + 2\mu_j \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r},$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(j)} = \mu_j \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(j)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{(j)}}{r} \right), \quad \sigma_{rz}^{(j)} = \mu_j \left(\frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial z} \right).$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(j)}$, записанные через функции $\Psi^{(j)}$, $L^{(j)}$ и $M^{(j)}$ в цилиндрической системе координат r, φ, z , имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^{(j)} &= \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 L^{(j)}}{\partial r \partial z} + \frac{k_\tau^{(j)}}{r} \frac{\partial M^{(j)}}{\partial \varphi}, \\ u_\varphi^{(j)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 L^{(j)}}{\partial \varphi \partial z} - k_\tau^{(j)} \frac{\partial M^{(j)}}{\partial r}, \\ u_z^{(j)} &= \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 L^{(j)}}{\partial z^2} + k_\tau^{(j)2} L^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя приведенные выше формулы, выразим компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(j)}$ и $\sigma_{rz}^{(j)}$ через функции $\Psi^{(j)}$, $L^{(j)}$ и $M^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(j)} &= -\lambda_j k_l^{(j)2} \Psi^{(j)} + 2\mu_j \left[\frac{\partial^2 \Psi^{(j)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 L^{(j)}}{\partial r^2 \partial z} + \frac{k_\tau^{(j)}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial M^{(j)}}{\partial r} - \frac{1}{r} M^{(j)} \right) \right], \\ \sigma_{r\varphi}^{(j)} &= \frac{2\mu_j}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi^{(j)} + \frac{\partial^2 L^{(j)}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial L^{(j)}}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \mu_j k_\tau^{(j)} \left(\frac{\partial^2 M^{(j)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M^{(j)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M^{(j)}}{\partial \varphi^2} \right), \\ \sigma_{rz}^{(j)} &= \mu_j \left(2 \frac{\partial^2 \Psi^{(j)}}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 L^{(j)}}{\partial r \partial z^2} + k_\tau^{(j)2} \frac{\partial L^{(j)}}{\partial r} + \frac{k_\tau^{(j)}}{r} \frac{\partial^2 M^{(j)}}{\partial \varphi \partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении функций $\psi_s(r, \varphi, z)$, $\Psi^{(j)}(r, \varphi, z)$, $L^{(j)}(r, \varphi, z)$ и $M^{(j)}(r, \varphi, z)$ ($j = 0, 1, \dots, N$), являющихся решениями уравнений (3.1), (3.3), (3.4) и удовлетворяющих граничным условиям (3.5), (3.6), а также дополнительным условиям: условиям излучения на бесконечности [16] для потенциала ψ_s и условию ограниченности для функций $\Psi^{(0)}$, $L^{(0)}$ и $M^{(0)}$.

4. Аналитическое решение задачи

Воспользуемся интегральным соотношением [19]

$$H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp[i\xi y_1 + i\eta|x_1 - d|] d\xi, \quad \eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}. \quad (4.1)$$

Прямоугольные координаты в системах координат $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$ связаны между собой соотношениями

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \cos \theta + z \sin \theta, \quad z_1 = -y \sin \theta + z \cos \theta.$$

Потенциал ψ_0 в цилиндрической системе координат r, φ, z будет иметь вид

$$\psi_0(r, \varphi, z) = AH_0^{(1)} \left(k \sqrt{(r \cos \varphi - d)^2 + (r \sin \varphi \cos \theta + z \sin \theta)^2} \right).$$

Тогда с учетом (4.1) получаем

$$\psi_0(r, \varphi, z) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp[i\xi(r \sin \varphi \cos \theta + z \sin \theta) + i\eta|r \cos \varphi - d|] d\xi. \quad (4.2)$$

Чтобы поле падающей волны при $r \rightarrow \infty$ было ограниченным, необходимо выполнение условия $\text{Im } \eta \geq 0$. Таким образом, $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

При $r \cos \varphi < d$ (значит и на поверхности цилиндра $r = r_N$) $|r \cos \varphi - d| = d - r \cos \varphi$. Поэтому в этом случае будем иметь

$$\psi_0(r, \varphi, z) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \theta) \exp[ir(\xi \sin \varphi \cos \theta - \eta \cos \varphi)] d\xi. \quad (4.3)$$

Заменим в выражении $\xi \sin \varphi \cos \theta - \eta \cos \varphi$ величины ξ и η величинами β и γ с помощью соотношений

$$\xi \cos \theta = \beta \sin \gamma, \quad \eta = -\beta \cos \gamma.$$

Тогда вместо (4.3) получим

$$\psi_0(r, \varphi, z) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\alpha z) \exp[i\beta r \cos(\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (4.4)$$

где $\alpha = \xi \sin \theta$, $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2 \sin^2 \theta}$, $\gamma = \arctg\left(-\frac{\xi \cos \theta}{\eta}\right)$.

Используя известное разложение [20]

$$\exp[i\beta r \cos(\varphi - \gamma)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) e^{in(\varphi - \gamma)},$$

где J_n — цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка n , (4.4) запишем в виде

$$\psi_0(r, \varphi, z) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) e^{in(\varphi - \gamma)} d\xi. \quad (4.6)$$

С учетом условий излучения на бесконечности, функцию ψ_s будем искать в виде

$$\psi_s(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\xi) H_n^{(1)}(\beta r) e^{in(\varphi - \gamma)} d\xi, \quad (4.7)$$

а функции $\Psi^{(j)}$, $L^{(j)}$ и $M^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, N$) — в виде

$$\Psi^{(j)}(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[B_{1n}^{(j)}(\xi) J_n(k_1^{(j)} r) + B_{2n}^{(j)}(\xi) N_n(k_1^{(j)} r) \right] e^{in(\varphi - \gamma)} d\xi,$$

$$L^{(j)}(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_{1n}^{(j)}(\xi) J_n(k_2^{(j)} r) + C_{2n}^{(j)}(\xi) N_n(k_2^{(j)} r) \right] e^{in(\varphi - \gamma)} d\xi, \quad (4.8)$$

$$M^{(j)}(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[D_{1n}^{(j)}(\xi) J_n(k_2^{(j)} r) + D_{2n}^{(j)}(\xi) N_n(k_2^{(j)} r) \right] e^{in(\varphi-\gamma)} d\xi,$$

где

$$k_1^{(j)} = \sqrt{k_l^{(j)2} - \alpha^2}, \quad k_2^{(j)} = \sqrt{k_\tau^{(j)2} - \alpha^2},$$

$H_n^{(1)} = J_n + iN_n$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; N_n — цилиндрическая функция Неймана порядка n .

Коэффициенты $A_n(\xi)$, $B_{1n}^{(j)}(\xi)$, $B_{2n}^{(j)}(\xi)$, $C_{1n}^{(j)}(\xi)$, $C_{2n}^{(j)}(\xi)$, $D_{1n}^{(j)}(\xi)$ и $D_{2n}^{(j)}(\xi)$ разложений (4.7) и (4.8) подлежат определению из граничных условий.

Для выполнения условия ограниченности функций $\Psi^{(0)}$, $L^{(0)}$ и $M^{(0)}$ необходимо положить

$$B_{2n}^{(0)}(\xi) = C_{2n}^{(0)}(\xi) = D_{2n}^{(0)}(\xi) \equiv 0.$$

Получим решение рассматриваемой задачи, воспользовавшись матричным методом [21, 22].

С учетом выражений (3.7), (3.8) и (4.8) представим компоненты вектора смещения $\mathbf{u}^{(j)}$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{kl}^{(j)}$ в виде

$$(u_r^{(j)}, u_\varphi^{(j)}, u_z^{(j)}, \sigma_{rr}^{(j)}, \sigma_{r\varphi}^{(j)}, \sigma_{rz}^{(j)})^T(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^{(j)}(r, \xi) e^{in(\varphi-\gamma)} d\xi, \quad (4.9)$$

где

$$S_n^{(j)}(r, \xi) = (u_{1n}^{(j)}(r, \xi), u_{2n}^{(j)}(r, \xi), u_{3n}^{(j)}(r, \xi), \sigma_{1n}^{(j)}(r, \xi), \sigma_{2n}^{(j)}(r, \xi), \sigma_{3n}^{(j)}(r, \xi))^T \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

Рассмотрим для каждого j -го слоя два вектора: $S_n^{(j)}(r, \xi)$ и $K_n^{(j)}(\xi)$, где

$$K_n^{(j)}(\xi) = (B_{1n}^{(j)}(\xi), B_{2n}^{(j)}(\xi), C_{1n}^{(j)}(\xi), C_{2n}^{(j)}(\xi), D_{1n}^{(j)}(\xi), D_{2n}^{(j)}(\xi))^T \quad (j = 0, 1, \dots, N).$$

Связь между этими векторами определяется формулой

$$S_n^{(j)}(r, \xi) = T_n^{(j)}(r, \xi) K_n^{(j)}(\xi) \quad (j = 0, 1, \dots, N), \quad (4.10)$$

где $T_n^{(j)}(r, \xi)$ — матрица шестого порядка с элементами $t_{kl}^{(j)}(r, \xi)$, $r_{j-1} \leq r \leq r_j$ ($r_{-1} = 0$).

С учетом выражений (3.6), (3.7), (4.8) и (4.9) получаем

$$\begin{aligned} t_{1q}^{(j)} &= k_1^{(j)} Z_n'(k_1^{(j)} r), \quad t_{1,q+2}^{(j)} = i\alpha k_2^{(j)} Z_n'(k_2^{(j)} r), \quad t_{1,q+4}^{(j)} = \frac{in}{r} k_\tau^{(j)} Z_n(k_2^{(j)} r), \\ t_{2q}^{(j)} &= \frac{in}{r} Z_n(k_1^{(j)} r), \quad t_{2,q+2}^{(j)} = -\frac{n\alpha}{r} Z_n(k_2^{(j)} r), \quad t_{2,q+4}^{(j)} = -k_\tau^{(j)} k_2^{(j)} Z_n'(k_2^{(j)} r), \\ t_{3q}^{(j)} &= i\alpha Z_n(k_1^{(j)} r), \quad t_{3,q+2}^{(j)} = k_2^{(j)2} Z_n(k_2^{(j)} r), \quad t_{35}^{(j)} = t_{36}^{(j)} = 0, \\ t_{4q}^{(j)} &= -\lambda_j k_l^{(j)2} Z_n(k_1^{(j)} r) + 2\mu_j k_1^{(j)2} Z_n''(k_1^{(j)} r), \quad t_{4,q+2}^{(j)} = 2i\mu_j \alpha k_2^{(j)2} Z_n''(k_2^{(j)} r), \\ t_{4,q+4}^{(j)} &= \frac{2in}{r} \mu_j k_\tau^{(j)} \left[k_2^{(j)} Z_n'(k_2^{(j)} r) - \frac{1}{r} Z_n(k_2^{(j)} r) \right], \quad t_{5q}^{(j)} = \frac{2in}{r} \mu_j \left[k_1^{(j)} Z_n'(k_1^{(j)} r) - \frac{1}{r} Z_n(k_1^{(j)} r) \right], \\ t_{5,q+2}^{(j)} &= -\frac{2n\alpha}{r} \mu_j \left[k_2^{(j)} Z_n'(k_2^{(j)} r) - \frac{1}{r} Z_n(k_2^{(j)} r) \right], \\ t_{5,q+4}^{(j)} &= -\mu_j k_\tau^{(j)} \left[k_2^{(j)2} Z_n''(k_2^{(j)} r) - \frac{1}{r} k_2^{(j)} Z_n'(k_2^{(j)} r) + \frac{n^2}{r^2} Z_n(k_2^{(j)} r) \right], \end{aligned}$$

$$t_{6q}^{(j)} = 2i\alpha\mu_j k_1^{(j)} Z_n'(k_1^{(j)} r), \quad t_{6,q+2}^{(j)} = \mu_j \left(k_\tau^{(j)2} - 2\alpha^2 \right) k_2^{(j)} Z_n'(k_2^{(j)} r),$$

$$t_{6,q+4}^{(j)} = -\frac{n\alpha}{r} k_\tau^{(j)} \mu_j Z_n(k_2^{(j)} r).$$

Здесь $Z_n = J_n$ при $q = 1$ и $Z_n = N_n$ при $q = 2$, штрихи означают дифференцирование по аргументу. Элементы $t_{kl}^{(j)}$ должны быть снабжены индексом n , который для простоты записи опускаем.

Рассмотрим произвольный j -ый слой ($j = 1, 2, \dots, N$). На его границах при $r = r_{j-1}$ и $r = r_j$ из (4.10) получаем соотношения

$$S_n^{(j)}(r_{j-1}, \xi) = T_n^{(j)}(r_{j-1}, \xi) K_n^{(j)}(\xi), \quad S_n^{(j)}(r_j, \xi) = T_n^{(j)}(r_j, \xi) K_n^{(j)}(\xi).$$

Воспользовавшись постоянством вектора $K_n^{(j)}(\xi)$ внутри j -го слоя, находим

$$S_n^{(j)}(r_j, \xi) = T_n^{(j)}(r_j, \xi) \left[T_n^{(j)}(r_{j-1}, \xi) \right]^{-1} S_n^{(j)}(r_{j-1}, \xi). \quad (4.11)$$

Подставляя выражения (4.9) в граничные условия (3.6) при $r = r_{j-1}$ (заменяя в (3.6) индекс j на $j-1$), будем иметь

$$S_n^{(j)}(r_{j-1}, \xi) = S_n^{(j-1)}(r_{j-1}, \xi), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда соотношение (4.11) перепишется в виде

$$S_n^{(j)}(r_j, \xi) = P_n^{(j)}(\xi) S_n^{(j-1)}(r_{j-1}, \xi) \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (4.12)$$

где

$$P_n^{(j)}(\xi) = T_n^{(j)}(r_j, \xi) \left[T_n^{(j)}(r_{j-1}, \xi) \right]^{-1}.$$

Последовательное применение формулы (4.12) позволяет связать значение вектора $S_n^{(j)}(r, \xi)$ на границе жидкой и упругой сред $r = r_N$ со значением этого вектора на границе $r = r_0$:

$$S_n^{(N)}(r_N, \xi) = P_n(\xi) S_n^{(0)}(r_0, \xi), \quad P_n(\xi) = P_n^{(N)}(\xi) P_n^{(N-1)}(\xi) \dots P_n^{(1)}(\xi). \quad (4.13)$$

Из соотношения (4.13) находим

$$u_{1n}^{(N)}(r_N) = \sum_{s=1}^3 [p_{1s} u_{sn}^{(0)}(r_0) + p_{1,s+3} \sigma_{sn}^{(0)}(r_0)],$$

$$\sigma_{mn}^{(N)}(r_N) = \sum_{s=1}^3 [p_{m+3,s} u_{sn}^{(0)}(r_0) + p_{m+3,s+3} \sigma_{sn}^{(0)}(r_0)], \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.14)$$

где p_{ms} (индекс n опущен) — элементы матрицы шестого порядка $P_n(\xi)$.

Подставляя разложения (4.6), (4.7) и (4.9) в граничные условия (3.5) при $r = r_N$ с учетом (3.2), находим

$$u_{1n}^{(N)}(r_N) = i \frac{\beta}{\omega} \left[\frac{A}{\pi \eta} e^{i(d\eta + \alpha z)} i^n J_n'(\beta r_N) + A_n(\xi) H_n'(\beta r_N) \right],$$

$$\sigma_{1n}^{(N)}(r_N) = -i\omega \rho \left[\frac{A}{\pi \eta} e^{i(d\eta + \alpha z)} i^n J_n(\beta r_N) + A_n(\xi) H_n(\beta r_N) \right], \quad (4.15)$$

$$\sigma_{2n}^{(N)}(r_N) = 0, \quad \sigma_{3n}^{(N)}(r_N) = 0.$$

Из (4.10) при $j = 0$ и $r = r_0$ получаем

$$u_{mn}^{(0)}(r_0) = t_{m1}^{(0)}(r_0) B_{1n}^{(0)}(\xi) + t_{m3}^{(0)}(r_0) C_{1n}^{(0)}(\xi) + t_{m5}^{(0)}(r_0) D_{1n}^{(0)}(\xi),$$

$$\sigma_{mn}^{(0)}(r_0) = t_{m+3,1}^{(0)}(r_0) B_{1n}^{(0)}(\xi) + t_{m+3,3}^{(0)}(r_0) C_{1n}^{(0)}(\xi) + t_{m+3,5}^{(0)}(r_0) D_{1n}^{(0)}(\xi), \quad m = 1, 2, 3. \quad (4.16)$$

Подставляя выражения (4.15) и (4.16) в равенства (4.14), приходим к системе четырех линейных уравнений с неизвестными $A_n(\xi)$, $B_{1n}^{(0)}(\xi)$, $C_{1n}^{(0)}(\xi)$ и $D_{1n}^{(0)}(\xi)$

$$a_{i1}A_n(\xi) + a_{i2}B_{1n}^{(0)}(\xi) + a_{i3}C_{1n}^{(0)}(\xi) + a_{i4}D_{1n}^{(0)}(\xi) = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -i\frac{\beta}{\omega}H'_n(\beta r_N); & a_{12} &= \sum_{q=1}^6 p_{1q}t_{q1}^{(0)}(r_0); & a_{13} &= \sum_{q=1}^6 p_{1q}t_{q3}^{(0)}(r_0); & a_{14} &= \sum_{q=1}^6 p_{1q}t_{q5}^{(0)}(r_0); \\ b_1 &= \frac{A\beta}{\pi\omega\eta}i^{n+1}e^{i(d\eta+\alpha z)}J'_n(\beta r_N); \\ a_{21} &= i\omega\rho H_n(\beta r_N); & a_{22} &= \sum_{q=1}^6 p_{4q}t_{q1}^{(0)}(r_0); & a_{23} &= \sum_{q=1}^6 p_{4q}t_{q3}^{(0)}(r_0); & a_{24} &= \sum_{q=1}^6 p_{4q}t_{q5}^{(0)}(r_0); \\ b_2 &= -\frac{A\omega\rho}{\pi\eta}i^{n+1}e^{i(d\eta+\alpha z)}J_n(\beta r_N); \\ a_{31} &= 0; & a_{32} &= \sum_{q=1}^6 p_{5q}t_{q1}^{(0)}(r_0); & a_{33} &= \sum_{q=1}^6 p_{5q}t_{q3}^{(0)}(r_0); & a_{34} &= \sum_{q=1}^6 p_{5q}t_{q5}^{(0)}(r_0); & b_3 &= 0; \\ a_{41} &= 0; & a_{42} &= \sum_{q=1}^6 p_{6q}t_{q1}^{(0)}(r_0); & a_{43} &= \sum_{q=1}^6 p_{6q}t_{q3}^{(0)}(r_0); & a_{44} &= \sum_{q=1}^6 p_{6q}t_{q5}^{(0)}(r_0); & b_4 &= 0. \end{aligned}$$

Из системы (4.17) находим

$$A_n(\xi) = \Delta_1/\Delta, \quad (4.18)$$

$$\text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Подставляя (4.18) в (4.7), получаем аналитическое описание рассеянного акустического поля.

5. Заключение

В настоящей работе решена задача дифракции гармонических звуковых волн, излучаемых линейным источником, расположенным произвольным образом относительно многослойного упругого цилиндра. Найденное решение позволяет численно исследовать рассеянное акустическое поле при любых значениях волнового размера цилиндрического тела kr_N , при любом количестве упругих слоев и произвольном расположении линейного источника.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. No. 4. P. 405–420.
2. Flax L., Varadan V. K., Varadan V. V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. No. 6. P. 1832–1835.

3. Li T., Ueda M. Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 86. No. 6. P. 2363–2368.
4. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. V. 87. No. 5. P. 1871–1879.
5. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. Vol. 13. № 3. P. 26–31.
6. Flax L., Neubauer W. G. Acoustic reflection from layered elastic absorptive cylinders. 1977. Vol. 61. No. 2. P. 307–312.
7. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
8. Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 762–766.
9. Коваленко Г. П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1060–1063.
10. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
11. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
12. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 46–472.
13. Корсунский С. В. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на абсолютно жестком цилиндре // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 481–484.
14. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. № 1. С. 71–84.
15. Добровольский Н. Н., Ефимов Д. Ю., Толоконников Л. А. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. Вып. 2. С. 269–285.
16. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978, 557 с.

20. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
21. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
22. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

REFERENCES

1. Faran, J.J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 23, no. 4, pp. 405–420.
2. Flax, L., Varadan, V.K. & Varadan, V.V. 1980, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 68, no. 6, pp. 1832–1835.
3. Li, T. & Ueda, M. 1989, "Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, no. 6, pp. 2363–2368.
4. Li, T. & Ueda, M. 1990, "Sound scattering of a spherical wave incident on a cylinder", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87, no. 5, pp. 1871–1879.
5. Lee, F.A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no. 3, pp. 26–31.
6. Flax, L. & Neubauer, W.G. 1977, "Acoustic reflection from layered elastic absorptive cylinders", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 61, no. 2, pp. 307–312.
7. Larin, N.V. & Tolokonnikov, L.A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 79, no. 2, pp. 164–169.
8. Bezrukov, A.V., Prikhodko, V.Yu. & Tyutekin, V.V. 1986, "Scattering of sound waves by elastic radially-layered cylindrical bodies", *Akusticheskii Zhurnal*, vol. 32, no. 6, pp. 762–766.
9. Kovalenko, G.P. 1987, "On a problem of diffraction of an acoustic wave by an inhomogeneous solid body", *Akusticheskii Zhurnal*, vol. 33, no. 6, pp. 1060–1063.
10. Tolokonnikov, L.A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izvestiya Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennye Nauki*, no. 2-2, pp. 265–274.
11. Tolokonnikov, L.A. 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform coating", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226.
12. Tolokonnikov, L.A. & Efimov, D.Yu. 2021, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with a radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460–472.
13. Korsunskii, S.V. 1988, "Non-axisymmetric problem of cylindrical sound waves diffraction by an absolutely rigid cylinder", *Akusticheskii Zhurnal*, vol. 34, no. 3, pp. 481–484.
14. Tolokonnikov, L.A. & Efimov, D.Yu. 2024, "Scattering by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 16, no. 3, pp. 373–382.

15. Dobrovolskii, N.N., Efimov, D.Yu. & Tolokonnikov, L.A. 2024, “A non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the boundary of an elastic half-space”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 269–285.
16. Shenderov, E.L. 1972, *Wave problems of underwater acoustics*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p.
17. Morse, P.M. & Feshbach, H. 1953, *Methods of theoretical physics*, vol. 2, McGraw-Hill, New York.
18. Nowacki, W. 1970, *Theory of elasticity*, PWN, Warsaw.
19. Felsen, L.B. & Marcuvitz, N. 1973, *Radiation and scattering of waves*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
20. Ivanov, E.A. 1968, *Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 584 p.
21. Molotkov, L.A. 1984, *Matrix method in the theory of wave propagation in layered elastic and liquid media*, Nauka, Leningrad, 201 p.
22. Brekhovskikh, L.M. & Godin, O.A. 1989, *Acoustics of layered media*, Nauka, Moscow, 416 p.

Получено: 15.12.2025

Принято в печать: 19.05.2026