

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 534.26

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-239-252

Энергетический критерий как принцип контроля правильности решений дифракционных задач

М. В. Огороков, С. А. Скобельцын

Огороков Максим Витальевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Новомосковск).

e-mail: maxik_ogorokov@mail.ru

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: skbl@rambler.ru

Аннотация

Вследствие практической ценности результатов исследования рассеяния звука на телах различной структуры и конфигурации важна и актуальна проверка их непротиворечивости. Существующие способы контроля точности решений дифракционных задач не позволяют оценить корректность полученных данных. Для достижения этой цели предложено использовать энергетический критерий, заключающийся в проверке выполнения закона сохранения акустической энергии. В качестве энергетической характеристики, баланс которой необходимо исследовать согласно данному критерию, должен выступать поток энергии звуковой волны, усредненный по времени. Выражение для интегрального энергетического критерия представляет собой равенство среднего потока энергии в рассеянной волне и среднего потока энергии взаимодействия падающего и рассеянного поля. Задача о дифракции плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере выступала в качестве модельной для демонстрации применения энергетического критерия. Исследование энергетического баланса проведено для различных значений волнового числа, а также радиусов тела и сферической поверхности, окружающей препятствие. На основе анализа полученных результатов установлено, что высокая степень точности выполнения энергетического критерия свидетельствует о правильности решения поставленной дифракционной задачи. Показано, что использование энергетического критерия позволяет обнаружить наличие ошибок в значениях искомых коэффициентов. Неточность найденного решения выявлена графически путем анализа зависимости расхождения между энергетическими показателями от числового параметра, характеризующего величину введенной ошибки. Исследовано угловое распределение среднего за период потока энергии в рассеянной волне и определено, что ошибочный расчет коэффициентов приводит к его видоизменению.

Ключевые слова: дифракция звука, энергетический критерий, плоская звуковая волна, абсолютно жесткая неподвижная сфера, средний поток энергии, комплексная ошибка, угловое распределение.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Огороков М. В., Скобельцын С. А. Энергетический критерий как принцип контроля правильности решений дифракционных задач // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 239–252.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 534.26

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-239-252

Energy criterion as a principle for control of the correctness of solutions to diffraction problems

M. V. Okorokov, S. A. Skobel'tsyn

Okorokov Maksim Vital'evich — postgraduate student, Tula State University (Novomoskovsk).
e-mail: maxik_okorokov@mail.ru

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: skbl@rambler.ru

Abstract

Due to the practical value of the results of studying sound scattering on bodies of various structures and configurations, checking their consistency is important and relevant. The existing methods for monitoring accuracy of solutions to diffraction problems don't allow assessing correctness of the data obtained. To achieve this goal, it is proposed to use an energy criterion, which consists in checking fulfilment of the law of conservation of acoustic energy. The energy characteristic whose balance must be investigated according to this criterion should be a time-averaged energy flux of a sound wave. The expression for the integral energy criterion represents the equality of an average energy flux in a scattered wave and an average energy flux of the interaction of incident and scattered fields. The problem of diffraction of a plane sound wave on an absolutely rigid stationary sphere served as a model problem to demonstrate the application of the energy criterion. The energy balance study was carried out for different values of a wave number as well as a radius of the body and the spherical surface surrounding the obstacle. Based on the analysis of the results obtained, it was found that a high degree of accuracy in fulfilling the energy criterion indicates the correctness of the solution to the posed diffraction problem. It is shown that the use of the energy criterion makes it possible to detect errors in the values of the sought coefficients. The inaccuracy of the found solution was revealed graphically by analyzing the dependence of a discrepancy between the energy indicators on the numerical parameter characterizing a magnitude of the introduced error. The angular distribution of the period-average energy flux in the scattered wave was studied, and it was determined that a wrong calculation of the coefficients leads to its modification.

Keywords: sound diffraction, energy criterion, plane sound wave, absolutely rigid stationary sphere, average energy flux, complex error, angular distribution.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

Okorokov, M. V., Skobel'tsyn, S. A. 2026, "Energy criterion as a principle for control of the correctness of solutions to diffraction problems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 239–252.

1. Введение

В настоящее время результаты решения задач дифракции звуковых волн на телах разнообразной формы и структуры востребованы во многих отраслях человеческой деятельности.

Так, например, в гидроакустике они используются для подводной эхолокации различных объектов и для изучения явления донной реверберации, оказывающего существенное влияние на эффективность работы гидролокационных приборов и устройств. Решения дифракционных задач с успехом применяются в дефектоскопии при совершенствовании методов неразрушающего контроля и способов ультразвуковой диагностики многофазных систем. Преимущество таких методик заключается в том, что с их помощью становится возможным не только обнаружение дефектов внутри упругого тела без его демонтажа, но и определение их формы, размера и расположения. Специалисты в области материаловедения используют достижения по исследованию рассеяния звука при создании новых материалов с требуемыми звукоотражающими и звукопоглощающими характеристиками. Поскольку звуковые волны являются одним из главных инструментов получения информации о строении земной коры, то ученые-геофизики активно применяют решения дифракционных задач с целью разведки месторождений полезных ископаемых, анализа процессов, происходящих в литосфере, и изучения акустических свойств горных пород.

В связи с существенной практической ценностью результатов исследования рассеяния звука на телах различной структуры и конфигурации, проверка их корректности и непротиворечивости важна и актуальна. Однако ввиду многообразия постановок и способов решения задач теории дифракции довольно затруднительно установить единый, универсальный критерий для определения величины погрешности в полученных данных.

В научной литературе описаны различные подходы по оценке точности найденных результатов. Выбор определенной методики зависит от направленности и специфики рассматриваемой дифракционной задачи. Заметим, что во многих исследованиях выражения для искомым акустических величин (например, рассеянных полей, полей смещений в упругих телах) зачастую представляют в виде разложений в ряд, содержащий бесконечное число членов. Разумеется, учет такого количества слагаемых невозможен ввиду лимитированности вычислительных и временных ресурсов. Из-за описанных трудностей для нахождения решения задачи ограничиваются некоторым конечным числом членов. Однако в этом случае возникают очевидные вопросы: сколько членов нужно просуммировать, чтобы достичь требуемой точности, и каким критерием руководствоваться для определения их количества?

При решении вопроса о числе учитываемых слагаемых бесконечного ряда в задачах дифракции звука на упругих телах наиболее часто используется следующее неравенство, указанное, например, в [1]:

$$n_0 \geq 2[ka],$$

где n_0 – учитываемое количество членов ряда, ka – волновой размер тела, $[...]$ – целая часть числа.

В [2] Е. А. Иванов предлагает использовать следующий способ для установления необходимого количества слагаемых ряда в задачах, которые содержат бесконечные системы линейных уравнений, решаемые методом усечения. Сначала при двух последовательно возрастающих значениях порядка усечения требуется получить два выражения для искомого ряда. После этого необходимо рассчитать невязки между членами сумм с одинаковыми индексами. И, наконец, сопоставив наибольшую из невязок и заданную наперед точность, сделать вывод о том, достаточное ли число слагаемых учтено в ряде или нужно увеличить порядок усечения.

Как указано в [3], в задаче об определении механических импедансов колебаний трансверсально-изотропного сферического слоя искомое решение удобно представить в виде бесконечного степенного ряда. Отмечено, что количество слагаемых в нем зависит от волновой толщины слоя и моды колебаний, а минимальное число членов ряда, которым можно ограничиться для тонких оболочек, равно трем.

В работе [4] подробно описывается, какими общими критериями следует руководствоваться при определении количества удерживаемых слагаемых ряда. Например, отмечено, что ино-

гда в качестве критерия окончания расчета членов ошибочно используют сравнение модуля очередного слагаемого B_i с некоторой малой величиной ε_0 и преждевременно останавливают вычисление при $i = N$, для которого $|B_i| < \varepsilon_0$. Особенно часто грубые ошибки возникают, если выражение для B_i содержит осциллирующие функции (например, тригонометрические или цилиндрические). Показано, что в некоторых случаях расчет можно прекращать, если несколько последовательных членов ряда оказываются малыми. Хотя этот критерий и является более надежным, однако и он не гарантирует отсутствие ошибок. Автор работы [4] приходит к выводу, что в задачах, в которых возможно рассчитать остаток $\left| \sum_{i=N}^{\infty} B_i \right|$, останавливать вычисление допустимо только при значении $i = N$, для которого выполнено условие $\left| \sum_{i=N}^{\infty} B_i \right| < \varepsilon_0$. Найти остаток можно, например, путем замены ряда интегралом при достаточно больших N .

2. Об энергетических характеристиках звуковых волн

Все вышеописанные способы нахождения требуемого количества слагаемых ряда позволяют контролировать точность полученных результатов, но с их помощью невозможно установить корректность найденных данных. По мнению авторов, наиболее универсальным критерием оценки правильности решения задач дифракции звуковых волн на телах различной структуры и конфигурации является так называемый энергетический критерий, основанный на проверке выполнения одного из фундаментальных законов природы – закона сохранения энергии. Однако, как считает М. А. Исакович [5], по отношению к задачам рассеяния звука уместнее использовать термин “закон сохранения акустической энергии”. Применение энергетического критерия предполагает исследование баланса различных энергетических характеристик звуковых волн. Анализ степени расхождения рассчитанных показателей и позволяет сделать вывод о правильности найденного решения дифракционной задачи.

Основными энергетическими характеристиками звуковых волн являются:

- 1) полная энергия, равная сумме кинетической энергии частиц в волне и приращения их внутренней энергии;
- 2) плотность энергии, определяемая как отношение полной энергии к величине объема, в котором эта энергия заключена;
- 3) поток энергии через поверхность, характеризующий количество энергии, которое будет перенесено волной через некоторую поверхность в единицу времени;
- 4) плотность потока энергии, представляющая собой векторную величину, направление которой совпадает с направлением переноса энергии. Плотность потока энергии в произвольной точке пространства численно равна потоку энергии через единичную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению распространения звуковой волны.

Изучению различных энергетических показателей акустических волн в задачах разнообразной направленности посвящено значительное число работ. В [6] исследована трансформация энергии падающей волны в энергии отраженного и прошедшего полей на границе раздела в волноводе, образованном жестким контактом двух полуполос одинаковой ширины, но с отличающимися механическими характеристиками. В работе [7] вычислены потоки энергии рассеянной волны Рэлея и падающей рэлеевской волны при различных соотношениях между скоростями продольной и поперечной волн в твердом теле. В статье [8] описываются преимущества использования плотности полной энергии вместо плотности потенциальной энергии для измерения звукопоглощения и звуковой мощности. Новый метод активного подавления отраженных звуковых волн был предложен в работе [9]. Для проверки его корректности оценивалось распределение мгновенной интенсивности звука, полученное с помощью компьютер-

ного моделирования. Для определения коэффициентов, характеризующих звуковое поле, был использован метод конечных элементов. Работы [1, 5, 10, 11] содержат фундаментальные основы по расчету энергетических характеристик акустических волн в задачах дифракции звука на телах разнообразной формы и структуры.

В настоящее время известны подходы к анализу баланса различных энергетических показателей звуковых волн в дифракционных задачах. В [12] методом частичных областей определено акустическое поле точечного источника, находящегося в неоднородной морской среде, на поверхности которой плавает цилиндрическое тело. На основе полученного решения в ближнем поле исследован баланс среднего потока мощности в области без выступа и среднего потока мощности в области, содержащей выступ. В [13] отмечено, что должно выполняться равенство интенсивностей в покоящейся и движущейся среде в случае отражения звука от последней. В работе [14] закон сохранения энергии применяется в качестве интегрального критерия оценки точности решения задачи о прохождении звуковой волны через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов. В [15] приведено выражение, описывающее энергетический баланс в установившемся состоянии для одной из подсистем, на которые при статистическом энергетическом анализе разбивается исходная структура. В [16] проверка выполнения закона сохранения акустической энергии при наклонном падении звука на границу раздела жидких сред, а также жидкости и упругого полупространства основывалась на расчете интенсивностей звуковых волн.

В данной работе описано получение универсального энергетического критерия, который может применяться в случае различных постановок пространственных дифракционных задач, и продемонстрировано его использование для контроля правильности решения модельной задачи.

3. Разработка интегрального энергетического критерия

Рассмотрим задачу дифракции звука на абсолютно жестком неподвижном теле, находящемся в идеальной жидкости плотностью ρ_1 . Пусть S_1 – произвольная замкнутая поверхность, окружающая препятствие. Вычислим полный, усредненный по времени поток энергии $\langle W \rangle$ через S_1 , предположив, что источник звука лежит вне этой поверхности. Данный энергетический показатель может быть рассчитан следующим образом:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_1} p V_n^* dS_1 = -\frac{1}{2\omega\rho_1} \operatorname{Im} \int_{S_1} p \frac{\partial p^*}{\partial n} dS_1,$$

где p – давление полного акустического поля, V_n – нормальная к поверхности S_1 составляющая скорости частиц жидкости ($\vec{n}$ – нормаль к S_1), ω – круговая частота. Здесь и далее звездочка “*” означает комплексно сопряженную величину.

Поскольку тело является абсолютно жестким, то оно не поглощает звук, а значит, активные потери отсутствуют. В этом случае полный, усредненный по времени поток энергии через S_1 должен быть равен нулю [3]:

$$\langle W \rangle = 0.$$

Представим акустическое давление полного звукового поля p в виде суммы давления падающей волны p_i и давления рассеянной волны p_s [17, 18]. Имеем:

$$\langle W \rangle = -\frac{1}{2\omega\rho_1} \operatorname{Im} \int_{S_1} \left(p_i \frac{\partial p_i^*}{\partial n} + p_i \frac{\partial p_s^*}{\partial n} + p_s \frac{\partial p_i^*}{\partial n} + p_s \frac{\partial p_s^*}{\partial n} \right) dS_1 = 0. \quad (1)$$

Усредненный по времени поток энергии в падающей волне $\langle W_i \rangle$ равен нулю, потому что она не имеет источников в конечной области пространства, а диссипация внутри S_1 отсутствует

[1]. Тогда

$$\langle W_i \rangle = -\frac{1}{2\omega\rho_1} \text{Im} \int_{S_1} p_i \frac{\partial p_i^*}{\partial n} dS_1 = 0. \quad (2)$$

Усредненный по времени поток энергии в рассеянной волне $\langle W_s \rangle$ вычисляется так:

$$\langle W_s \rangle = -\frac{1}{2\omega\rho_1} \text{Im} \int_{S_1} p_s \frac{\partial p_s^*}{\partial n} dS_1. \quad (3)$$

Используя формулы (2) и (3), для выражения (1) получим:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \langle W_s \rangle - \frac{1}{2\omega\rho_1} \text{Im} \int_{S_1} \left(p_i \frac{\partial p_s^*}{\partial n} + p_s \frac{\partial p_i^*}{\partial n} \right) dS_1 = 0, \\ \langle W_{is} \rangle &= \frac{1}{2\omega\rho_1} \text{Im} \int_{S_1} \left(p_i \frac{\partial p_s^*}{\partial n} + p_s \frac{\partial p_i^*}{\partial n} \right) dS_1, \end{aligned}$$

где $\langle W_{is} \rangle$ – усредненный по времени поток энергии взаимодействия падающего и рассеянного поля.

Тогда энергетический критерий запишется в следующем виде:

$$\langle W_s \rangle = \langle W_{is} \rangle. \quad (4)$$

4. Использование энергетического критерия для оценки правильности решения модельной задачи

Применение энергетического критерия для проверки корректности решений дифракционных задач продемонстрируем для случая рассеяния плоской звуковой волны, распространяющейся по направлению оси z , на абсолютно жесткой неподвижной сфере радиуса a , находящейся в идеальной жидкости плотностью ρ . Обозначим через c скорость звука в этой жидкости. Требуется определить звуковое поле, рассеянное сферой.

Представим акустическое давление падающей волны p_i в сферической системе координат r, θ, φ , имеющей начало в центре тела, в следующем виде:

$$p_i = p_0 \exp[i(kr \cos \theta - \omega t)], \quad (5)$$

где p_0 – амплитуда давления, k – волновое число в жидкости, t – время.

В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

Для нахождения давления рассеянной волны p_s решим методом разделения переменных уравнение Гельмгольца, записанное в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p_s}{\partial \theta} \right) + k^2 p_s = 0.$$

Поставленная задача является осесимметричной, поэтому искомая величина p_s не зависит от φ . Используя граничное условие на поверхности сферы, заключающееся в равенстве на ней нулю нормальной компоненты вектора скорости частиц жидкости, а также условие излучения на бесконечности ($\lim_{r \rightarrow \infty} p_s = 0$), для давления рассеянной волны находим:

$$p_s = -p_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)} h_m(kr) P_m(\cos \theta), \quad (6)$$

где $j'_m(x)$ – 1-я производная сферической функции Бесселя порядка m , $h_m(x)$ – сферическая функция Ханкеля 1-го рода порядка m , $h'_m(x)$ – 1-я производная сферической функции Ханкеля 1-го рода порядка m , $P_m(x)$ – многочлен Лежандра степени m .

С помощью интегрального энергетического критерия (4) проверим корректность полученного выражения (6), а именно правильность определения коэффициентов

$$A_m = -p_0 i^m (2m+1) \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)}.$$

Вычислим $\langle W_s \rangle$ через сферическую поверхность S , окружающую тело, по следующей формуле:

$$\langle W_s \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S p_s V_{sn}^* dS,$$

где V_{sn} – нормальная к S составляющая колебательной скорости частиц в рассеянной волне.

Пусть r_1 – радиус S . Поскольку в отсутствии поглощения поток энергии сферической волны одинаков через сферу любого радиуса, то r_1 может иметь произвольное значение. Далее, находим, что:

$$\langle W_s \rangle = \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p_s V_{sn}^* \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Поскольку

$$V_{sn}^* = -\frac{ip_0}{\rho c} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j'_m(ka) \frac{(h'_m(kr))^*}{(h'_m(ka))^*} P_m(\cos \theta),$$

то получим:

$$\begin{aligned} \langle W_s \rangle &= \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{ip_0^2}{\rho c} \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)} h_m(kr_1) P_m(\cos \theta) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j'_m(ka) \frac{(h'_m(kr_1))^*}{(h'_m(ka))^*} P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Поменяем местами интегрирование и суммирование и воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq k; \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k. \end{cases}$$

Найдем, что средний за период поток энергии в рассеянной волне равен:

$$\langle W_s \rangle = \frac{2\pi r_1^2 p_0^2}{\rho c} \operatorname{Re} \left[i \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{(j'_m(ka))^2}{|h'_m(ka)|^2} h_m(kr_1) (h'_m(kr_1))^* \right]. \quad (7)$$

Продифференцируем по r (5) и (6) и применим к полученным выражениям операцию комплексного сопряжения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i^*}{\partial r} &= -ip_0 k \cos \theta \exp(-ikr \cos \theta), \\ \frac{\partial p_s^*}{\partial r} &= -p_0 k \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) \frac{j'_m(ka)}{(h'_m(ka))^*} (h'_m(kr))^* P_m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (5), (6), (7), (8) в (4) и определим, что выражение для энергетического критерия в рассматриваемой дифракционной задаче будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[i \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{(j'_m(ka))^2}{|h'_m(ka)|^2} h_m(kr_1) (h'_m(kr_1))^* \right] = \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\pi} \left(i \cos \theta \exp(-ikr_1 \cos \theta) \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)} h_m(kr_1) P_m(\cos \theta) \right) \sin \theta d\theta - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{\pi} \left(\exp(ikr_1 \cos \theta) \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) \frac{j'_m(ka)}{(h'_m(ka))^*} (h'_m(kr_1))^* P_m(\cos \theta) \right) \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

С использованием формулы (9) численно исследуем выполнение энергетического баланса для различных значений k , a и r_1 . Предположим, что тело имеет волновой размер $ka = 3$ и расположено в воде ($\rho = 10^3$ кг/м³, $c = 1500$ м/с). Пусть на сферу падает плоская звуковая волна единичной амплитуды, а m изменяется от 0 до 10. Результаты исследования энергетического баланса представлены в табл. 1, где относительная разница между средним за период потоком энергии в рассеянной волне $\langle W_s \rangle$ и средним за период потоком энергии взаимодействия падающего и рассеянного поля $\langle W_{is} \rangle$ определяется как $\delta_{is} = \frac{|\langle W_s \rangle - \langle W_{is} \rangle|}{\min(\langle W_s \rangle, \langle W_{is} \rangle)} \times 100\%$.

Таблица 1: Проверка баланса средних потоков энергии для различных значений k , a и r_1

Значения параметров			Относительная разница $\delta_{is} \times 10^8, \%$
$k, \text{ м}^{-1}$	$a, \text{ м}$	$r_1, \text{ м}$	
1	3	2	61.6
		10^2	0
		10^3	5.13
2	1.5	2	4.11
		10^2	0
		10^3	0
3	1	2	0
		10^2	0
		10^3	0

На основе анализа данных, приведенных в табл. 1, можно сделать вывод, что для выбранного диапазона изменения m энергетический критерий выполняется с точностью лучше, чем $7 \times 10^{-7}\%$. Высокая степень точности свидетельствует о корректности определения коэффициентов A_m , а значит, и о правильности решения задачи дифракции плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере.

Далее, проведем следующий вычислительный эксперимент. Предположим, что коэффициенты A_m , выбранные случайным образом, могут быть рассчитаны с комплексной ошибкой¹ вида

$$\Delta = \varepsilon_1 \exp(i\varphi_1), \quad (10)$$

¹Здесь и далее термин “ошибка” употребляется в значении “неточность, неопределенность, имеющая физическую или техническую природу”.

где ε_1 – случайная величина, изменяющаяся в пределах от 0.5ε до 1.5ε , ε – некоторый числовой коэффициент, φ_1 – случайная величина из диапазона $[0, 2\pi)$.

Пусть $k = 3 \text{ м}^{-1}$, $a = 1 \text{ м}$, $r_1 = 2 \text{ м}$, а ρ , c , p_0 , m имеют значения, определенные выше. Искусственно и случайным образом внесем ошибку вида (10) в коэффициенты A_m и рассчитаем $\langle W_s \rangle$ и $\langle W_{is} \rangle$. Для повышения достоверности результатов эксперимента и обоснованности выводов по его итогам выполним указанные действия $M = 100$ раз при фиксированном ε .

Исследуем влияние введенных ошибок на энергетический баланс в рассмотренной выше задаче о рассеянии звука на абсолютно жесткой неподвижной сфере. С этой целью вычислим относительную разницу между величинами энергетических показателей:

$$P(\varepsilon) = \frac{|\langle \langle W_s \rangle \rangle_M - \langle \langle W_{is} \rangle \rangle_M|}{\min(\langle \langle W_s \rangle \rangle_M, \langle \langle W_{is} \rangle \rangle_M)} \times 100\%.$$

Здесь внешние угловые скобки соответствуют усреднению по M , т. е. $\langle X \rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j$.

Значения $\langle W_s \rangle$ и $\langle W_{is} \rangle$ в j -м наблюдении ($j = \overline{1, M}$), рассчитанные при случайном введении ошибок в коэффициенты A_m , обозначим через $\langle W_s^j \rangle$ и $\langle W_{is}^j \rangle$ соответственно.

Изображенная на рис. 1 функциональная зависимость P от ε отражает характер воздействия искусственно внесенных неточностей на энергетический баланс в дифракционной задаче.

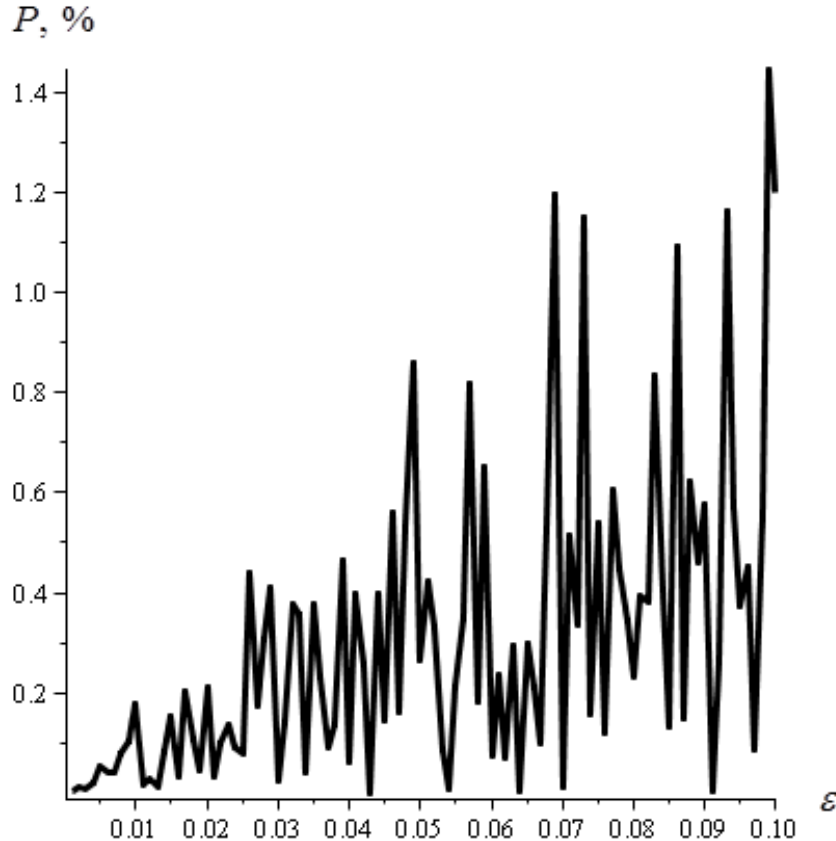


Рис. 1: Зависимость относительной разницы P от величины коэффициента ε

Анализ результатов, представленных на рис. 1, позволяет сделать вывод, что график функции $P(\varepsilon)$ имеет резонансно-подобный вид, причем с ростом ε расхождение между значениями энергетических показателей прослеживается все более отчетливо, о чем свидетельствует увеличивающаяся высота резонансных пиков. Немонотонность функциональной зависимости $P(\varepsilon)$ обусловлена как стохастическим характером введения неточностей в коэффициенты разложения (6), так и неопределенностью воздействия ошибок на величины комплексных чисел A_m . Наблюдаемая погрешность в выполнении энергетического баланса указывает на ошибочность решения задачи о дифракции звука на абсолютно жесткой неподвижной сфере.

Значительный интерес также представляет исследование углового распределения среднего за период потока энергии в рассеянной волне $\langle W_s \rangle$ и оценка влияния на него ошибок при расчете коэффициентов.

Разобьем диапазон изменения полярного угла θ на угловые секторы градусной мерой α радиан. Вычислим $\langle W_s \rangle$ для каждого из них по формуле

$$\langle W_s \rangle(\theta_1) = \frac{r_1^2}{2\rho c} \operatorname{Re} \left(i \int_{\theta_1 - \alpha}^{\theta_1} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m h_m(kr_1) P_m(\cos \theta)] \sum_{m=0}^{\infty} [A_m^* (h'_m(kr_1))^* P_m(\cos \theta)] \sin \theta d\theta \right) \quad (11)$$

в случае наличия или отсутствия ошибок в значениях коэффициентов A_m . Здесь θ_1 изменяется от α до π с шагом α радиан.

Используя формулу (11), изобразим в полярной системе координат угловое распределение потока энергии рассеянной волны. Построение графика происходило дискретно, т. е. по точкам, причем точке с полярной координатой θ_1 соответствует поток энергии рассеянной волны в угловом секторе $[\theta_1 - \alpha; \theta_1]$. Для наглядности полученные точки были соединены непрерывной линией.

Рассмотрим плоскость $\varphi = 0, \varphi = \pi$. Поскольку рассматриваемая задача является осесимметричной, то возбуждаемые волновые поля не будут зависеть от координаты φ . Следовательно, для получения полной круговой диаграммы значения, вычисленные в плоскости $\varphi = 0$, необходимо зеркально отразить в плоскость $\varphi = \pi$.

Расчеты углового распределения потока энергии проведены для шара радиусом $a = 1$ м. Полагалось, что тело находится в воде, $k = 3 \text{ м}^{-1}$, $r_1 = 2 \text{ м}$, $m = 0, \dots, 10$. Числовой коэффициент ε , характеризующий величину ошибок, брался равным 0.1.

Распределение потоков энергии по угловым секторам градусной мерой $\alpha = \pi/36$ представлено на рис. 2, где стрелкой показано направление распространения падающей плоской звуковой волны единичной амплитуды. Штрихпунктирной линией изображена зависимость $\langle W_s \rangle$ от θ_1 . Сплошная линия характеризует угловое распределение величины $\langle \langle W_s \rangle \rangle_M$, т. е. среднего значения потока энергии рассеянной волны за $M = 100$ наблюдений, причем во всех из них в коэффициенты A_m , выбранные случайным образом, были искусственно внесены ошибки вида (10). Для большей наглядности результаты расчета энергетических показателей в каждом угловом секторе поделены на вычисленное по формуле (11) при $\theta_1 = \alpha = \pi$ суммарное “безошибочное” значение $\langle W_s \rangle$ через расположенную в плоскости $\varphi = 0$ часть сферической поверхности, окружающей тело, и умножены на 100%.

Обобщив графические данные, приведенные на рис. 2, можем сделать вывод: введение ошибок в значения коэффициентов A_m приводит к видоизменению углового распределения потока энергии рассеянной волны. При этом наибольшее абсолютное расхождение наблюдается в боковых лепестках полученной диаграммы, а его максимальное значение составляет примерно 0.29%, которое достигается при $\theta_1 = 5\pi/36$. Следует отметить, что при внесении ошибок изменение потоков энергии вдоль направления распространения волны (для углов, близких к 0 и π) и для области углов от $4\pi/9$ до $\pi/2$ на графике практически не прослеживается вследствие малости величин данного энергетического показателя в указанных угловых секторах.

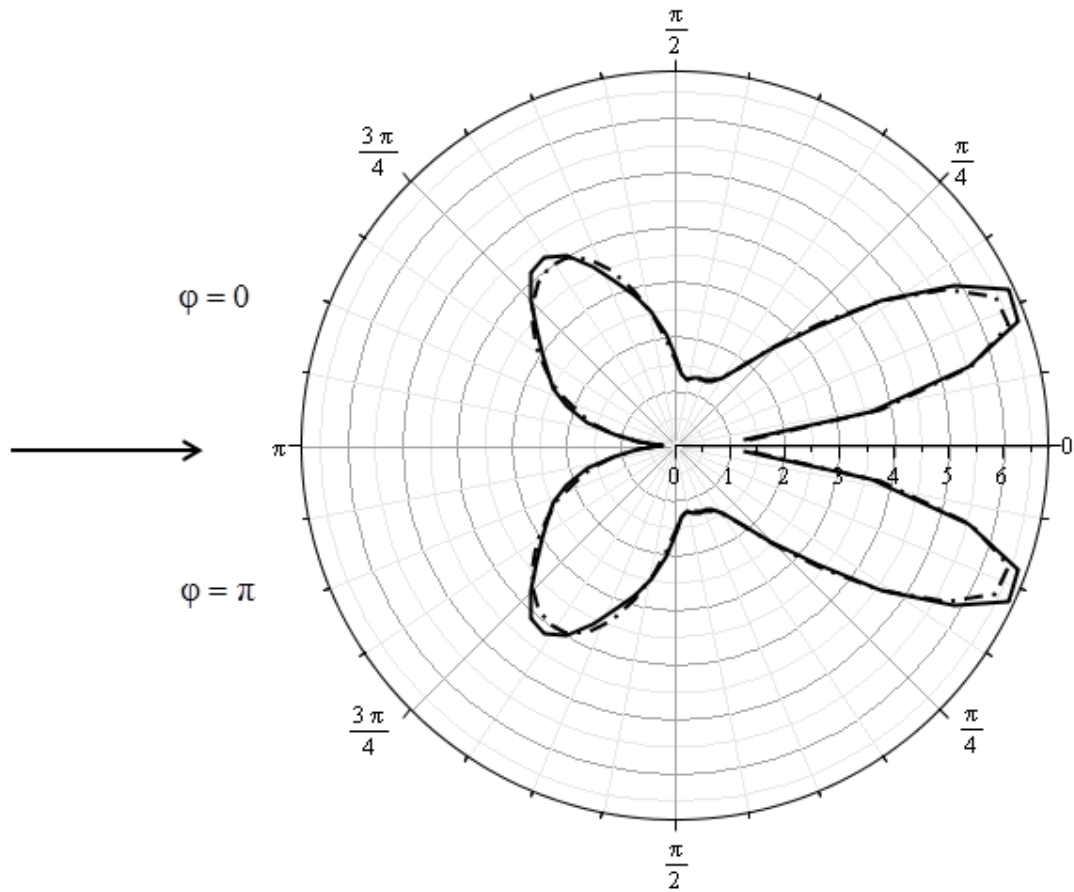


Рис. 2: Угловое распределение потока энергии рассеянной волны в случае наличия (сплошная линия) и отсутствия (штрихпунктирная линия) ошибок в значениях коэффициентов A_m

5. Заключение

В настоящей работе продемонстрировано, что корректность решений дифракционных задач может быть оценена с помощью интегрального энергетического критерия. В качестве энергетического показателя, баланс которого необходимо исследовать согласно данному критерию, предложено использовать усредненный по времени поток акустической энергии.

Применение энергетического критерия рассмотрено на примере оценки правильности решения модельной задачи о дифракции плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере. Исследование энергетического баланса проведено для различных значений k , a и r_1 . Анализ полученных результатов, приведенных в табл. 1, позволил установить, что выполнение энергетического критерия с высокой степенью точности является одним из важнейших условий, которому должно удовлетворять корректное решение дифракционной задачи.

В свою очередь, нарушение энергетического баланса отчетливо указывает на ошибочность проведенных расчетов. Об этом свидетельствует увеличивающаяся с ростом ϵ высота резонансных пиков на графике зависимости $P(\epsilon)$, представленном на рис. 1. Наблюдаемый эффект означает, что прослеживается тенденция, согласно которой расхождение между значениями энергетических показателей становится тем сильнее, чем больше величина имеющейся ошибки. При этом для $\epsilon \in [0.001; 0.1]$ максимальная относительная разница составляет около 1.5%.

Показано, что ошибочный расчет коэффициентов приводит к видоизменению углового распределения среднего за период потока энергии в рассеянной волне. Выявлено, что наибольшее по абсолютной величине расхождение наблюдается в боковых лепестках полученной диаграммы, которая изображена на рис. 2, а изменение значений данного энергетического показателя вдоль направления падения звука и для углов, незначительно меньших $\pi/2$, на графике визуально незаметно.

В заключение необходимо отметить, что интегральный энергетический критерий (4), приведенный в данной работе, является универсальным и может использоваться для проверки правильности решений в случае различных постановок пространственных дифракционных задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вестпфаль К., Мауэ А., Хёни Х. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
2. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
3. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
4. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
5. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
6. Городецкая Н. С. Трансформация энергии падающей волны на границе раздела в составном волноводе // Акустический вестник. 2001. Т. 4, № 1. С. 17–25.
7. Разин А. В. Рассеяние поверхностной акустической волны Рэлея на неоднородности малых размеров в твердом полупространстве // Известия вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 7. С. 464–480. doi: 10.1007/s11141-010-9239-3/
8. Blotter J. D., Leishman T. W., Nutter D. B., Sommerfeldt S. D. Measurement of sound power and absorption in reverberation chambers using energy density // J. Acoust. Soc. Am. 2007. Vol. 121, № 5. P. 2700–2710. doi: 10.1121/1.2713667/
9. Asano F., Suzuki Y., Takahashi H., Takane S. Active control of sound intensity for suppression of reflected sound waves based on the state feedback control // IEICE Trans. Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci. 2001. Vol. E84-A, № 4. P. 1017–1026.
10. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
11. Морз Ф. Колебания и звук. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 497 с.
12. Папков С. О., Папкова Ю. И., Ярошенко А. А. Энергетические характеристики звукового поля в неоднородной морской среде с плавающим на поверхности цилиндрическим телом // Морской гидрофизический журнал. 2006. № 3. С. 52–59.
13. Ribner H. S. Reflection, transmission, and amplification of sound by a moving medium // J. Acoust. Soc. Am. 1957. Vol. 29, № 4. P. 435–441.
14. Мацыпура В. Т. Прохождение звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов // Акустический вестник. 1999. Т. 2, № 1. С. 31–41.

15. Cotoni V., Le Bot A. Validity diagrams of statistical energy analysis // J. Sound Vib. 2010. Vol. 329, № 2. P. 221–235. doi: 10.1016/j.jsv.2009.09.008/
16. Огороков М. В., Скобельцын С. А. Об энергетическом критерии оценки точности решения дифракционных задач акустики // Материалы XXX Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А. Г. Горшкова. Т. 2 / МАИ, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова. Кремёнки, 2024. С. 149–159.
17. Толоконников Л. А. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого шара со сферической полостью и оптимальными звукоотражающими свойствами // Изв. ТулГУ. Сер. Технические науки. 2017. Вып. 3. С. 137–153.
18. Толоконников Л. А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 699–707. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2018.03.017/

REFERENCES

1. Westpfahl, K., Maue, A.W. & Hönl, H. 1964, *Theorie der Beugung*, Mir, Moscow, 428 p. [in Russian]
2. Ivanov, E.A. 1968, *Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 584 p. [in Russian]
3. Shenderov, E.L. 1989, *Radiation and scattering of sound*, Sudostroenie, Leningrad, 304 p. [in Russian]
4. Shenderov, E.L. 1972, *Wave problems of underwater acoustics*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian]
5. Isakovich, M.A. 1973, *General acoustics*, Nauka, Moscow, 496 p. [in Russian]
6. Gorodetskaya, N.S. 2001, “Transformation of incident wave energy at the interface in a composite waveguide”, *Akusticheskii Vestnik*, vol. 4, no. 1, pp. 17–25. [in Russian]
7. Razin, A.V. 2010, “Scattering of a Rayleigh surface acoustic wave by a small-size inhomogeneity in a solid half-space”, *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 53, no. 7, pp. 464–480, doi: 10.1007/s11141-010-9239-3. [in Russian]
8. Blotter, J.D., Leishman, T.W., Nutter, D.B. & Sommerfeldt, S.D. 2007, “Measurement of sound power and absorption in reverberation chambers using energy density”, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 121, no. 5, pp. 2700–2710, doi: 10.1121/1.2713667.
9. Asano, F., Suzuki, Y., Takahashi, H. & Takane, S. 2001, “Active control of sound intensity for suppression of reflected sound waves based on the state feedback control”, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol. E84-A, no. 4, pp. 1017–1026.
10. Lependin, L.F. 1978, *Acoustics*, Vysshaya Shkola, Moscow, 448 p. [in Russian]
11. Morse, P.M. 1949, *Vibration and sound*, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tekhniko-Teoreticheskoi Literatury, Moscow, 497 p. [in Russian]

12. Papkov, S.O., Papkova, Yu.I. & Yaroshenko, A.A. 2006, “Energy characteristics of a sound field in a heterogeneous marine environment with a cylindrical body floating on the surface”, *Physical Oceanography*, no. 3, pp. 52–59. [in Russian]
13. Ribner, H.S. 1957, “Reflection, transmission, and amplification of sound by a moving medium”, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 29, no. 4, pp. 435–441.
14. Matsypura, V.T. 1999, “Passage of sound through the interface between flat and wedge-shaped waveguides”, *Akusticheskii Vestnik*, vol. 2, no. 1, pp. 31–41. [in Russian]
15. Cotoni, V. & Le Bot, A. 2010, “Validity diagrams of statistical energy analysis”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 2, pp. 221–235, doi: 10.1016/j.jsv.2009.09.008.
16. Okorokov, M.V. & Skobel'tsyn, S.A. 2024, “On the energy criterion for assessing the accuracy of solving diffraction problems of acoustics”, in *Materialy XXX Mezhdunarodnogo simpoziuma “Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktssii i sploshnykh sred” imeni A.G. Gorshkova. Tom 2* [Proceedings of the 30th International Symposium “Dynamic and technological problems of a mechanics of constructions and continuous mediums” dedicated to A.G. Gorshkov. Vol. 2], Kremyonki, pp. 149–159. [in Russian]
17. Tolokonnikov, L.A. 2017, “Mathematical modelling of the inhomogeneous covering of an elastic sphere with the spherical cavity and optimum sound reflection”, *Izvestiya Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Tekhnicheskie Nauki*, no. 3, pp. 137–153. [in Russian]
18. Tolokonnikov, L.A. 2017, “Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 81, no. 6, pp. 699–707. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2018.03.017. [in Russian]

Получено: 02.07.2025

Принято в печать: 19.05.2026