

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 519.6, 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-219-238

**К оценке эффективных механических характеристик
преднапряженных пористых нелинейно-упругих материалов в
рамках теории многократного наложения больших деформаций
с имплементацией в промышленный пакет «Фидесис»:
двумерный случай¹**

Е. А. Ермаков, М. Я. Яковлев, К. М. Зингерман, В. А. Левин

Ермаков Егор Алексеевич — студент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: egor.ermakov@math.msu.ru

Яковлев Максим Яковлевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Аннотация

В статье приведены метод и численный алгоритм для оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик пористого материала при конечных деформациях. Подход описан для двумерного случая и основан на численном решении краевых задач нелинейной теории упругости на представительной площади пористого материала либо на его ячейке периодичности. Используются основные соотношения теории многократного наложения больших деформаций. Краевые задачи решаются с использованием нелинейного расчётного ядра российского инженерного программного комплекса «Фидесис». В случае моделирования материала регулярной структуры к его прямоугольной ячейке прикладываются периодические граничные условия в виде наложения связей на перемещения противоположных сторон. Эффективные свойства оцениваются в виде квадратичной зависимости тензора обобщённых напряжений от тензора деформаций. Проведены две серии расчётов эффективных характеристик: для пористой меди и пористой резины. Исследовано влияние порового давления на эффективные модули первого и второго порядка. Показано, что модули упругости второго порядка значительно зависят от приложенного давления. Сделан вывод о необходимости учёта внутреннего давления в пористом материале при моделировании его нелинейного деформирования.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, механика композитов, эффективные характеристики, численная гомогенизация, предварительное нагружение, пористый материал, пакет «Фидесис».

Библиография: 49 названий.

¹Исследования проведены в МГУ имени М. В. Ломоносова за счёт гранта РНФ №24-77-10022.

Для цитирования:

Ермаков Е. А., Яковлев М. Я., Зингерман К. М., Левин В. А. К оценке эффективных механических характеристик преднапряженных пористых нелинейно-упругих материалов в рамках теории многократного наложения больших деформаций с имплементацией в промышленный пакет «Фидесис»: двумерный случай // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 219–238.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 519.6, 539.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-219-238

A 2D approach to estimating effective mechanical properties of prestressed porous nonlinear elastic materials using the theory of repeated superposition of large deformations with implementation in CAE Fidesys

Е. А. Ermakov, М. Я. Yakovlev, К. М. Zingerman, В. А. Levin

Ermakov Egor Alekseevich — student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: egor.ermakov@math.msu.ru***Yakovlev Maxim Yakovlevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru***Zingerman Konstantin Moiseevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).*e-mail: zingerman@rambler.ru***Levin Vladimir Anatolievich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: v.a.levin@mail.ru***Abstract**

This article presents a method and a numerical algorithm for estimating the effective nonlinear elastic properties of a porous material under finite strain. The approach, described for the 2D case, is based on the numerical solution of boundary value problems from the nonlinear theory of elasticity on a representative surface element or a unit cell of a porous material. The fundamental relations of the theory of repeated superposition of large deformations are employed. The boundary value problems are solved using the nonlinear computational kernel of the Fidesys commercial computer-aided engineering (CAE) system. For modeling a material with a regular structure, periodic boundary conditions are applied to its rectangular unit cell in the form of constraints on the displacements of opposite sides. The effective properties are represented by a quadratic dependence of the generalized stress tensor on the strain tensor. Two calculation series for effective properties are performed: for porous copper and porous rubber. The influence of pore pressure on the first- and second-order effective moduli is investigated. It is shown that the second-order elastic moduli are significantly dependent on the applied pressure. It is concluded that internal pressure must be taken into account when modeling the nonlinear deformation of a porous material.

Keywords: nonlinear elasticity theory, composite mechanics, effective properties, numerical homogenization, preloading, porous material, CAE Fidesys.

Bibliography: 49 titles.

For citation:

Ermakov, E. A., Yakovlev, M. Ya., Zingerman, K. M., Levin, V. A. 2026, "A 2D approach to estimating effective mechanical properties of prestressed porous nonlinear elastic materials using the theory of repeated superposition of large deformations with implementation in CAE Fidesys", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 219–238.

1. Введение

Изучение механического поведения гетерогенных материалов при больших деформациях и учёт влияния предварительного напряжённого состояния на их эффективные свойства представляет собой одну из важных и актуальных задач современной механики композиционных материалов. Данная проблематика приобрела особую актуальность с развитием высокотехнологичных отраслей промышленности, где композиционные и пористые материалы эксплуатируются в условиях значительных предварительных нагружений. Кроме того, в современной науке модели и методы механики композитов применяются для описания материалов природного происхождения: грунтов, горных пород и биологических тканей - которые также зачастую подвергаются преднапряжению, вызывающему конечные деформации.

Оценка эффективных (осреднённых) характеристик неоднородных материалов вызывает интерес с середины XX века. Теоретические принципы такого осреднения описаны в работе Р. Хилла [1]. Для композитов и пористых материалов действуют двусторонние оценки Фойгта-Рейса [2, 3] и Хашина-Штрикмана [4, 5], дающие верхние и нижние пределы модулей объёмного сжатия и сдвига композиционного материала (при известной концентрации его компонентов). В книге Р. Кристенсена [6] приводятся аналитические формулы для оценки эффективных упругих характеристик дисперсно армированных, волокнистых и слоистых композитов, а также рассматриваются пластические и вязкоупругие эффекты и эффективные термические свойства композитов. В книге Б.Е. Победри [7] описываются методы осреднения не только упругих слоистых и волокнистых композитов, но и пластических и вязкоупругих, а также техника осреднения в динамических задачах. В литературе описываются также различные модели эффективных сред и аналитические методы для их гомогенизации: модель малой объёмной доли включений [6, 8], метод самосогласования [9, 10, 11, 12], дифференциальная модель эффективной среды [13, 14, 15, 16], метод эффективного поля [17]. Для материалов с упорядоченной микроструктурой эффективные свойства могут оцениваться с учётом этой структуры [18, 19, 8, 20].

Однако аналитические формулы для осреднения свойств гетерогенных материалов обычно выводятся из аналитических решений для статических задач механики деформируемого твёрдого тела - которые, как правило, сложно вывести. Поэтому чаще всего аналитические формулы для эффективных свойств выводятся для простых случаев: материалов с включениями либо порами в форме идеальных цилиндров или сфер. Значительная часть этих аналитических решений даёт эффективные свойства композиционных материалов в линейном виде, применимые для описания поведения композитов при малых деформациях.

В последние десятилетия производительность вычислительной техники активно растёт, что позволяет программно реализовать более сложные методы численного осреднения - которые, в свою очередь, делают возможным более точный и детальный анализ свойств гетерогенных материалов. Параллельно этому всё более актуальной становится проблема оценки эффективных свойств неоднородных материалов с учётом нелинейных эффектов - особенно с учётом геометрической нелинейности, возникающей при конечных деформациях гетерогенной среды. В статьях [21, 22] описывается применение вариационного принципа для оценки эффективных характеристик многокомпонентных композитов в виде плотности энергии деформации. В [23] для построения эффективных вязкоупругих определяющих соотношений

материала с периодической структурой используется метод конечных элементов, с помощью которого решается двумерная задача теории упругости для представительного объёма, после чего результаты осредняются. В статьях И. Цукрова и М. Качанова [24, 25] численно оцениваются эффективные упругие свойства твёрдых тел, содержащих полости разной формы и разной ориентации в пространстве. Статьи [26, 27] посвящены построению эффективных определяющих соотношений нелинейно-упругих пористых материалов при конечных деформациях. В работе [28] для моделирования распространения упругих волн в трещиноватой среде (горной породе) применяется метод эффективного поля. В [29] приводится метод, пригодный для оценки как упругих свойств, так и тепло- и электропроводности дисперсно армированных материалов (в статье проводится сравнение влияния различных параметров армирующих частиц на эффективные упругие свойства и эффективную тепло- и электропроводность). В работах [30, 31, 32, 33] определяются некоторые эффективные модули резинокордного слоя: жёсткость при изгибе и жёсткость бокового сжатия. В [34] эффективные свойства и возникновение микродефектов в тканых композитах оцениваются с использованием метода конечных элементов. В статье [35] приводится аналитическое решение нелинейной задачи гомогенизации - оцениваются эффективные модули пористых упруго-пластических сред.

Данная статья представляет собой развитие подхода к численному решению нелинейных задач оценки эффективных механических характеристик путём проведения расчётов на представительном объёме гетерогенного материала. Основные идеи данного подхода к численному решению таких задач описаны в статьях [26, 27]: в частности, приводится искомая форма эффективных нелинейно-упругих определяющих соотношений неоднородного материала в виде квадратичной зависимости эффективного тензора деформаций от эффективного тензора напряжений. В работе [36] описывается численный алгоритм и приводятся некоторые результаты оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик резинокорда при конечных деформациях (при этом моделирование проводится не на представительном объёме гетерогенного материала, а на его ячейке периодичности). В статье [37] этот же подход, основанный на методе конечных элементов, применяется к нелинейно-упругим пористым материалам. В работе [38] данный подход к численному осреднению реализован с использованием более современного и эффективного метода спектральных элементов. Во всех этих работах при оценке эффективных свойств учитывается и физическая, и геометрическая нелинейность: для гетерогенного материала вычисляются эффективные модули первого и второго порядка, при этом учитываются конечные деформации. В статье [39] описан общий подход и приведены некоторые результаты оценки эффективных характеристик пористого нелинейно-упругого материала, подвергнутого предварительному нагружению в виде порового давления - которое приводит к возникновению конечных деформаций. В статье [40] данный подход распространён на горные породы, преднагруженные также давлением. В работе [41] исследуются эффективные модули упругости предварительно нагруженного пористого упруго-пластического материала под действием внешнего давления (при малых деформациях): подробно описан подход к численной оценке эффективных характеристик с учётом преднагружения и приведены многочисленные результаты численных расчётов - проведённых, в том числе, и на графических ускорителях.

В данной работе исследуются эффективные характеристики пористого нелинейно-упругого материала, предварительно нагруженного поровым давлением, которое вызывает возникновение конечных деформаций. Исследуемый материал имеет периодическую структуру с порами цилиндрической формы, поэтому расчёты проводятся на двумерной ячейке периодичности, при этом прикладываются периодические граничные условия [42]. В работе впервые предложен численный алгоритм, который позволяет приложить периодические граничные условия для предварительного нагружения так, чтобы преднагруженная ячейка периодичности находилась в равновесном состоянии. Если численная оценка эффективных нелинейно-упругих характеристик ненагруженного неоднородного материала при конечных деформациях производится на основе нелинейной теории упругости [44] - то при наличии предварительного

нагрузки оценка эффективных свойств опирается на теорию наложения больших деформаций [45].

2. Методика численной оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик гетерогенного материала, подвергнутого предварительному нагружению

2.1. Методика для ненагруженного материала (при конечных деформациях)

Рассмотрим **представительный объём** исследуемого гетерогенного материала - то есть достаточно большой объём материала, на котором можно провести эксперименты или измерения, по результатам которых сделать корректные выводы о свойствах материала в целом [46]. (Иными словами, представительный объём - это объём, который представляет поведение всего материала: чтобы избежать ситуации, когда человек зачерпывает ведро воды из океана и, не найдя в ведре рыбы, делает некорректный вывод, что и в океане в целом рыбы нет.) Заполним точно такой же объём сплошным однородным материалом. Этот однородный материал по определению назовём **эффективным (или осреднённым) материалом**, если при одинаковых перемещениях границ обоих объёмов средние (осреднённые по объёму) напряжения в них будут равны. Механические свойства данного эффективного материала по определению назовём **эффективными свойствами** исходного неоднородного материала.

В данной работе мы исследуем эффективные свойства материалов в двумерном случае (при плоско-деформированном состоянии) - поэтому роль представительного объёма играет представительная площадь [42]. Кроме того, исследуемый нами пористый материал имеет периодическое распределение пор цилиндрической формы - поэтому вместо представительного объёма расчёты проводятся на **ячейке периодичности** с периодическими граничными условиями [43].

Сначала опишем алгоритм численной оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик ненагруженного неоднородного материала [36, 37]. Механические свойства материала представляют собой связь между напряжениями и деформациями в нём. Для численной оценки эффективных свойств гетерогенного материала мы будем решать для представительной площади модельные задачи, в каждой из которых задаётся средняя деформация и вычисляются соответствующие ей средние напряжения. Для представительной площади S_0 в форме прямоугольника, выделенного в начальном состоянии (до деформации), решаем определённое количество последовательностей краевых задач нелинейной теории упругости [44]:

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathfrak{R} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\Gamma_0} = r \cdot (\Psi^e - I) \quad (2)$$

где $\mathfrak{R}$ - первый (несимметричный) тензор напряжений Пиолы, $\overset{0}{\nabla}$ - оператор градиента в координатах начального состояния, u - вектор перемещения, Γ_0 - граница площади в начальном состоянии, r - радиус-вектор частицы в начальном состоянии, Ψ^e - аффино́р деформации (градиент деформации), I - единичный тензор.

Каждая последовательность задач соответствует определённому виду тензора деформации Грина $\overset{0}{E}$ эффективного материала - и определённому виду эффективного аффино́ра деформаций деформаций Ψ^e в граничных условиях (2). Тензор деформаций Грина и аффино́р деформаций связаны следующим соотношением:

$${}^0 E^e = \frac{1}{2}(\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \quad (3)$$

Разные же задачи в пределах одной последовательности, имея один тип эффективной деформации, различаются её величиной q . Для двумерного случая могут быть решены следующие последовательности задач:

- 1) ${}^0 E_{11} = q$ - растяжение или сжатие вдоль оси X;
- 2) ${}^0 E_{22} = q$ - растяжение или сжатие вдоль оси Y;
- 3) ${}^0 E_{12} = {}^0 E_{21} = q$ - сдвиг в плоскости XY;
- 4) ${}^0 E_{11} = {}^0 E_{22} = q$ - композиция растяжений или сжатий вдоль двух осей: X и Y;
- 5) ${}^0 E_{11} = q, {}^0 E_{12} = {}^0 E_{21} = q$ - композиция растяжения или сжатия вдоль оси X и сдвига в плоскости XY;
- 6) ${}^0 E_{22} = q, {}^0 E_{12} = {}^0 E_{21} = q$ - композиция растяжения или сжатия вдоль оси Y и сдвига в плоскости XY.

В результате решения каждой краевой задачи упругости, находим поле тензора истинных напряжений Коши σ . Зная его, вычисляем тензор истинных напряжений σ^e эффективного материала с помощью осреднения по представительной площади в конечном состоянии (после деформации):

$$\sigma^e = \frac{1}{S} \int_S \sigma dS \quad (4)$$

Зная эффективный аффиноид деформаций, заданный в граничных условиях (2), и эффективный тензор истинных напряжений Коши (4), вычислим второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа эффективного материала:

$${}^0 \Sigma^e = (\det \Psi^e)(\Psi^e)^{* -1} \cdot \sigma^e \cdot (\Psi^e)^{-1} \quad (5)$$

Поскольку разные задачи в пределах одной последовательности отличаются величиной деформации (при неизменном типе деформации), мы для каждой последовательности можем построить квадратичную зависимость эффективного тензора Пиолы-Кирхгофа от величины деформации q :

$${}^0 \Sigma_{ij}^e = \alpha_{ij}^0 q + \alpha_{ij}^1 q^2 \quad (6)$$

Коэффициенты $\alpha_{ij}^0, \alpha_{ij}^1$ для каждой последовательности задач вычисляются с помощью метода наименьших квадратов. Имея набор этих коэффициентов для каждой последовательности задач, мы оцениваем модули упругости первого порядка C_{ijkl}^0 и второго порядка C_{ijklmn}^1 из эффективных определяющих соотношений, представляющих собой квадратичную зависимость второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа от тензора деформаций Грина:

$${}^0 \Sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^0 {}^0 E_{kl}^e + C_{ijklmn}^1 {}^0 E_{kl}^e {}^0 E_{mn}^e \quad (7)$$

Для вычисления эффективных упругих констант C_{ijkl}^0 и C_{ijklmn}^1 из наборов коэффициентов α_{ij}^0 и α_{ij}^1 решается система из шести (в двумерном случае) линейных алгебраических уравнений. В статье [36] эта система выписана в явном виде для трёхмерного случая, где необходимо решить 21 уравнение. Эффективные модули первого порядка C_{ijkl}^0 и второго порядка C_{ijklmn}^1 и являются эффективными константами гетерогенного материала, определяющими его нелинейно-упругое поведение.

2.2. Учёт предварительного нагружения при оценке эффективных свойств

Теперь опишем изменения и дополнения в приведённом выше алгоритме, необходимые для численной оценки эффективных свойств преднапряжённого гетерогенного материала. Если задача решается в линейной постановке, при малых деформациях, то предварительное нагружение не повлияет на эффективные упругие свойства материала в соответствии с принципом суперпозиции линейно-упругих деформаций. Поэтому мы описываем подход к оценке эффективных упругих свойств предварительно нагруженного материала при конечных деформациях с учётом геометрической и физической нелинейности.

Суть данного подхода заключается в том, что предварительное нагружение создаёт в представительной площади некоторые деформации и напряжения. Затем задаются дополнительные перемещения граничных точек (2), соответствующие однородным дополнительным деформациям. Для каждой такой дополнительной деформации решается краевая задача нелинейной упругости (1). В результате решения вычисляются соответствующие истинные напряжения и осредняются по площади в конечном состоянии по формуле (4). Эффективные свойства представительно нагруженного материала представляют собой взаимосвязь между этими дополнительными напряжениями и деформациями.

Ранее авторами в статьях [39, 40] данный подход описан для случая, когда одновременно с применением к модели граничных условий, соответствующих предварительному нагружению, внешняя границы модели фиксировалась. Таким образом, предварительное нагружение при нулевых средних деформациях приводило к возникновению в модели ненулевых эффективных напряжений. Осреднение этих напряжений по формуле (4) давало ненулевой эффективный тензор истинных напряжений Коши σ_0^e , из которого с помощью формулы (5) вычислялся эффективный второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа Σ_0^e , возникающий в материале исключительно вследствие предварительного нагружения.

Далее к представительному объёму/площади (либо ячейке периодичности) дополнительно прикладывались модельные граничные условия (2), задающие ненулевые эффективные тензоры деформаций Грина E^e - и решались последовательности краевых задач (1), осреднение результатов каждой из которых давало эффективные тензоры напряжений Пиолы-Кирхгофа Σ^e . Для каждой последовательности задач, аналогично (6), строилась квадратичная зависимость:

$$\Sigma_{ij}^e - \Sigma_{0ij}^e = \alpha_{ij}^0 q + \alpha_{ij}^1 q^2 \quad (8)$$

Эффективные же нелинейно-упругие характеристики, аналогично (7), оценивались в виде:

$$\Sigma_{ij}^e - \Sigma_{0ij}^e = C_{ijkl}^0 E_{kl}^e + C_{ijklmn}^1 E_{kl}^e E_{mn}^e \quad (9)$$

В данной работе исследуется более общий случай, в котором предварительное нагружение вызывает в модели не только ненулевые эффективные напряжения, но и ненулевые эффективные деформации. Таким образом, возникает уже не два состояния (начальное и конечно-е/текущее), а три: начальное (ненагруженное), промежуточное (приложено только предвари-

тельное нагружение) и конечное (к предварительному нагружению добавляются модельные граничные условия (2)). Будем обозначать их соответственно 0, 1 и 2 (рис. 1).

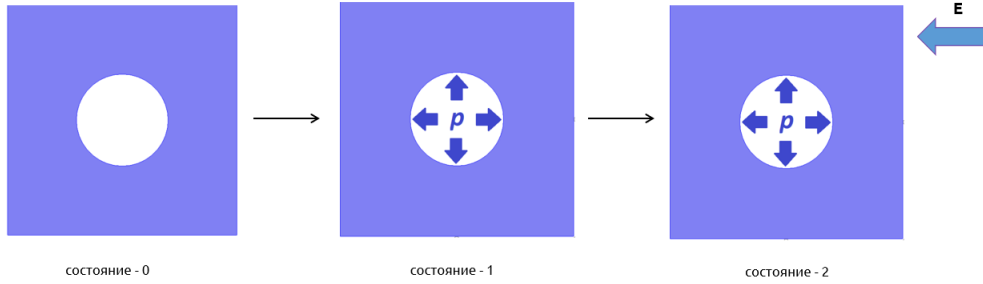


Рис. 1: Три состояния, возникающие при оценке эффективных нелинейно-упругих характеристик предварительно нагруженного материала при конечных деформациях

При переходе из состояния 0 в состояние 1, а также при переходе из состояния 1 в состояние 2 представительная площадь испытывает конечные деформации. Поэтому данный подход опирается не на нелинейную теорию упругости [44], а на теорию многократного наложения больших деформаций [45]. При формулировке эффективных определяющих соотношений нужно выбрать отсчетную конфигурацию (состояние), относительно которой будут измеряться деформации и для которой будут вычисляться обобщённые напряжения. Это может быть либо начальное состояние, либо промежуточное. Выберем в качестве отсчетного промежуточное состояние, поскольку интерес представляет поведение уже преднагруженного гетерогенного материала.

Прикладываемые модельные эффективные деформации задаются для состояния 1. В результате решения каждой краевой задачи (1) вычисляется и осредняется по площади поле тензора истинных напряжений. Тензор обобщённых напряжений вычисляется из него по формулам [45]:

$$\Sigma_{0,n}^n = (1 + \Delta_{0,n})\sigma_{0,n} \quad (10)$$

$$\Sigma_{0,n}^m = \Psi_{n,m}^* \cdot \Sigma_{0,n}^n \cdot \Psi_{n,m} \quad (11)$$

При этом $m = 1, n = 2$. Эффективные нелинейно-упругие определяющие соотношения предварительно нагруженного материала построим в форме квадратичной зависимости эффективного тензора обобщённых дополнительных напряжений $\Sigma_{1,2}^e$ от эффективного тензора дополнительных деформаций $\bar{E}_{1,2}^e$. Тензор деформаций $\bar{E}_{1,2}^e$ нами в каждой статической краевой задаче каждой последовательности задаётся, аналогично методике оценки эффективных свойств ненагруженного нелинейно-упругого гетерогенного материала. При этом в рамках одной последовательности задач данный тензор деформаций задаёт один и тот же вид деформации (растяжения/сжатия представительной площади, сдвиг или их композиция), а в разных задачах он отличается только величиной деформации q . Аналогично (6), для каждой последовательности задач мы строим квадратичную зависимость вычисленного тензора обобщённых дополнительных деформаций от q с помощью метода наименьших квадратов:

$$\Sigma_{1,2}^e = \alpha^0 q + \alpha^1 q^2 \quad (12)$$

Далее, имея набор коэффициентов $\alpha_{ij}^0, \alpha_{ij}^1$, вычисляем модули упругости первого порядка C_{ijkl}^0 и модули упругости второго порядка C_{ijklmn}^1 из эффективных определяющих соотношений, представляющих собой квадратичную зависимость эффективного тензора обобщённых

дополнительных напряжений $\Sigma_{1,2}^e$ от эффективного тензора дополнительных деформаций $E_{1,2}^e$:

$$\Sigma_{1,2}^e = C^0 : E_{1,2}^e + C^1 : E_{1,2}^e : E_{1,2}^e \quad (13)$$

Формула (13) полностью аналогична (7). Знак $:$ здесь обозначает двойную скалярную свёртку. После вычисления эффективных констант материала C_{ijkl}^0 и C_{ijklmn}^1 задача численной оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик предварительно нагруженного гетерогенного материала может считаться решённой.

2.3. Периодические граничные условия

В случае, если исследуются нелинейно-упругие эффективные свойства преднагруженного гетерогенного материала периодической структуры, моделирование производится на его ячейке периодичности, к которой необходимо прикладывать периодические граничные условия. Дадим возможность ячейке периодичности деформироваться под действием предварительно нагружения, в результате которого модель может изменить свою форму - но важно чтобы в результате этих деформаций ячейка периодичности оставалась ячейкой периодичности. И затем можно будет применить поиск эффективных характеристик, производя вычисления над деформированной моделью. Для этого к модели необходимо прикладывать многоточечные связи - в данном случае, связи на четыре граничных точки [47].

Рассмотрим ячейку периодичности в виде прямоугольной пластины с круговым отверстием в центре. Внутри этого отверстия присутствует внутреннее давление. Начало координат расположено в центре пластины. Ось Y направим вверх, ось X вправо так, чтобы они были параллельны сторонам пластины (рис. 2).

На рисунке показаны точки 1, 2, 3 - это три из четырёх вершин прямоугольника. Точки $(i, -i)$ - это пара противоположных друг другу точек на сторонах, перпендикулярных оси X (они имеют одинаковые ординаты и противоположные по знаку абсциссы). Чтобы после деформации модель оставалась ячейкой периодичности, необходимо наложить связь $\vec{u}_i - \vec{u}_{-i} - c = 0$, где c - некоторая константа. Это константа одинакова для любых точек $(i, -i)$, поэтому разумно взять её как разность перемещений точек 1 и 2:

$$\vec{u}_i - \vec{u}_{-i} - \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 0 \quad (14)$$

Точки $(j, -j)$ - это пара противоположных друг другу точек на сторонах, перпендикулярных оси Y (они имеют одинаковые абсциссы и противоположные по знаку ординаты). На них по аналогии с (14) также наложим многоточечную связь (связь на четыре точки):

$$\vec{u}_j - \vec{u}_{-j} - \vec{u}_1 + \vec{u}_3 = 0 \quad (15)$$

Необходимо подчеркнуть, что в многоточечных связях (14) и (15) точки 1, 2, 3 - фиксированные (т.е. одинаковые для всех соотношений). При этом точки $i, -i, j, -j$ - варьируемые. Связь (14) накладывается на каждую пару противоположных друг другу точек $(i, -i)$ сторон прямоугольной ячейки, перпендикулярных оси X , а связь (15) - на каждую пару противоположных друг другу точек $(j, -j)$ сторон, перпендикулярных оси Y .

3. Численные расчёты

3.1. Реализация алгоритма и тестирование программного кода

Вышеописанный алгоритм численной оценки эффективных нелинейно-упругих характеристик предварительно нагруженного гетерогенного материала реализован в исследовательском

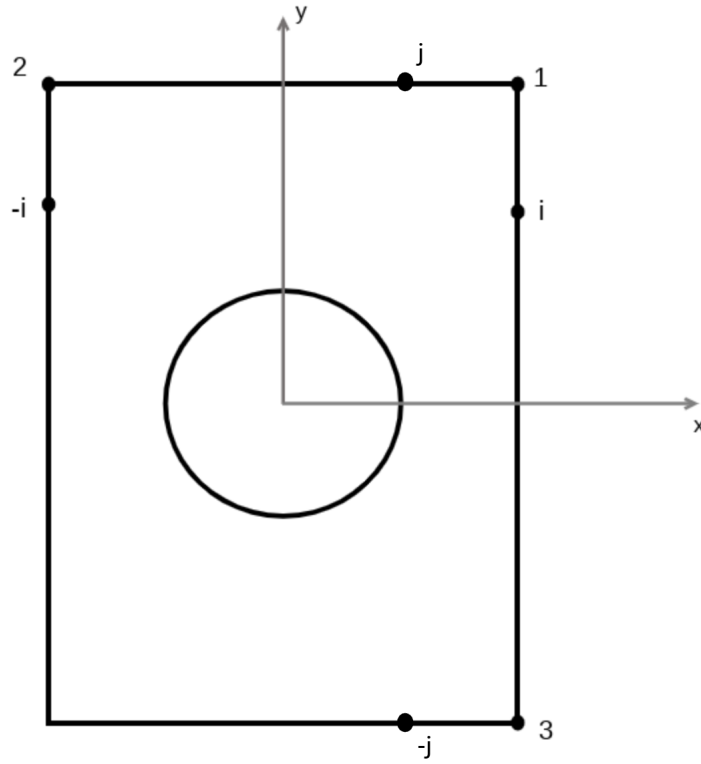


Рис. 2: Периодические граничные условия, прикладываемые к ячейке при предварительном нагружении и реализуемые через многоточечные связи

программном модуле. Статические задачи нелинейной теории упругости решаются с помощью нелинейного расчётного ядра российского инженерного программного комплекса "Фидесис" [48] с помощью метода конечных элементов и более современного и эффективного метода спектральных элементов. Поддерживаются как неперiodические, так и периодические граничные условия. Последние реализованы с помощью технологии жёсткого (связанного) контакта [49], позволяющего наложить не только связи (14) и (15) на перемещения точек противоположных сторон ячейки периодичности, но и задать условия равенства нормальных напряжений на противоположных сторонах. Такое дополнительное ограничение делает условия периодичности более полными и корректными.

Возник вопрос о тестировании разработанного программного модуля. Аналитические решения для эффективных характеристик предварительно нагруженных нелинейно-упругих материалов при конечных деформациях найти не удалось. Существует аналитическое решение для ненагруженного материала: из определения эффективных характеристик вытекает, что эффективные свойства сплошного однородного материала совпадают с исходными свойствами этого материала (если мы осредняем константу - эту же самую константу должны и получить). В качестве сплошного материала мы рассмотрели изотропный нелинейно-упругий материал, определяющие соотношения которого представляют собой квадратичную зависимость второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа от тензора деформаций Грина - материал Мурнагана [45]:

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda(\overset{0}{E} : I)I + 2G\overset{0}{E} + 3C_3(\overset{0}{E} : I)^2I + C_4((\overset{0}{E})^2 : I)I + 2C_4(\overset{0}{E} : I)\overset{0}{E} + 3C_5(\overset{0}{E})^2 \quad (16)$$

Из сравнения определяющих соотношений (7) и (16) следуют следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\lambda &= C_{1122}^0 \\
G &= C_{1212}^0 \\
3C_3 + 3C_4 + 3C_5 &= C_{1111}^1 \\
3C_3 + C_4 &= C_{1122}^1 \\
2C_4 + 3C_5 &= 4C_{111212} = 4C_{121112}^1
\end{aligned} \tag{17}$$

С помощью разработанного программного модуля мы провели расчёт эффективных характеристик для сплошного однородного материала Мурнагана с константами $\lambda = 109000$ МПа, $G = 81800$ МПа, $C_3 = -29000$ МПа, $C_4 = -240000$ МПа, $C_5 = -225000$ МПа, соответствующими стали. Были получены следующие эффективные упругие константы: $C_{1212}^0 = 81800$ МПа, $C_{1122}^0 = 109000$ МПа, $C_{1111}^1 = -1.482e + 06$ МПа, $C_{111212}^1 = -1.482e + 06$ МПа. Соотношения (17) выполняются в точности, что позволяет предположить корректную работу программного модуля.

Кроме того, был проведён тестовый расчёт для сплошного однородного материала Мурнагана с нулевыми модулями второго порядка: $C_3 = C_4 = C_5 = 0$. Вычисленные эффективные упругие коэффициенты второго порядка C_{ijklmn}^1 также получились нулевыми, что свидетельствует о правильной работе модуля.

3.2. Медь (материал Мурнагана) с цилиндрическими порами

В первой серии численных экспериментов исследуются эффективные нелинейно-упругие характеристики меди с регулярно расположенными одинаковыми отверстиями (порами) цилиндрической формы (пористость составляет 10%). В качестве предварительной нагрузки рассматривается внутреннее (поровое) давление. Ячейка периодичности для такого материала - квадратной формы с круговым отверстием в центре. На рис. 3 показана такая ячейка в графическом интерфейсе препроцессора программного пакета "Фидесис" [48] с уже построенной сеткой из треугольных конечных элементов.

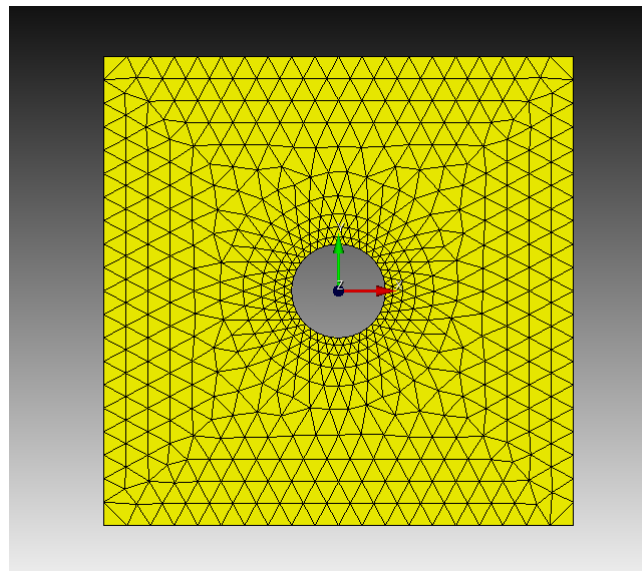


Рис. 3: Ячейка периодичности для расчёта эффективных свойств пористого материала с регулярным распределением одинаковых пор цилиндрической формы

Нелинейно-упругие свойства меди описываются материалом Мурнагана (16) с константами: $\lambda = 107000$ МПа, $G = 47700$ МПа, $C_3 = -93000$ МПа, $C_4 = 172000$ МПа, $C_5 = -531000$

МПа. Исследуется зависимость эффективных модулей первого и второго порядка от порового давления, варьируемого от нуля до 1 ГПа. Эффективные деформации при такой нагрузке не превышали 5%.

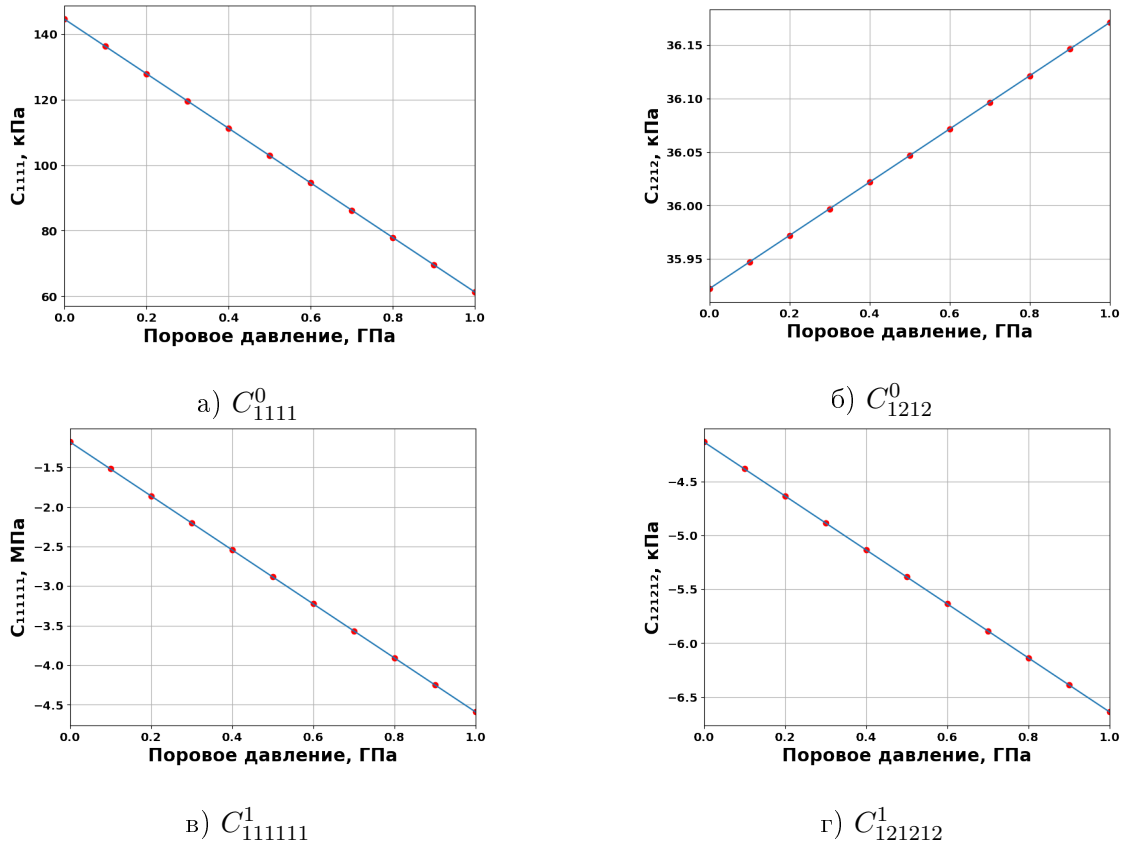


Рис. 4: Зависимость эффективных упругих модулей пористой меди от порового давления

Графики зависимости некоторых эффективных коэффициентов показаны на рис. 4. Модуль первого порядка C_{1111}^0 , отвечающий за жёсткость материала при растяжении/сжатии, при увеличении порового давления от нуля до 1 ГПа монотонно убывает примерно в два с половиной раза (рис. 4а). При этом коэффициент первого порядка C_{1212}^0 , отвечающий за жёсткость при сдвиге, практически не меняется (монотонно увеличивается примерно на 0.5%, как видно из рис. 4б). Эффективный модуль второго порядка C_{111111}^1 , показывающий нелинейность материала при растяжении, имеет отрицательные значения и по модулю монотонно увеличивается более чем в три раза (рис. 4в). При этом коэффициент второго порядка C_{121212}^1 , влияющий на нелинейность при сдвиге, также имеет отрицательные значения и по модулю монотонно увеличивается примерно в полтора раза (рис. 4г).

3.3. Резина (материал Муни-Ривлина) с цилиндрическими пора́ми

Во второй серии расчётов нелинейно-упругих эффективных характеристик исследуется пористая резина с регулярно расположенными пора́ми цилиндрической формы. Пористость также составляет 10%, преднапряжение - поровое давление. Ячейка периодичности - аналогично, квадратной формы с круговым отверстием в центре (рис. 3). Нелинейно-упругие свойства резины описываются материалом Муни-Ривлина, упругий потенциал которого имеет вид:

$$W = C_{01}(I_2 - 3) + C_{10}(I_1 - 3) + \frac{1}{D}(J - 1)^2 \quad (18)$$

Для резины используются следующие упругие константы: $C_{10} = -57090$ Па, $C_{01} = 1.05046 \cdot 10^6$ Па, $D = 2.01335 \cdot 10^{-8}$ Па $^{-1}$. Исследуется зависимость эффективных модулей первого и второго порядка от порового давления, варьируемого от нуля до 1 ГПа (полностью аналогично предыдущей серии расчётов).

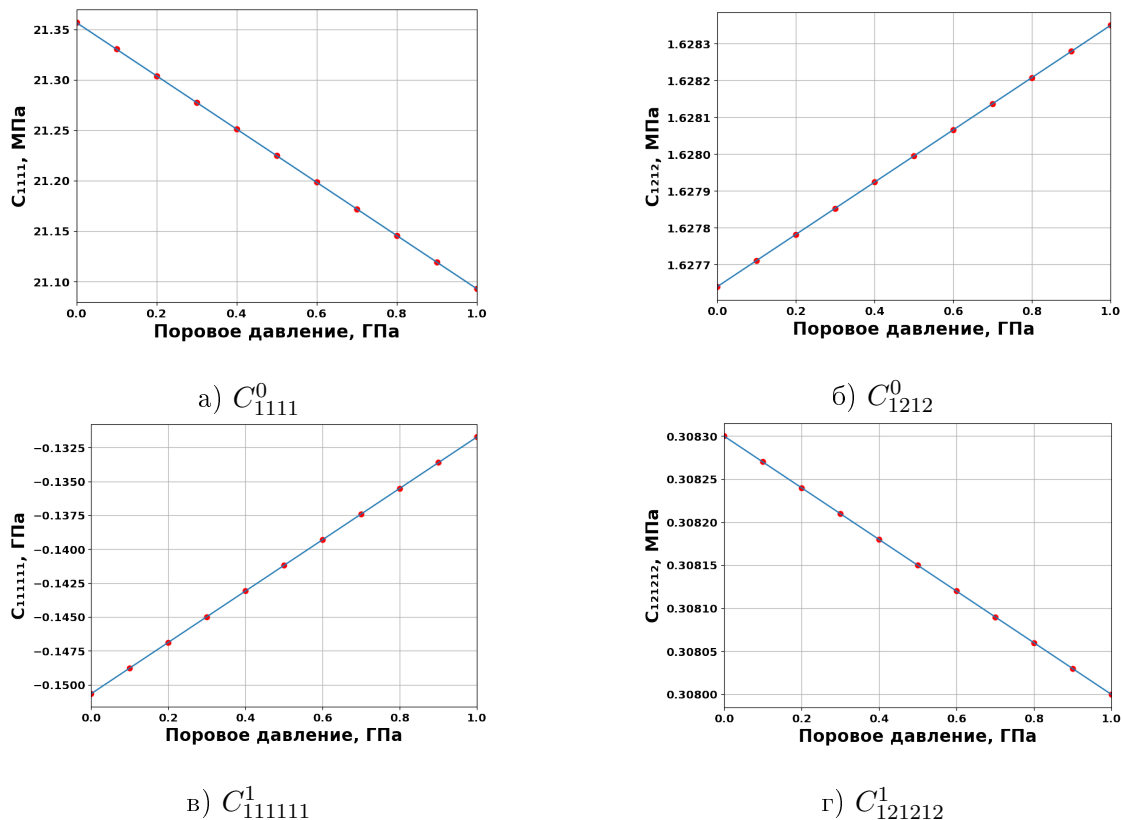


Рис. 5: Зависимость эффективных упругих модулей пористой резины от порового давления

Графики зависимости некоторых эффективных коэффициентов показаны на рис. 5. Модули первого порядка C_{1111}^0 (рис. 5а) и C_{1212}^0 (рис. 5б) при увеличении порового давления от нуля до 1 ГПа изменяются незначительно, порядка 1%. При этом модули второго порядка меняются существенно. Отрицательный эффективный модуль C_{111111}^1 , показывающий нелинейность материала при растяжении, уменьшается по модулю более чем на 10% (рис. 5в). А положительный эффективный модуль второго порядка C_{121212}^1 , отвечающий за нелинейность при сдвиговом нагружении и положительный в отсутствии преднагружения, при увеличении порового давления практически не изменяется (рис. 5г).

4. Результаты и выводы

В работе описаны метод и алгоритм численной оценки эффективных свойств предварительно нагруженного нелинейно-упругого гетерогенного материала при конечных деформациях в двумерном случае. Подход основан на решении краевых задач для представительной площади либо ячейки периодичности. Для решения задачи преднагружения на ячейке периодичности задаются периодические граничные условия через многоточечные связи, позволяющие ячейке под воздействием предварительной нагрузки деформироваться сколь угодно сильно. Эффективные определяющие соотношения записываются в преднагруженном состоянии модели в виде квадратичной зависимости тензора обобщённых напряжений от тензора

деформаций.

Численный алгоритм реализован в виде исследовательского программного модуля, использующего нелинейное расчётное ядро российского инженерного программного комплекса «Фидесис» [48]. Проведены тестовые расчёты эффективных свойств однородного материала, результаты которых позволили предположить, что корректно вычисляются эффективные модули упругости как первого, так и второго порядка.

С помощью модуля вычислены эффективные нелинейно-упругие характеристики двух видов пористых материалов, предварительно нагруженных внутренним (поровым) давлением. В качестве материалов рассмотрены медь, механические свойства которой описываются материалом Мурнагана, и резина, описываемая материалом Муни-Ривлина. Исследовалась зависимость эффективных модулей упругости первого и второго порядка от величины порового давления. Расчёты показали, что при увеличении предварительной нагрузки некоторые эффективные модули существенно меняются (в частности, эффективные модули второго порядка). Это позволяет сделать вывод о необходимости учёта предварительного нагружения гетерогенного материала при моделировании его нелинейного деформирования.

Расчёты в данной статье проведены в двумерной постановке и для предварительного нагружения в виде только внутреннего (порового) давления в пористом нелинейно-упругом материале. В дальнейшем планируется провести аналогичное моделирование в трёхмерном случае, а также обобщить результаты на случай внешней преднагрузки (к примеру, внешнего сжимающего давления) и на случай объёмной преднагрузки (к примеру, температурного расширения) для пористых и композиционных материалов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. Vol. 11. P. 357–372.
2. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // Annalen der Physik. 1889. Vol. 274. №12. P. 573–587.
3. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1929. Vol. 9. P. 49–58.
4. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1962. Vol. 10. P. 335–342.
5. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. Vol. 11. P. 127–140.
6. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М., «Мир», 1982. – 334 с.
7. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 335 с.
8. Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials // Elsevier, Amsterdam. 1999. P. 812.
9. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1965. Vol. 13. №4. P. 223–227.
10. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1965. Vol. 13. №4. P. 213–222.

11. Wu T.T. The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material // International Journal of Solids and Structures. 1966. Vol. 2. №1. P. 1-8.
12. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. Vol. 21. P. 571-574.
13. Roscoe R. The viscosity of suspensions of rigid spheres // British Journal of Applied Physics. 1952. Vol. 3. №8. P. 267-269.
14. Norris A.N. A differential scheme for the effective moduli of composites // Mechanics of Materials. 1985. Vol. 4. №1. P. 1-16.
15. Berryman J.G., Pride S.R., Wang H.F. A differential scheme for elastic properties of rocks with dry or saturated cracks // Geophysical Journal International. 2002. Vol. 151. №2. P. 597-611.
16. Dabrowski M., Schmid D.W., Podladchikov Y.Y. A two-phase composite in simple shear: Effective mechanical anisotropy development and localization potential // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2012. Vol. 117. №B8. Article ID: B08406.
17. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. - Петрозаводск: Издательство Петрозаводского государственного университета, 1993. - 600 с.
18. Needleman A. Void Growth in an Elastic-Plastic Medium // Journal of Applied Mechanics. 1972. Vol. 39. №4. P. 964-970.
19. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М., «Наука», 1984. – 352 с.
20. Milton G.W. The Theory of Composites // Cambridge University Press, Cambridge. 2002. P. 745.
21. Ponte Castañeda P., Nebozhyn M.V. Variational estimates of the self-consistent type for the effective behavior of some model nonlinear polycrystals // Proceedings of the Royal Society A. 1997. Vol. 453. P. 2715–2724.
22. Ponte Castañeda P., Willis J. R. Variational second-order estimates for nonlinear composites // Proceedings of the Royal Society A. 1999. Vol. 455. P. 1799–1811.
23. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1998. Vol. 155 №1–2. P. 181–192.
24. Tsukrov I., Kachanov M. Effective Moduli of an Anisotropic Material with Elliptical Holes of Arbitrary Orientational Distribution // International Journal of Solids and Structures. 2000. Vol. 37. №41. P. 5919-5941
25. Tsukrov I., Novak J. Effective Elastic Properties of Solids with Defects of Irregular Shapes // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39. №6. P. 1539-1555.
26. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1997. №4. С. 45-50.

27. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002. Т. 382. №4. С. 482–487.
28. Levin V., Markov M., Kanaun S. Effective field method for seismic properties of cracked rocks // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2004. Vol. 109(B8). Article ID 2003JB002795. Режим доступа: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1029/2003JB002795>
29. Kachanov M., Sevostianov I. On quantitative characterization of microstructures and effective properties // International Journal of Solids and Structures. 2005. Vol. 42. P. 309–336.
30. Шешенин С.В., Демидович П.Н., Чистяков П.В., Бахметьев С.Г. Определяющее соотношение резинокорда при трёхмерном напряжённом состоянии // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. 2010. №3. С. 32–35.
31. Шешенин С.В., Ду И. Две модели резинокордного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций, т. 27, №2, 2021. – С. 191–204.
32. Шешенин С.В., Ду И. Гомогенизация резинокордного слоя при умеренно больших деформациях // Механика композитных материалов, т. 57, №3, 2021. – С. 275–286.
33. Шешенин С.В., Ду И., Чистяков П.В., Артамонова Н.Б. Моделирование резинокордных слоев при квазистатическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета, №4, 2021. – С. 49–59.
34. Tsukrov I., Bayraktar H., Giovinazzo M., Goering J., Gross T., Fruscello M., Martinsson L. Finite element modeling to predict cure-induced microcracking in three-dimensional woven composites // International Journal of Fracture. 2011. Vol. 172. P. 209–216.
35. Yarushina V.M., Podladchikov Y.Y., Wang L.H. Model for (De)Compaction and Porosity Waves in Porous Rocks Under Shear Stresses // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2020. Vol. 125(8). Article ID e2020JB019683. Режим доступа: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2020JB019683>
36. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures. 2015. Vol. 131. P. 25–36.
37. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Shoychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Advances in Engineering Software. 2015. Vol. 86. P. 80–84.
38. Коновалов Д.А., Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник, т. 18, №3, 2017. – С. 316–329.
39. Yakovlev M.Y., Lukyanchikov I.S., Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method // Journal of Physics: Conference Series. 2019. P. 1158.

40. Yakovlev M.Ya., Bystrov I.D., Zingerman K.M., Levin V.A. Numerical simulation of the pore pressure influence on the effective mechanical properties of rocks using CAE fidesys // AIP Conf. Proc. 2022. Vol. 2509 (1): 020209. <https://doi.org/10.1063/5.0084834>
41. Yakovlev M.Ya., Yarushina V.M., Bystrov I.D., Nikitin L.S., Podladchikov Yu.Yu. Benchmarking effective moduli in porous elastoplastic materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2025. Vol. 306. ISSN 0020-7403. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2025.110854>.
42. Levin V.A., Vdovichenko I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Y., Zingerman K.M. Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case // Modelling and Simulation in Engineering. 2016. Vol. 2016. Article ID 9010576. P. 10.
43. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я., Курденкова Е.О., Немтинова Д.В. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник, т. 20, №2, 2019. – С. 528–541.
44. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 272 с.
45. Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности: цикл монографий в 5 томах / под ред. В. А. Левина. Модели и методы. Образование и развитие дефектов / В. А. Левин. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015-, 2015. — 453 с. : ил., табл.; ISBN 978-5-9221-1570-4.
46. Яковлев М.Я., Елфимов Н.С., Левин В.А. Моделирование нелинейной эффективной теплопроводности с использованием программного комплекса «Фидесис» // Чебышевский сборник, т. 25, №4, 2024. – С. 308–328.
47. Karch C. Micromechanical analysis of thermal expansion coefficients // Modeling and Numerical Simulation of Material Science. 2014. Vol. 4, № 3. P. 70–75.
48. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cae-fidesys.com/>
49. Kukushkin A.V., Konovalov D.A., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158(2). Article ID 032022.

REFERENCES

1. Hill, R. 1963, “Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 357–372.
2. Voigt, W. 1889, “Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper”, *Annalen der Physik*, vol. 274, no. 12, pp. 573–587.
3. Reuss, A. 1929, “Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 9, pp. 49–58.
4. Hashin, Z. & Shtrikman, S. 1962, “On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10, pp. 335–342.
5. Hashin, Z. & Shtrikman, S. 1963, “A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 127–140.

6. Christensen, R.M. 1982, *Mechanics of composite materials*, Wiley-Interscience, New York, 348 p.
7. Pobedrya, B.E. 1984, *Mechanics of composite materials*, Moscow University Publishing House, Moscow, 335 p.
8. Nemat-Nasser, S. & Hori, M. 1999, *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*, Elsevier, Amsterdam.
9. Budiansky, B. 1965, "On the elastic moduli of some heterogeneous materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 223–227.
10. Hill, R. 1965, "A self-consistent mechanics of composite materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
11. Wu, T.T. 1966, "The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 2, no. 1, pp. 1–8.
12. Mori, T. & Tanaka, K. 1973, "Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions", *Acta Metallurgica*, vol. 21, pp. 571–574.
13. Roscoe, R. 1952, "The viscosity of suspensions of rigid spheres", *British Journal of Applied Physics*, vol. 3, no. 8, pp. 267–269.
14. Norris, A.N. 1985, "A differential scheme for the effective moduli of composites", *Mechanics of Materials*, vol. 4, no. 1, pp. 1–16.
15. Berryman, J.G., Pride, S.R. & Wang, H.F. 2002, "A differential scheme for elastic properties of rocks with dry or saturated cracks", *Geophysical Journal International*, vol. 151, no. 2, pp. 597–611.
16. Dabrowski, M., Schmid, D.W. & Podladchikov, Y.Y. 2012, "A two-phase composite in simple shear: Effective mechanical anisotropy development and localization potential", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 117, no. B8, B08406.
17. Kanaun, S.K. & Levin, V.M. 1993, *The effective field method in the mechanics of composite materials* [Metod ehfektivnogo polya v mekhanike kompozitnykh materialov], Izdatel'stvo Petrozavodskogo Universiteta, Petrozavodsk, 600 p. [In Russian]
18. Needleman, A. 1972, "Void growth in an elastic-plastic medium", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, no. 4, pp. 964–970.
19. Bakhvalov, N.S. & Panasenko, G.P. 1984, *Averaging of processes in periodic media*, Nauka, Moscow, 352 p.
20. Milton, G.W. 2002, *The theory of composites*, Cambridge University Press, Cambridge, 745 p.
21. Ponte Castañeda, P. & Nebozhyn, M.V. 1997, "Variational estimates of the self-consistent type for the effective behavior of some model nonlinear polycrystals", *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 453, pp. 2715–2724.
22. Ponte Castañeda, P. & Willis, J.R. 1999, "Variational second-order estimates for nonlinear composites", *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 455, pp. 1799–1811.
23. Smit, R.J.M., Brekelmans, W.A.M. & Meijer, H.E.H. 1998, "Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, no. 1-2, pp. 181–192.

24. Tsukrov, I. & Kachanov, M. 2000, "Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, no. 41, pp. 5919–5941.
25. Tsukrov, I. & Novak, J. 2002, "Effective elastic properties of solids with defects of irregular shapes", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, no. 6, pp. 1539–1555.
26. Levin, V.A., Lokhin, V.V. & Zingerman, K.M. 1997, "On the method for estimating effective properties of porous solids at large strains" [Ob odnom sposobe otsenki effektivnykh kharakteristik poristyykh tel pri konechnykh deformatsiyakh], *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 4, pp. 45–50.
27. Levin, V.A. & Zingerman, K.M. 2002, "On the construction of effective constitutive relations for porous elastic materials under finite strains and their superposition", *Doklady Physics*, vol. 47, no. 1, pp. 87–91.
28. Levin, V., Markov, M. & Kanaun, S. 2004, "Effective field method for seismic properties of cracked rocks", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 109, no. B8, 2003JB002795.
29. Kachanov, M. & Sevostianov, I. 2005, "On quantitative characterization of microstructures and effective properties", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 309–336.
30. Sheshenin, S.V., Demidovich, P.N., Chistyakov, P.V. & Bakhmetyev, S.G. 2010, "Constitutive relation for rubber-cord under three-dimensional stress state", *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 65, no. 3, pp. 32–35.
31. Sheshenin, S.V. & Du, Y. 2021, "Homogenization of thin rubber-cord layers at moderate large deformations", *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstrukttsii*, vol. 27, no. 2, pp. 191–204.
32. Sheshenin, S.V. & Du, Y. 2021, "Homogenization of Rubber-Cord Layers at Moderately Large Deformations", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 57, no. 3, pp. 275–286.
33. Sheshenin, S.V., Du, Y., Chistyakov, P.V. & Artamonova, N.B. 2021, "Modeling of rubber-cord layers under quasi-static loading", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no. 4, pp. 49–59.
34. Tsukrov, I., Bayraktar, H., Giovinazzo, M., Goering, J., Gross, T., Fruscello, M. & Martinsson, L. 2011, "Finite element modeling to predict cure-induced microcracking in three-dimensional woven composites", *International Journal of Fracture*, vol. 172, pp. 209–216.
35. Yarushina, V.M., Podladchikov, Y.Y. & Wang, L.H. 2020, "Model for (de)compaction and porosity waves in porous rocks under shear stresses", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 125, no. 8, e2020JB019683.
36. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V. & Yakovlev, M.Ya. 2015, "Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains", *Composite Structures*, vol. 131, pp. 25–36.
37. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M., Shoychakov, A.M. & Yakovlev, M.Ya. 2015, "Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for", *Advances in Engineering Software*, vol. 86, pp. 80–84.
38. Konovalov, D.A. & Yakovlev, M.Y. 2017, "On the numerical estimation of effective elastic characteristics of elastomeric composites under finite strains using the spectral element method with CAE Fidesys", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 3, pp. 316–329.

39. Yakovlev, M.Y., Lukyanchikov, I.S., Levin, V.A., Vershinin, A.V. & Zingerman, K.M. 2019, "Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method", *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1158, 032021.
40. Yakovlev, M.Ya., Bystrov, I.D., Zingerman, K.M. & Levin, V.A. 2022, "Numerical simulation of the pore pressure influence on the effective mechanical properties of rocks using CAE Fidesys", *AIP Conference Proceedings*, vol. 2509, no. 1, 020209.
41. Yakovlev, M.Ya., Yarushina, V.M., Bystrov, I.D., Nikitin, L.S. & Podladchikov, Yu.Yu. 2025, "Benchmarking effective moduli in porous elastoplastic materials", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 306, 110020, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2025.110020.
42. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya. & Zingerman, K.M. 2016, "Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced plexiglas in the two-dimensional case", *Modelling and Simulation in Engineering*, vol. 2016, 9010576, doi: 10.1155/2016/9010576.
43. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Yakovlev, M.Ya., Kurdenkova, E.O. & Nemtinova, D.V. 2019, "Estimation of effective properties of periodic cellular structures using beam and shell finite elements with CAE Fidesys", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 528–541.
44. Lurie, A.I. 1990, *Nonlinear theory of elasticity*, North-Holland, Amsterdam.
45. Levin, V.A. 2015, *Nonlinear computational mechanics of strength: Models and methods. Formation and development of defects*, Fizmatlit, Moscow, 453 p., ISBN 978-5-9221-1570-4.
46. Yakovlev, M.Ya., Elfimov, N.S. & Levin, V.A. 2024, "Simulation of nonlinear effective thermal conductivity using CAE Fidesys", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 308–328.
47. Karch, C. 2014, "Micromechanical analysis of thermal expansion coefficients", *Modeling and Numerical Simulation of Material Science*, vol. 4, no. 3, pp. 70–75.
48. Fidesys LLC 2026, *Official website*, [Online] Available at: <http://cae-fidesys.com/> [Accessed 22 May 2026].
49. Kukushkin, A.V., Konovalov, D.A., Vershinin, A.V. & Levin, V.A. 2019, "Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes", *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1158, no. 2, 032022.

Получено: 05.11.2025

Принято в печать: 19.05.2026