

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-212-218

Об одной системе сравнений для многочленов от нескольких переменных

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Аннотация

В работе доказана разрешимость многомерной аддитивной системы сравнений по простому модулю для многочленов от нескольких переменных. А.А.Карацуба полностью исследовал одномерный случай, получив правильный порядок числа слагаемых для разрешимости рассматриваемой системы сравнений.

Ключевые слова: многомерная система сравнений по простому модулю.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Чубариков В. Н. Об одной системе сравнений для многочленов от нескольких переменных // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 212–218.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-212-218

On a system of comparisons for polynomials in several variables

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2020@mail.ru

Abstract

In this paper the solvability of a multidimensional additive system of congruences prime modulo for polynomials of several variables is proved. A.A.Karatsuba completely studied the one-dimensional case, getting the right order of the number of summands for solvability of the considering system of congruences.

Keywords: multivariate system of congruences modulo of prime number.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Chubarikov, V. N. 2026, “On a system of comparisons for polynomials in several variables”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 212–218.

К 80-летию со дня рождения С.М.Воронина

1. Введение

В настоящей работе изучается вопрос о разрешимости системы сравнений (1), который возникает при особом ряде в следующей многомерной аддитивной проблеме, обобщающей проблему Гильберта – Камке [1]–[19].

Пусть n, r, k — натуральные числа, p — простое число, $\mathbf{N}$ — набор натуральных чисел $N(t_1, \dots, t_r)$, $0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n$, $t_1 + \dots + t_r \geq 1$, $m = (n+1)^r$. T — число решений системы сравнений вида

$$\sum_{j=1}^k x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv N(t_1, \dots, t_r) \pmod{p}, \quad (1)$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, \quad t_1 + \dots + t_r \geq 1,$$

где неизвестные $x_{1,j}, \dots, x_{r,j}$ ($1 \leq j \leq k$) могут принимать значения из полной системы вычетов по модулю p .

Здесь мы продолжаем исследование А.А.Карацубы о разрешимости системы сравнений (1) для $r = 1$ при правильном порядке числа слагаемых k .

ТЕОРЕМА А.А.КАРАЦУБЫ. Пусть $n \geq 3, 1 \leq s_1 < \dots < s_m = n, \lambda \geq 1, p > n$ — простое число. Тогда система сравнений вида

$$\begin{cases} x_1^{s_1} + \dots + x_k^{s_1} \equiv N_1 \pmod{p^\lambda}, \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s_m} + \dots + x_k^{s_m} \equiv N_m \pmod{p^\lambda}, \end{cases}$$

разрешима при $k \geq 32mn \ln n$ и любых правых частях $N_1, \dots, N_m$.

В настоящей работе мы доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $p \geq 2nr$, $k \geq 32rnm \ln(rn)$. Тогда система сравнений (1) разрешима при любых наборах $N(t_1, \dots, t_r), 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, t_1 + \dots + t_r \geq 1$, вычетов по модулю p .

Утверждение теоремы следует из лемм 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ

ЛЕММА 1. Пусть $p \geq (3nr)^2$. Тогда при $k \geq 4m \ln(nr)$ справедливо асимптотическое равенство

$$T = p^{rk-m+1} + \theta(nr p^{r-0.5})^k \geq 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для набора A системы вычетов $a(t_1, \dots, t_r)$, $0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n$, $t_1 + \dots + t_r \geq 1$, по модулю p положим

$$S(A) = \sum_{x_1=1}^p \dots \sum_{x_r=1}^p \exp \left(2\pi i \frac{F_A(x_1, \dots, x_r)}{p} \right),$$

где

$$F_A(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1 \\ t_1 + \dots + t_r \geq 1}}^n \dots \sum_{t_r}^n a(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}.$$

Тогда находим

$$T = p^{-m+1} \sum_A S^k(A) \exp \left(-2\pi i \frac{(A, \mathbf{N})}{p} \right),$$

где суммирование по каждой переменной $a(t_1, \dots, t_r)$ набора A ведется по полной системе вычетов по модулю p и

$$(A, \mathbf{N}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \geq 1}}^n \cdots \sum_{t_r}^n a(t_1, \dots, t_r) N(t_1, \dots, t_r).$$

При $A = \bar{\mathbf{0}}$ имеем $S(A) = p^r$, а при $A \neq \bar{\mathbf{0}}$ из оценки А.Вейля получим $|S(A)| \leq nrp^{r-0,5}$. Следовательно, имеем искомое асимптотическое равенство. Поскольку

$$T = p^{r-k-m+1}(1 + \theta(nr)^k p^{-m+1-0,5k}),$$

при $k \geq 4m \ln n$ и $p \geq (3nr)^2$ находим $T \geq 1$.

ЛЕММА 2. Пусть $2nr \ln(nr) < p \leq (3nr)^2$. Тогда при $k \geq 32rnm \ln(rn)$ имеем $T \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разрешимости следующей системы сравнений

$$\sum_{j=1}^k (y_j + z_j) x_{1,j}^{t_1} \cdots x_{r,j}^{t_r} \equiv N(t_1, \dots, t_r) \pmod{p}, \quad (2)$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, \quad t_1 + \dots + t_r \geq 1,$$

где неизвестные $x_{1,j}, \dots, x_{r,j}$ ($1 \leq j \leq k$) могут принимать значения из полной системы вычетов по модулю p , а неизвестные y_j, z_j — значения от 1 до $Y = 2rn$ следует разрешимость системы сравнений (1).

Число решений T_0 системы сравнений (2) представим в виде

$$T_0 = p^{-m+1} \sum_A W^k(A) \exp \left(-2\pi i \frac{(A, \mathbf{N})}{p} \right),$$

где суммирование по каждой переменной $a(t_1, \dots, t_r)$ набора A ведется по полной системе вычетов по модулю p и

$$(A, \mathbf{N}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \geq 1}}^n \cdots \sum_{t_r}^n a(t_1, \dots, t_r) N(t_1, \dots, t_r).$$

$$W(A) = \sum_{y=1}^Y \sum_{z=1}^Y \sum_{x_1=1}^p \cdots \sum_{x_r=1}^p \exp \left(2\pi i \frac{(y+z)F_A(x_1, \dots, x_r)}{p} \right),$$

где

$$F_A(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1 \\ t_1+\dots+t_r \geq 1}}^n \cdots \sum_{t_r}^n a(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r}.$$

Имеем $T \geq T_0$. Покажем, что $T_0 \geq 1$. При $A \not\equiv \bar{\mathbf{0}} \pmod{p}$ оценим модуль суммы $W(A)$. Находим

$$|W(A)| \leq \sum_{x_1=1}^p \cdots \sum_{x_r=1}^p \left| \sum_{y=1}^Y \sum_{z=1}^Y \exp \left(2\pi i \frac{(y+z)F_A(x_1, \dots, x_r)}{p} \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\lambda=1}^p J(\lambda) \left| \sum_{y=1}^Y \exp \left(2\pi i \frac{\lambda y}{p} \right) \right|^2 \leq rnp^r Y,$$

где $J(\lambda)$ — число решений сравнения $F_A(x_1, \dots, x_r) \equiv \lambda \pmod{p}$, когда неизвестные пробегает полные системы вычетов по модулю p . Имеем $J(\lambda) \leq nrp^{r-1}$.

Отсюда получим

$$T_0 = (Y^2 p^r)^k p^{-m+1} + \theta_1 (rnp^r Y)^k, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Следовательно, при $(rnY^{-1})^k p^{m-1} \leq 0,5$ и $k > 4m \ln(nr)$ справедливо неравенство $T_0 \geq 1$. Лемма доказана.

Далее рассмотрим матрицу

$$M = (x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r}), \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, t_1 + \dots + t_r \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

(матрица M имеет $m-1$ строку и k столбцов).

ЛЕММА 3. Пусть $nr < p \leq 2nr \ln(nr)$. Тогда при $k \geq 2(m-1)nr \ln(nr)$ имеем $T \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу

$$M_1 = (x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r}), \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, t_1 + \dots + t_r \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

(матрица M имеет $m-1$ строку и $k \geq m-1$ столбцов).

Докажем, что всегда матрицу M_1 можно выбрать так, что ее ранг по модулю p будет максимален, т.е. равен $m-1$.

Оценим сверху T_0 — количество наборов $\bar{\mathbf{x}}_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{r,1}), \dots, \bar{\mathbf{x}}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{r,k})$, для которых строки матрицы M линейно зависимы по модулю p . Найдется набор коэффициентов $c(t_1, \dots, t_r) \not\equiv \bar{0} \pmod{p}$ такой, что

$$F(x_{1,j}, \dots, x_{r,j}) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \geq 1}}^n \dots \sum_{t_r=0}^n c(t_1, \dots, t_r) x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1 \leq j \leq k).$$

Сравнение $F(x_1, \dots, x_r) \equiv 0 \pmod{p}$ имеет не более nrp^{r-1} решений. Отсюда находим $T_0 \leq p^{m-1}(nrp^{r-1})^k$. Поскольку $2nr \leq p \leq nr \ln(nr)$ и $k \geq (m-1)(\ln(nr) + \ln \ln(nr)) + 1$, имеем цепочку неравенств

$$p^{m-1}(nrp^{r-1})^k \leq 0,5p^{rk}, \quad ((nr)^{-1}p)^k \geq 2p^{m-1}, \quad 2^{k-1} \geq p^{m-1}.$$

Отсюда имеем, что существует хотя бы один набор, для которого строки матрицы M линейно независимы.

Следовательно, найдется подматрица M_1 размера $(m-1) \times (m-1)$ матрицы M , определитель которой несравним с нулем по модулю p . Пусть это будут первые $m-1$ столбцов. Тогда разрешима следующая система линейных сравнений

$$\sum_{s=1}^{m-1} y_s x_{1,s}^{t_1} \dots x_{r,s}^{t_r} \equiv N(t_1, \dots, t_r) \pmod{p}, \quad (3)$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, t_1 + \dots + t_r \geq 1,$$

где неизвестные $y_1, \dots, y_{m-1}$ могут принимать значения из поленой системы вычетов по модулю p .

Далее, представляя каждое y_s , $1 \leq s \leq m-1$, в виде суммы единиц, получим оценку для числа переменных системы (1):

$$k \leq (m-1)p \leq 2(m-1)nr \ln(nr).$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. О проблемах аналитической теории чисел // Труды ноябрьской юбилейной сессии АН СССР. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 1–10.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1980. — 144 с.
3. Vinogradov I. M. A new method of estimation of trigonometrical sums // Mathematics of the USSR-Sbornik. — 1936. — Vol. 43. — P. 175–188.
4. Карацуба А. А. Об одной системе сравнений // Математические заметки. — 1976. — Т. 19, № 3. — С. 389–391.
5. Марджанишвили К. К. Об одновременном представлении чисел суммами полных первых, вторых, ..., n -х степеней // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1937. — Т. 1, № 2. — С. 609–631.
6. Марджанишвили К. К. Об одной системе уравнений в простых числах // Доклады Академии наук СССР. — 1950. — Т. 70. — С. 381–383.
7. Марджанишвили К. К. О некоторых нелинейных системах уравнений в целых числах // Математический сборник. — 1953. — Т. 33. — С. 630–675.
8. Линник Ю. В. Некоторые замечания об оценках тригонометрических сумм // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 8, № 4. — С. 3–48.
9. Архипов Г. И. Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы // Математические заметки. — 1975. — Т. 17, № 1. — С. 84–90.
10. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1976. — Т. 40, № 1. — С. 209–220.
11. Hua L.-K. On an exponential sums // Journal of the Chinese Mathematical Society. — 1940. — Vol. 2. — P. 301–312.
12. Chen J.-R. On Professor Hua's estimate on exponential sums // Acta Scientiarum Sinicarum. — 1977. — Vol. 20, No. 6. — P. 711–719.
13. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Математические заметки. — 1976. — Т. 20, № 4. — С. 589–593.
14. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1979. — Т. 43, № 5. — С. 971–1003.
15. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin: De Gruyter, 2004. — 554 p. — (De Gruyter Expositions in Mathematics; vol. 39).
16. Hua L.-K. Additive theory of prime numbers // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 1947. — Т. 22. — С. 1–179.
17. Hua L.-K. On the number of solutions of Tarry's problem // Acta Scientiarum Sinicarum. — 1953. — Vol. 1. — P. 1–76.

18. Чубариков В. Н. Об асимптотических формулах для интеграла И. М. Виноградова и его обобщений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 1981. — Т. 157. — С. 214–232.
19. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1985. — Т. 49, № 5. — С. 1031–1067.

REFERENCES

1. Vinogradov, I.M. 1933, “On problems of analytic number theory” [O problemakh analiticheskoi teorii chisel], in *Proceedings of the November Jubilee Session of the USSR Academy of Sciences*, Moscow.
2. Vinogradov, I.M. 1980, *Method of trigonometric sums in number theory* [Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel], 2nd edn, Nauka, Moscow.
3. Vinogradov, I.M. 1936, “A new method of estimation of trigonometrical sums”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 43, pp. 175–188.
4. Karatsuba, A.A. 1976, “On a system of congruences” [Ob odnoi sisteme sravnenii], *Matematicheskie Zametki*, vol. 19, no. 3, pp. 389–391.
5. Mardzhanishvili, K.K. 1937, “On the simultaneous representation of numbers by sums of full first, second, . . . , n -th powers” [Ob odnovremennom predstavlenii chisel summami polnykh pervykh, vtorykh, . . . , n -kh stepenei], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 1, no. 2, pp. 609–631.
6. Mardzhanishvili, K.K. 1950, “On a system of equations in prime numbers” [Ob odnoi sisteme uravnenii v prostykh chislakh], *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 70, pp. 381–383.
7. Mardzhanishvili, K.K. 1953, “On some nonlinear systems of equations in integers” [O nekotorykh nelineinykh sistemakh uravnenii v tselykh chislakh], *Matematicheskii Sbornik*, vol. 33, pp. 630–675.
8. Linnik, Yu.V. 1953, “Some remarks on estimates of trigonometric sums” [Nekotorye zamechaniya ob otsenkakh trigonometricheskikh summ], *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 33, pp. 630–675.
9. Arkhipov, G.I. 1975, “Mean value theorem for the modulus of a multiple trigonometric sum” [Teorema o srednem znachenii modulya kratnoi trigonometricheskoi summy], *Matematicheskie Zametki*, vol. 17, pp. 84–90.
10. Arkhipov, G.I. & Chubarikov, V.N. 1976, “Multiple trigonometric sums” [Kratnye trigonometricheskije summy], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 40, no. 1, pp. 209–220.
11. Hua, L.-K. 1940, “On an exponential sums”, *Journal of the Chinese Mathematical Society*, vol. 2, pp. 301–312.
12. Chen, J.-R. 1977, “On Professor Hua’s estimate on exponential sums”, *Acta Scientiarum Sinica*, vol. 20, no. 6, pp. 711–719.
13. Chubarikov, V.N. 1976, “On multiple rational trigonometric sums and multiple integrals” [O kratnykh ratsionalnykh trigonometricheskikh summakh i kratnykh integralakh], *Matematicheskie Zametki*, vol. 20, pp. 589–593.

14. Arkhipov, G.I., Karatsuba, A.A. & Chubarikov, V.N. 1979, “Trigonometric integrals” [Trigonometricheskie integraly], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 43, no. 5, pp. 971–1003.
15. Arkhipov, G.I., Chubarikov, V.N. & Karatsuba, A.A. 2004, *Trigonometric sums in number theory and analysis*, De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 39, Walter de Gruyter, Berlin – New York.
16. Hua, L.-K. 1947, “Additive theory of prime numbers”, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, vol. 22, pp. 1–179.
17. Hua, L.-K. 1953, “On the number of solutions of Tarry’s problem”, *Acta Scientiarum Sinica*, vol. 1, pp. 1–76.
18. Chubarikov, V.N. 1981, “On asymptotic formulas for the I.M. Vinogradov integral and its generalizations” [Ob asimptoticheskikh formulakh dlya integrala I.M. Vinogradova i ego obobshchenii], *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, vol. 157, pp. 214–232.
19. Chubarikov, V.N. 1985, “Estimates of multiple trigonometric sums with prime numbers” [Otsenki kratnykh trigonometricheskikh summ s prostymi chislami], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 49, no. 5, pp. 1031–1067.

Получено: 05.02.2026

Принято в печать: 19.05.2026