

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511.36

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-203-211

Глобально алгебраически независимые полиадические числа

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (г. Москва).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Кроме стандартного канонического представления полиадического числа

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n$$

можно рассматривать ряды другого вида, с помощью которых можно представить любое полиадическое число. Пусть p_n обозначает n -е простое число. Положим

$$q_0 = 1, q_1 = 2, q_2 = 2 \cdot 3^2, \dots, q_n = q_{n-1} \cdot p_1 \dots p_{n-1} p_n^n,$$

$$Q(n) = q_0 q_1 \dots q_n = (p_1 \dots p_n)^n.$$

Тогда любое полиадическое число α можно представить в виде

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q(n), b_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq b_n \leq q_{n+1} - 1.$$

Это представление позволяет достаточно просто получать примеры глобально алгебраически независимых полиадических чисел.

Ключевые слова: полиадическое число, полиадическое число Лиувилля.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Чирский В. Г. Глобально алгебраически независимые полиадические числа // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 203–211.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511.36

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-203-211

Globally algebraically independent polyadic numbers

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigor'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University; Ranepa (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

Besides the standard canonical representation of a polyadic number

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n$$

one can consider series of some other type, representing polyadic numbers. Let p_n be the n -th prime number. Let

$$q_0 = 1, q_1 = 2, q_2 = 2 \cdot 3^2, \dots, q_n = q_{n-1} \cdot p_1 \dots p_{n-1} p_n^n,$$

$$Q(n) = q_0 q_1 \dots q_n = (p_1 \dots p_n)^n.$$

Then any polyadic number α can be represented as

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q(n), b_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq b_n \leq q_{n+1} - 1.$$

This representation allows to obtain examples of globally algebraically independent polyadic numbers simply enough.

Keywords: polyadic number, polyadic Liouville number.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Chirskii, V. G. 2026, "Globally algebraically independent polyadic numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 203–211.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Полной системой окрестностей 0 в кольце целых чисел является множество идеалов (m) этого кольца. В этой топологии операции сложения и умножения чисел непрерывны [1],[2]. Последовательность целых чисел $a_1, \dots, a_n$ называется нулевой последовательностью, если её предел в смысле заданной топологии равен нулю. Естественным образом вводятся понятия фундаментальной последовательности и понятие эквивалентности фундаментальных последовательностей. Полиадическим числом называется класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей [1]. Полиадические числа образуют кольцо с естественными операциями сложения и умножения.

Напомним, что каноническое разложение полиадического числа α имеет вид

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Разумеется, любой ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях p -адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Напомним, что кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p -адических чисел по всем простым числам p . Элементы α этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых p -адических чисел обозначаем $\alpha^{(p)}$. Операции сложения и умножения этих векторов, представляющих полиадические числа α и β , выполняются покомпонентно, т.е. $(\alpha + \beta)^{(p)} = \alpha^{(p)} + \beta^{(p)}$, $(\alpha \cdot \beta)^{(p)} = \alpha^{(p)} \cdot \beta^{(p)}$.

Это позволяет говорить об алгебраической зависимости полиадических чисел. Полиадические числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ алгебраически зависимы, если существует $P(x_1, \dots, x_m)$ - ненулевой многочлен с целыми коэффициентами такой, что $P(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_m^{(p)}) = 0$ в любом поле $\mathbb{Q}_p$.

Полиадические числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ глобально алгебраически независимы, если для любого ненулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами в любом поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$P(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_m^{(p)}) \neq 0.$$

2. Основные результаты

В работе [3] установлено достаточное условие глобальной алгебраической независимости полиадических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Для действительных чисел такое условие установлено в работе Адамса [4]

ТЕОРЕМА (ТЕОРЕМА 2, [3]) Пусть p - простое число. Пусть

$$\alpha_i \in \mathbb{Z}_p, A_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m.$$

Пусть $P(x_1, \dots, x_m)$ - ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, степени которого по переменным $x_i, i = 1, \dots, m$ равны d_i . Тогда если

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0,$$

то либо для некоторой постоянной C_1 выполняется неравенство

$$\max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - A_i|_p > C_2 |A_1|^{-d_1} \dots |A_m|^{-d_m},$$

либо выполняется равенство

$$P(A_1, \dots, A_m) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ (СЛЕДСТВИЕ [3]) Если для любого ненулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами, степени которого по переменным $x_i, i = 1, \dots, m$ равны d_i и любой постоянной C_2 существуют $A_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m$ такие, что

$$|\alpha_i - A_i|_p < C_2 |A_1|^{-d_1} \dots |A_m|^{-d_m}, i = 1, \dots, m$$

и

$$P(A_1, \dots, A_m) \neq 0,$$

то $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — алгебраически независимые элементы $\mathbb{Z}_p$.

ТЕОРЕМА (ТЕОРЕМА 3, [3]). Пусть

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n}, a_{i,n} \in \mathbb{N}, A_{i,N} = \sum_{n=0}^N a_{i,n}, r_i = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{i,n}.$$

Пусть для простого числа p при $N \geq N_p$, где N_p — натуральное число, зависящее от p , выполнены неравенства

$$|r_{i,N}|_p < (\max_{i=1, \dots, m} A_{i,N})^{-\gamma_p(N)}, i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $\gamma_p(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Кроме того, пусть

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln |r_{i,N}|_p}{\ln |r_{i+1,N}|_p} = 0, i = 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Тогда ряды $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$.

СЛЕДСТВИЕ (СЛЕДСТВИЕ [3]). Если условия теоремы 3 выполнены для любого простого числа p то ряды $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ глобально алгебраически независимые полиадические числа.

В работах [3], [4] приведены примеры применения теоремы 3 к явно заданной совокупности полиадических чисел вида

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} (n_{i,k})!,$$

где $n_{i,k}, i = 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots$ — натуральные числа, удовлетворяющие совокупности весьма громоздких условий.

Цель этой работы — предложить другой вариант представления полиадических чисел, с помощью которого удастся получить примеры глобально алгебраически независимых полиадических чисел.

ЛЕММА. Пусть

$$q_0 = 1, q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots$$

натуральные числа такие, что для любого простого числа p число $Q(n)$, определённое равенством

$$Q(n) = q_0 q_1 \dots q_n$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q(n)|_p = 0.$$

Тогда любое полиадическое число α можно представить в виде

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q(n), b_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq b_n \leq q_{n+1} - 1.$$

Доказательство леммы.

Из условия сразу следует сходимость рассматриваемого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n Q(n), b_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq b_n \leq q_{n+1} - 1.$$

в любом кольце $\mathbb{Z}_p$, поэтому он представляет собой полиадическое число. Обратно, пусть α — заданное полиадическое число. Рассмотрим остатки от деления α на числа $Q(n+1)$ и $Q(n)$.

Разность этих остатков - целое число, которое меньше, чем $Q(n+1)$ и делится без остатка на число $Q(n)$. Поэтому оно равно $b_n Q(n)$, где $0 \leq b_n \leq q_{n+1} - 1$. Полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n Q(n)$ сходится к $\alpha^{(p)}$ в любом кольце $\mathbb{Z}_p$.

Пусть p_n обозначает n -е простое число. Положим

$$q_0 = 1, q_1 = 2, q_2 = 2 \cdot 3^2, \dots, q_n = q_{n-1} \cdot p_1 \dots p_{n-1} p_n^n,$$

$$Q(n) = q_0 q_1 \dots q_n = (p_1 \dots p_n)^n. \quad (3)$$

Тогда, ввиду леммы, любое полиадическое число α можно представить в виде

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q(n), b_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq b_n \leq q_{n+1} - 1.$$

Лемма доказана.

Перейдём к вопросу глобальной алгебраической независимости. Рассмотрим полиадические числа

$$\alpha_i = \sum_{n=1}^{\infty} (Q(n))^{\tau_i(n)}, \tau_i(n) \in \mathbb{N} \quad (4)$$

и пусть $\tau_i(n) \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$ и для любого n выполнены неравенства

$$\tau_1(n) < \tau_2(n) < \dots < \tau_m(n) < \tau_1(n+1).$$

Обозначим

$$A_{i,N} = \sum_{n=1}^N (Q(n))^{\tau_i(n)}, \quad (5)$$

$$r_{i,N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} (Q(n))^{\tau_i(n)}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_i(n)}{\tau_{i+1}(n)} = 0, i = 1, \dots, m-1, \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_1(n+1)}{\tau_m(n) n \ln n} = +\infty. \quad (8)$$

Тогда для любого простого числа p ряды (4) сходятся к алгебраически независимым элементам $\mathbb{Z}_p$. Иными словами, полиадические числа (4) глобально алгебраически независимы.

Доказательство. Условие (2) теоремы 3 [3], то есть

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln |r_{i,N}|_p}{\ln |r_{i+1,N}|_p} = 0, i = 1, \dots, m-1$$

сразу следует из условия (7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_i(n)}{\tau_{i+1}(n)} = 0, i = 1, \dots, m-1$$

так как, ввиду определения (3) величины $Q(n)$, если $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$, то

$$|r_{i,N}|_p = p^{-(N+1)\tau_i(N+1)}.$$

Рассмотрим условие (1) теоремы 3 [3], т.е.

$$|r_{i,N}|_p < (\max_{i=1,\dots,m} A_{i,N})^{-\gamma_p(N)}, i = 1, \dots, m.$$

Заметим, что ввиду (6) выполнены неравенства

$$|r_{i,N}|_p = p^{-(N+1)\tau_i(N+1)} < 2^{-(N+1)\tau_1(N+1)}, i = 1, \dots, m.$$

Для чисел $A_{i,N}$ (5) очевидны оценки

$$|A_{i,N}| < 2(Q(N))^{\tau_i(N)}, i = 1, \dots, m.$$

Поэтому

$$\max_{i=1,\dots,m} |A_{i,N}| < 2(Q(N))^{\tau_m(N)}.$$

Оценим величину $Q(N)$.

$$Q(N) = (p_1 \dots p_N)^N = \exp(N \sum_{n=1}^N \ln p_n).$$

Используем известное равенство

$$\sum_{p \leq x} \ln p = x + O(x \exp(-C_1) \sqrt{\ln x})$$

и следующее из него неравенство

$$\sum_{p \leq x} \ln p \leq 2x,$$

справедливое для достаточно больших x . Кроме того, используем известную оценку

$$p_N \leq C_2 N \ln N.$$

Это даёт неравенства

$$\sum_{n=1}^N \ln p_n = \sum_{p \leq p_N} \ln p \leq 2p_N \leq C_3 N \ln N.$$

Поэтому

$$Q(N) \leq \exp(C_3 N^2 \ln N)$$

и

$$\max_{i=1,\dots,m} |A_{i,N}| < 2(Q(N))^{\tau_m(N)} < \exp(C_3 N^2 \ln N \tau_m(N)).$$

Таким образом, для проверки справедливости неравенства (1) достаточно доказать, что

$$2^{-(N+1)\tau_1(N+1)} < \exp(-\gamma_p(N) C_3 N^2 \ln N \tau_m(N)),$$

а это неравенство следует из неравенства

$$(N+1)\tau_1(N+1) > \gamma_p(N) C_3 N^2 \ln N \tau_m(N),$$

при условии, что $\gamma_p(N) \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$. Последнее неравенство следует из условия (8), если положить

$$\frac{\tau_1(N+1)}{\tau_m(N) N \ln N} = (\gamma_p(N))^2.$$

При этом $\gamma_p(N) \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$, условия теоремы 3,[3] проверены и теорема доказана.

Приведём пример соответствующего теореме выбора функций $\tau_i(n), i = 1, \dots, m$. Положим

$$\tau_i(n) = [\exp((1 + \frac{i-1}{m}) \exp n)], i = 1, \dots, m.$$

Тогда, если $i < j$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\tau_i(n)}{\tau_j(n)} = \frac{[\exp((1 + \frac{i-1}{m}) \exp n)]}{[\exp((1 + \frac{j-1}{m}) \exp n)]} \rightarrow 0.$$

Кроме того, при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1(N+1)}{\tau_m(N)N \ln N} &= \frac{[\exp(\exp(N+1))]}{[\exp((1 + \frac{m-1}{m}) \exp N)]N \ln N} \\ &\geq \frac{\exp(\exp(N+1))}{\exp((1 + \frac{m-1}{m}) \exp(N))2N \ln N} = \frac{\exp((e-1 - \frac{m-1}{m}) \exp N)}{2N \ln N} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Все условия теоремы проверены,

$$\alpha_i = \sum_{n=1}^{\infty} (Q(n))^{[\exp((1 + \frac{i-1}{m}) \exp n)]}, i = 1, \dots, m-$$

глобально алгебраически независимые полиадические числа.

3. Заключение

Алгебраическая независимость чисел Лиувилля является актуальной задачей. См., например, [6]. Полученные в работе примеры глобально алгебраически независимых полиадических чисел значительно проще, чем примеры из работ [3],[5]. Их можно использовать в качестве коэффициентов обобщённых гипергеометрических рядов по аналогии с работами [7],[8]. Можно рассматривать значения F -рядов в этих точках, как в работах [9],[10]. Можно получать оценки многочленов от таких чисел, как в [11]. Возможно использование рядов в задачах, ориентированных на практические приложения [12].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.-М.: «Наука».-1971.-416 с.
2. Понтрягин П. С. Непрерывные группы.-М.: «Наука».-1984.-520 с.
3. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 3.-с. 245 – 255 .
4. Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers.//J.Pure and Appl. Algebra.-1978.-13.-pp.41-47.
5. Чирский В. Г. О полиадических числах Лиувилля.//Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 5.-с. 243 – 251 .
6. Waldschmidt M. Independance algebrigue de nombres de Liouville.//Lect.Notes Math.-1990.-1415.-pp.225-235.

7. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром. // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2020.- т.494, с. 69-70.(Английский перевод Chiskii V. G., Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter. Dokl. Math. 2020.-v.102,no.2. pp.412-413.)
8. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром. //Чебышевский сборник.- 2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 304 – 312.
9. Юденкова Е. Ю. Арифметические свойства рядов некоторых классов в полиадической лиувиллевой точке. //Чебышевский сборник.- 2021.- т. 22.- вып. 2.-с. 536 – 542.
10. Юденкова Е. Ю.Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках. //Чебышевский сборник.- 2021.- т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346.
11. Крупицын Е. С.Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник .- 2019.- т. 20.- вып. 2.- с. 374 – 382.
12. Матвеев В. Ю., Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник .- 2019.- т. 20.- вып. 2.- с. 383 – 390.

REFERENCES

1. Postnikov, A. G.1971.“ Introduction to the analytic number theory”, *Nauka*. 416pp. (Russian).
2. Pontryagin, L. S.1984.“ Continious groups”, *Nauka*. 520pp. (Russian).
3. Chiskii V. G.,2021.“ Polyadic Liouvillean numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245-255.
4. Adams. W.1990.“On the algebraic independence of certain Liouville numbers”,*J.Pure and Appl.Algebra.*, Vol, 13, pp.41-47.
5. Chiskii V. G.,2021.“On Polyadic Liouvillean numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, no.5, pp.243-251.
6. Waldschmidt. M.1990.“Independance algebrigue de nombres de Liouville”,*Lect. Notes Math.*, Vol, 1415, pp.225-235.
7. Chiskii V. G.,2020. “Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter”, *Dokl. Math.*, Vol.102,no.2. pp.412-413.
8. Chiskii V. G.,2021.“ Arithmetic properties of values at polyadic Liouvillean point of Euler-type series with polyadic Liouvillean parameter”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.304-312.
9. Yudenkova E. Yu.2021“ Arithmetic properties of series of certain classes at polyadic Liouvillean point”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.536-542
10. Yudenkova E. Yu.2021.“ Infinite linear and algebraic independence of values of F-series at polyadic Liouvillean point”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.334-346.
11. Krupitsin E. S. 2019. “ Arithmetic properties of series of certain classes”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.374-382.

-
12. Matveev V. Yu. 2019. “ Properties of elements of direct products of fields”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.383-390.

Получено: 05.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026