

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-194-202

**Распределение целых точек на двуполостных гиперболоидах, соответствующих матрицам второго порядка с заданным чётным следом**

У. М. Пачев, З. С. Гериева, М. М. Исакова

**Пачев Урусби Мухамедович** — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Гериева Зухра Султановна** — аспирант, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

*e-mail: zuhra.geril17@gmail.com*

**Исакова Мариана Малиловна** — кандидат физико-математических наук, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (г. Нальчик).

*e-mail: isakova2206@mail.ru*

**Аннотация**

В работе с помощью дискретного эргодического метода Ю. В. Линника (см. [1]) исследуется вопрос об асимптотике целых точек на двуполостном гиперболоиде, соответствующих матрицам второго порядка с заданным чётным следом  $2t$  и с растущим определителем  $t \rightarrow \infty$  (частный случай нулевого следа относится к ранее проведённым исследованиям (см. [1]–[4]).

*Ключевые слова:* дискретный эргодический метод, целая точка, двуполостный гиперболоид, след и норма матрицы второго порядка, теорема Гамильтона-Кэли

*Библиография:* 11 названий.

**Для цитирования:**

Пачев У. М., Гериева З. С., Исакова М. М. Распределение целых точек на двуполостных гиперболоидах, соответствующих матрицам второго порядка с заданным чётным следом // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 194–202.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-194-202

**Distribution of integer points on two-sheeted hyperboloids corresponding to second-order matrices with a given even trace**

U. M. Pachev, Z. S. Gerieva, M. M. Isakova

**Pachev Urusbi Mukhamedovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

*e-mail: urusbi@rambler.ru*

**Gerieva Zuhra Sultanovna** — postgraduate student, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

*e-mail: zuhra.geril17@gmail.com*

**Isakova Mariana Malilovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Berbekov Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

*e-mail: isakova2206@mail.ru*

**Abstract**

In this paper, using Yu. V. Linnik's discrete ergodic method, we investigate the asymptotic behavior of integer points on a two-sheeted hyperboloid corresponding to second-order matrices with a given even trace  $2t$  and a growing determinant  $m \rightarrow \infty$ . The special case of a matrix with a zero trace relates to previously conducted studies (see [1]–[4]).

**Keywords:** discrete ergodic method, integer point, two-sheeted hyperboloid, trace and norm of a second-order matrix, Hamilton-Cayley theorem

**Bibliography:** 11 titles.

**For citation:**

Pachev, U. M., Gerieva, Z. S., Isakova, M. M. 2026, "Distribution of integer points on two-sheeted hyperboloids corresponding to second-order matrices with a given even trace", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 194–202.

**1. Введение**

В 1940 г. Ю.В. Линником (см. [5]) был разработан оригинальный аналитико-алгебраический метод, названный в дальнейшем дискретным эргодическим методом (далее ДЭМ), использующим дискретные аналоги эргодических теорем из статистической физики и предназначенный для решения вопросов о целочисленном представлении чисел тернарными квадратичными формами. Существовавший до этого круговой метод Харди-Литтлвуда (см. [6]) оказался неприменимым к рассматриваемому случаю тернарных квадратичных форм. При построении своего метода Ю.В. Линник исходил из исследований Б.А. Венкова [7] по теории поворотов кватернионов, имеющей связь с теорией представлений чисел положительными тернарными квадратичными формами.

Подводя некоторый итог исследований по ДЭМ, Ю.В. Линник изложил этот метод в своей монографии [1].

В рассматриваемом нами случае применения ДЭМ диофантово уравнение задаёт двуполостный гиперboloид

$$x_1 x_3 - (x_2 - t)^2 = m - t^2,$$

целые точки которого сопоставлены целым матрицам второго порядка с заданным чётным следом  $2t$ , где  $m \rightarrow \infty$  (случай нулевого следа  $t = 0$  относится к ранее проведённым исследованиям (см. [1]–[3]).

Предварительное сообщение, относящееся к асимптотике целых матриц второго порядка с чётным следом, было дано в [8]. В настоящей работе предлагается дальнейшее развитие, начатого в [8] исследования, связанного с условием чётности следа используемых матриц второго порядка при применении к асимптотическому распределению целых точек на соответствующем двуполостном гиперboloиде.

## 2. Вспомогательные факты из арифметики матриц второго порядка

Следующий вспомогательный результат представляет собой матричный аналог основной теоремы арифметики о единственности разложения на простые множители.

ЛЕММА 1. 1) Пусть  $A$  — невырожденная целая матрица второго порядка; его норма (определитель)  $N(A) = b \cdot c$ , где  $b, c \in \mathbb{Z}$ . Тогда найдутся матрицы  $B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ , что  $A = B \cdot C$ ,  $N(B) = b$ ,  $N(C) = c$ .

2) Если при этом матрица  $A$  примитивна  $(\bmod c)$ , то указанное представление единственно с точностью до ассоциированности, т. е. если

$$A = B \cdot C = B_1 \cdot C_1, \quad N(C_1) = N(C) = c,$$

то найдётся целая матрица  $E$ ,  $N(E) = 1$ , для которой

$$C_1 = EC, \quad B_1 = BE^{-1} = B\bar{E},$$

где  $\bar{E}$  — матрица сопряжения  $E$ .

Доказательство см. [9].

Заметим, что лемма 1 допускает и другой вариант формулировки, показывающий, что примитивная невырожденная матрица  $A$  разлагается в произведение простых матриц  $P_1, \dots, P_l$ , т. е. матриц простых норм  $N(P_i) = p_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) однозначно с точностью до ассоциированности при заданном порядке разложения нормы

$$N(A) = p_1 \cdot \dots \cdot p_l,$$

$$A = P_1 \cdot \dots \cdot P_l, \quad N(P_i) = p_i, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Именно такая формулировка через каноническое разложение  $N(A)$  используется при построении теории поворотов вектор-матриц второго порядка.

Другой вспомогательный результат относится к теории поворотов целых вектор-матриц второго порядка.

ЛЕММА 2. Пусть  $L(t)$  и  $L'(t)$  — примитивные вектор-матрицы, такие что

$$L(t) = \begin{pmatrix} x_2 - t & x_1 \\ -x_3 & t - x_2 \end{pmatrix}, \quad L'(t) = \begin{pmatrix} x'_2 - t & x'_1 \\ -x'_3 & t - x'_2 \end{pmatrix} -$$

примитивные вектор-матрицы нормы  $m - t^2 \neq 0$  и пусть  $W$  — примитивная матрица, для которой

$$WL(t)W^{-1} = L'(t).$$

Тогда найдётся целое число  $v$  и целая матрица  $U$ , для которых

$$v + L(t) = UW.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из преобразования подобия  $WL(t)W^{-1} = L'(t)$  следует, что  $WL(t) = L'(t)W$ , откуда получаем сравнение

$$WL(t) = L'(t)W \equiv O(\text{mod}_r W)$$

(по определению сравнимости целых матриц второго порядка справа по модулю  $W$ ).

Так как  $WI = IW \equiv O(\text{mod}_r W)$ , где  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , то доказательство следует из того, что матрицы  $L(t)$  и  $L'(t)$  имеют нулевой след.

Лемма 2 доказана.  $\square$

Лемма 1 и 2 вместе позволяют строить потоки вектор-матриц вида  $L(t)$  нормы  $m - t^2$ , цепочки которых будут длины порядка  $\ln(m - t^2)$ ; здесь  $m - t^2 > 0$ . В случае кватернионов теория поворотов была построена Б.А. Венковым (см. [7]). В дальнейшем теория поворотов была перенесена на матрицы второго порядка (см. [9]).

### 3. Основные результаты о матрицах с чётным следом и точках соответствующего гиперboloида

В связи с применениями ДЭМ к вопросу об асимптотическом распределении целых точек на гиперboloидах Ю.В. Линником [1] и Б.Ф. Скубенко [10] (см. также [2]–[4], [9]) были использованы матрицы второго порядка с нулевым следом.

Обобщая постановку такого вопроса, мы будем рассматривать целые матрицы второго порядка  $M \in M_2(\mathbb{Z})$  определителя  $m \rightarrow \infty$  с любым заданным чётным следом  $2t$ . При этом как в случае матриц с нулевым следом, мы предполагаем, что векторные части матрицы  $M$  принадлежат к заданной области на соответствующем двуполостном гиперboloиде и сравнимы с заданной вектор-матрице  $L_0$  по данному модулю  $g$ .

В силу теоремы Гамильтона-Кэли из теории матриц (см. [11]) матрица  $M \in M_2(\mathbb{Q})$  над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел удовлетворяет квадратному матричному уравнению

$$M^2 - (Tr M)M + N(M) = 0, \quad (1)$$

где  $Tr(M)$  — след матрицы  $M$ ;  $N(M) = \det M$ ,  $O$  — нулевая матрица.

Как известно, любую матрицу  $M \in M_2(\mathbb{Q})$  над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел можно единственным образом представить в виде суммы скалярной части, равной  $\frac{1}{2}Tr(M)$  и векторной части  $Ve(M)$ , т. е.

$$M = \frac{1}{2}Tr(M) + Ve(M).$$

Если  $Tr(M) = 2t$  ( $t$  — целое число) и  $N(M) = m$ , то уравнение (1) примет вид:

$$M^2 - 2tM + m = 0,$$

откуда имеем, что

$$(M - t)^2 = t^2 - m. \quad (2)$$

Соотношение (2) можно вывести и следующим образом. Для этого воспользуемся понятием сопряжённой матрицы, а именно для матрицы  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  сопряжённой называется матрица

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{см. [9]}). \text{ Имеем}$$

$$M\overline{M} = \overline{M}M = \det M = N(M) \quad \text{и} \quad M + \overline{M} = Tr(M).$$

Возьмём теперь в равенстве (1) вместо  $M$  матрицу  $M - t$ .

Тогда

$$\begin{aligned} N(M - t) &= (M - t) \overline{(M - t)} = (M - t) (\overline{M} - t) = \\ &= N(M) - t \cdot 2t + t^2 = N(M) - t^2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $(M - t)^2 = t^2 - m$ .

В силу той же Теоремы Гамильтона-Кэли из (2) следует, что  $M - t$  есть вектор-матрица, т. е.  $Tr(M - t) = 0$ , причём  $N(M - t) = t^2 - m$ .

Но как известно, подобные матрицы имеют один и тот же след, что очень важно в теории поворотов вектор-матриц.

При применении ДЭМ это свойство позволяет строить потоки целых вектор-матриц второго порядка с заданным чётным следом.

Обозначим  $L(t) = M - t$ . Ясно, что  $Tr(L(t)) = 0$  и значит,

$$M - t = \begin{pmatrix} x_2 - t & -x_1 \\ x_3 & t - x_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

причём такое представление единственно (см. [9]).

Тогда из (3) имеем:

$$N(M - t) = x_1 x_3 - (x_2 - t)^2 \quad (4)$$

Теперь из (2) и (4) следует что

$$x_1 x_3 - (x_2 - t)^2 = m - t^2. \quad (5)$$

При  $t = 0$  из (5) получается уравнение простейшего двуполостного гиперboloида  $x_1 x_3 - x_2^2 = m$ , исследованное Ю.В. Линником [1].

Как и в случае матриц с нулевым следом (см. напр. [1]) мы сопоставляем вектор-матрице

$$L(t) = \begin{pmatrix} x_2 - t & -x_1 \\ x_3 & t - x_2 \end{pmatrix}$$

положительную приведённую бинарную квадратичную форму

$$\varphi(x, y) = x_1 x^2 + 2(x_2 - t)xy + x_3 y^2$$

определителя  $m - t^2$  и с фундаментальной областью приведения

$$2|x_2 - t| < x_1 < x_3,$$

либо

$$0 \leq 2|x_2 - t| < x_1 = x_3$$

либо

$$0 < 2|x_2 - t| = x_1 \leq x_3.$$

Опираясь теперь на теоремы 3.1 и 3.2 работы [3] получаем следующие новые результаты.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $m, t$  — целые числа, причём  $t$  чётно с условием  $m - t^2 > 0$ ;  $Q$  — целая примитивная матрица нечётной нормы  $q > 1$ , взаимно простой с  $m - t^2$ ,  $u$  — целое число, для которого

$$u^2 \equiv t^2 - m \pmod{q}.$$

Пусть  $g$  — нечётное число, взаимно простое с  $q \cdot (m - t^2)$ ;  $L_0$  — целая вектор-матрица с условием

$$N(L_0) \equiv m - t^2 \pmod{g}.$$

Пусть  $\Lambda_{m-t^2}$  — ограниченная квадратируемая область на гиперboloиде

$$f_t = x_1 x_3 - (x_2 - t)^2 = m - t^2,$$

которая из начала координат видна под  $f_t$  — гиперbолическим телесным углом  $\lambda > 0$ .

Обозначим через  $h(\Lambda_{m-t^2}; g, L_0; Q, u)$  число всех целых собственно примитивных вектор-матриц  $L$  нормы  $m - t^2$ , для которых

$$L \in \Lambda_{m-t^2}, \quad L \equiv L_0 \pmod{q}, \quad Q \setminus (u + L).$$

Тогда при  $m \rightarrow \infty$ , фиксированной формы области  $\Lambda_{m-t^2}$  и заданных  $q$  и  $g$

$$h(\Lambda_{m-t^2}; g, L_0; Q, u) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g, m - t^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_0(q)} h(t^2 - m),$$

где  $\lambda_0$  есть  $f_t$  — гиперbолический телесный угол области приведения

$$2|x_2 - t| \leq x_1 \leq x_3;$$

$$\rho(g, m - t^2) = g^2 \prod_{p|g} \left( 1 + \frac{\left( \frac{t^2 - m}{p} \right)}{p} \right) \quad - \text{число}$$

различных решений сравнения

$$x_1 x_3 - (x_2 - t)^2 \equiv m - t^2 \pmod{g};$$

$$\sigma_0(q) = q \prod_{p|q} \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \quad - \text{число}$$

неассоциированных справа примитивных матриц нормы  $q$ ;  $h(t^2 - m)$  — число классов целочисленных собственно примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя  $m - t^2$ ;  $\left( \frac{t^2 - m}{p} \right)$  — символ Лежандра;  $\sim$  — символ асимптотической эквивалентности.

Из теоремы 1 в сочетании с леммой 1, представляющей собой матричный аналог основной теоремы арифметики матриц второго порядка, получаем следующий результат.

**СЛЕДСТВИЕ.** Пусть  $Q = Q_1 \cdot Q_2$ , где  $Q_1$  и  $Q_2$  — целые матрицы. В обозначениях теоремы 1 пусть  $h(\Lambda_{m-t^2}; g, L_0; Q_1, Q_2, u)$  — число всех собственно примитивных вектор-матриц  $L$  нормы  $m - t^2$  с условиями  $L \in \Lambda_{m-t^2}$ ,  $L \equiv L_0 \pmod{g}$ ,  $(u + L) / Q_1, Q_2 \setminus (u + L)$ .

Тогда в условиях теоремы 1

$$h(\Lambda_{m-t^2}; g, L_0, Q_1, Q_2, u) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g, m - t^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_0(q)} h(t^2 - m),$$

где  $q = N(Q) = N(Q_1) \cdot N(Q_2)$ .

Доказательство опирается на рассуждения [3].

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $m, t$  — целые числа, причём  $m - t^2 > 0$ ;  $g$  — нечётное число, взаимно простое с числом  $m - t^2$ ;  $b_1, b_2, b_3$  — целые числа, удовлетворяющие сравнению

$$m - t^2 \equiv b_1 b_3 - b_2^2 \pmod{g}.$$

Пусть  $\Lambda_{m-t^2}$  — ограниченная квадратируемая область на поверхности

$$x_1 x_3 - (x_2 - t)^2 = m - t^2, \quad x_1 > 0,$$

которая из начала координат видна под  $f_t$  — гиперболическим телесным углом  $\lambda(\Lambda_{m-t^2}) = \lambda > 0$  области приведения положительных бинарных квадратичных форм определителя  $m - t^2$ .

Обозначим через  $h(\Lambda_{m-t^2}; g, b_1, b_2, b_3)$  — число всех целых собственно примитивных точек  $(x_1, x_2, x_3)$ ;  $\text{НОД}(x_1, 2x_2, x_3) = 1$  с условиями

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{m-t^2}, \quad (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}.$$

Пусть  $\left(\frac{t^2-m}{q}\right) = 1$ . Тогда при  $m \rightarrow \infty$

$$h(\Lambda_{m-t^2}; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{g^2 \prod_{p|q} \left(1 + \frac{\left(\frac{t^2-m}{p}\right)}{p}\right)} \cdot h(t^2 - m),$$

где  $\lambda_0$  — есть  $f_t$  — гиперболический телесный угол области приведения

$$2|x_2 - t| \leq x_1 \leq x_3$$

положительной бинарной квадратичной формы

$$\varphi(x, y) = x_1 x^2 + 2(x_2 - t)xy + x_2 y^2$$

определяет  $m - t^2 > 0$ ,  $\lambda$  — телесный угол области  $\Lambda_{m-t^2}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть  $q \nmid g$ . В силу условия  $\left(\frac{t^2-m}{q}\right) = 1$  найдётся целое число  $u$ , для которого  $u^2 + m - t^2 \equiv 0 \pmod{q}$ .

Пусть  $L_0 = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix}$ ;  $Q_1, \dots, Q_{\sigma_0(q)}$  — все неассоциированные справа примитивные матрицы нормы  $q$ . Тогда в силу леммы 2 имеем

$$h(\Lambda_{m-t^2}; g, b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^{\sigma_0(q)} h(\Lambda_{m-t^2}; g, L_0; Q_i, u)$$

и асимптотическая формула для  $h(\Lambda_{m-t^2}; g, b_1, b_2, b_3)$  следует из теоремы 1.

2) Пусть теперь  $g = q^k g_1$ ,  $k \geq 1$ ,  $\text{НОД}(g, q) = 1$ . Опять в силу условия  $\left(\frac{t^2-m}{q}\right) = 1$  найдётся целое число  $u$  с условием

$$u^2 + m - t^2 \equiv 0 \pmod{q^{2k}}$$

по свойству сравнения по модулю степени простого числа.

Пусть  $L_0 = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix}$ . Условия  $m - t^2 \equiv b_1 b_3 - b_2^2 \pmod{g}$  даёт, что

$$N(u + L_0) \equiv 0 \pmod{q^k}$$

и поэтому в силу леммы 2 найдутся целые примитивные матрицы  $Q_1$  и  $Q_2$  с условиями

$$N(Q_1) = N(Q_2) = q^t,$$

$$(u + L_0)/Q_1, \quad Q_2 \setminus (u + L_0).$$

Тогда применение первой части 1) а также следствие теоремы 1, даёт асимптотическую формулу теоремы 2, ч. т. д.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ.  $\lambda(\Lambda_{m-s^2})$  есть  $f_t$  — гиперболический телесный угол, который определяется следующим образом.

Пусть  $Z = Z_{\Lambda_{m-t^2}}$  — бесконечная коническая область с вершиной в начале координат, которая при пересечении с поверхностью двуполостного гиперboloида даёт гиперболическую область  $\Lambda_{m-t^2}$ .

Пусть  $Z^{(0)} = Z_{\Lambda_{m-t^2}}^{(0)}$  — конечная часть  $Z_{\Lambda_{m-t^2}}$ , определяемая условием  $f_t(x_1, x_2, x_3) \leq 1$ . Тогда под гиперболической мерой  $\lambda(\Lambda_{m-s^2})$  понимается объём  $V\left(Z_{\Lambda_{m-t^2}}^{(0)}\right)$  тела  $Z_{\Lambda_{m-t^2}}^{(0)}$ .

## 4. Заключение

1. Представляет интерес перенести проведённое исследование на целые точки однополостного гиперboloида, соответствующие матрицам с чётным следом.
2. Интересно также исследовать эргодические свойства потоков целых точек на гиперboloидах, соответствующих матрицам с чётным следом.
3. Можно также провести исследование по обобщению результатов [4], связанное с условием чётности следа используемых вектор-матриц.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1967. — 208 с.
2. Малышев А. В. О применении дискретного эргодического метода в аналитической арифметике неопределённых тернарных квадратичных форм // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1980. — Т. 93. — С. 5–23.
3. Пачев У. М. О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперboloидах // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1980. — Т. 93. — С. 87–141.
4. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Известия РАН. Серия математическая. — 2006. — Т. 70, № 3. — С. 167–184.
5. Линник Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1940. — Т. 4, № 4–5. — С. 363–402.
6. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. — М.: Мир, 1985. — 182 с.
7. Венков Б. А. Об арифметике кватернионов. I–V // Известия РАН. Серия 6. — 1922. — Т. 16. — С. 205–220; 221–246. — Известия АН СССР. Серия 7. Отделение физико-математических наук. — 1929. — № 5. — С. 489–504; № 6. — С. 535–562; № 7. — С. 607–662.
8. Пачев У. М. О целых матрицах второго порядка большой нормы с заданным следом // Современные проблемы теории чисел и математического анализа: материалы международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмаилова. — Душанбе, 2022. — С. 157–160.
9. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1980. — Т. 93. — С. 87–141.



10. Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболюиде и эргодические теоремы // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1962. — Т. 26, № 5. — С. 721–752.
11. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 270 с.

## REFERENCES

1. Linnik, Yu.V. 1967, *Ergodic properties of algebraic fields* [Ergodicheskie svoystva algebraicheskikh polei], Leningrad, 208 p.
2. Malyshev, A.V. 1980, “On the application of the discrete ergodic method in the analytical arithmetic of indefinite ternary quadratic form” [O primeneniі diskretnogo ergodicheskogo metoda v analiticheskoi arifmetike neopredelennykh ternarnykh kvadraticnykh form], *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 93, pp. 5–23.
3. Pachev, U.M. 1980, “On the distribution of integer points on some two sheeted hyperboloids” [O raspredelenii tselykh tochek na nekotorykh dvukhplostnykh giperboloidakh], *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 93, pp. 87–141.
4. Pachev, U.M. 2006, “Representation of integers by isotropic ternary quadratic forms” [Predstavlenie tselykh chisel izotropnymi ternarnymi kvadraticnymi formami], *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, vol. 70, no. 3, pp. 167–184.
5. Linnik, Yu.V. 1940, “On the representation of large numbers by positive ternary quadratic forms” [O predstavlenii bol'shikh chisel polozhitel'nyimi ternarnymi kvadraticnymi formami], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, no. 4, pp. 363–402.
6. Vaughan, R.C. 1985, *The Hardy-Littlewood method*, Mir Publishers, Moscow, 182 p.
7. Venkov, B.A. 1922-1929, “On the arithmetic of quaternions I-V” [Ob arifmetike kvaternionov I-V], *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya 6*, vol. 16, pp. 205–220, 221–246 (1922); *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya 7. Otdelenie Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, no. 5, pp. 489–504, no. 6, pp. 535–562, no. 7, pp. 607–662 (1929).
8. Pachev, U.M. 2022, “On integer matrices of the second order of large norm with a given trace”, in *Modern problems of number theory and mathematical analysis: Proceedings of the international conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Dodojon Ismaolov*, Dushanbe, pp. 157–160.
9. Malyshev, A.V. & Pachev, U.M. 1980, “On the arithmetic of second-order matrices” [Ob arifmetike matrits vtorogo poryadka], *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, vol. 93, pp. 87–141.
10. Skubenko, B.F. 1962, “Asymptotic distribution of integer points on one-sheet hyperboloids and ergodic theorems” [Asimptoticheskoe raspredelenie tselykh tochek na odnopolostnykh giperboloidakh i ergodicheskie teoremy], *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, vol. 26, no. 5, pp. 721–752.
11. Lancaster, P. 1985, *Matrix theory* [Teoriya matrits], Nauka, Moscow, 270 p.

Получено: 27.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026