

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 512.567.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-187-193

О решетках нечетких топологий унарных алгебр

А. В. Карташова, И. Н. Балаба, О. А. Пихтилькова

Карташова Анна Владимировна — кандидат физико-математических наук, Волгоградский государственный социально-педагогический университет (г. Волгоград).

e-mail: kartashovaa@yandex.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

e-mail: opikhtilkova@mirea.ru

Аннотация

Как известно, нечеткие множества — это классические объекты, обобщающие классические множества, где принадлежность элемента характеризуется функцией, принимающей значения в интервале $[0, 1]$. Нечеткие множества часто используются в различных прикладных исследованиях. Нечеткая топология как направление в математике возникла в результате синтеза идей и понятий теории нечетких множеств и нечеткой логики с предметом общей топологии и позволяет, в частности, по-новому взглянуть на многие факты общей топологии.

В свою очередь, в работах ряда математиков методы нечеткой топологии применяются к различным алгебраическим системам (группам, векторным пространствам и другим).

В настоящей заметке исследуются нечеткие топологии на унарных алгебрах, т.е. универсальных алгебрах, все сигнатурные операции которых имеют ариность 1. Такие алгебры могут быть интерпретированы как полигоны над полугруппами или как алгебраические автоматы без выхода.

В работе доказано, что нечеткие топологии на произвольной унарной алгебре образуют полную решетку по включению. При этом эта решетка является подрешеткой решетки всех нечетких топологий на носителе данной алгебры. Вопросы, связанные с описанием свойств и строения решеток нечетких топологий унарных алгебр, в настоящее время остаются открытыми.

Ключевые слова: нечеткие множества, нечеткие топологии на множествах, унарные алгебры, решетки нечетких топологий унарных алгебр.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

Карташова А. В., Балаба И. Н., Пихтилькова О. А. О решетках нечетких топологий унарных алгебр // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 187–193.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 512.567.5

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-187-193

On lattices of fuzzy topologies on unary algebras

A. V. Kartashova, I. N. Balaba, O. A. Pikhilko

Kartashova Anna Vladimirovna — candidate of physical and mathematical sciences, Volgograd State Social and Pedagogical University (Volgograd).

e-mail: kartashovaan@yandex.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Pikhilko Olga Alexandrovna — candidate of physics and mathematics sciences, Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: opikhilko@mirea.ru

Abstract

As is well known, fuzzy sets are classical objects that generalize classical sets, where the membership of an element is characterized by a function taking values from the interval $[0, 1]$. Fuzzy sets are often used in various applied research. Fuzzy topology, as an area in mathematics, arose from the synthesis of ideas and concepts of fuzzy set theory and fuzzy logic with the subject of general topology and allows, in particular, to take a new look at many facts of general topology.

In turn, in the papers of a number of mathematicians fuzzy topology methods are applied to different algebraic systems (groups, vector spaces, etc).

In this note we investigate fuzzy topologies on unary algebras, i. e. universal algebras whose signature operations all have arity 1. Such algebras can be interpreted as acts over semigroups or as algebraic automata without output.

We prove that fuzzy topologies on an arbitrary unary algebra form a complete lattice under inclusion. This lattice is a sublattice of the lattice of all fuzzy topologies on the underlying set of the given algebra. Problems related to the characterization of the properties and structure of fuzzy topologies lattices on unary algebras are currently open.

Keywords: fuzzy sets, fuzzy topologies on sets, unary algebras, lattices of fuzzy topologies of unary algebras.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

Kartashova, A. V., Balaba, I. N., Pikhilko, O. A. 2026, "On lattices of fuzzy topologies on unary algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 187–193.

1. Введение

Впервые понятие нечеткого множества ввел Л.Заде в 1965 году [1]. Это понятие вызвало интерес как среди математиков, так и среди специалистов, занимающихся прикладными исследованиями (см., например, [2] — [4]).

С конца 60-х годов прошлого века нечеткие множества стали систематически использоваться в общей топологии [5] — [7]. Рядом авторов нечеткие топологии рассматривались на различных алгебраических системах: группах [8, 9], векторных пространствах [10], ВСС-алгебрах [11] и других.

В данной заметке исследуются свойства нечетких топологий унарных алгебр. Показано, что нечеткие топологии унарной алгебры произвольной сигнатуры образуют полную решетку относительно включения, которая является подрешеткой решетки всех нечетких топологий на носителе этой алгебры.

Свойства решеток обычных топологий унарных алгебр ранее изучались одним из авторов (см., например, [12] — [14]).

2. Необходимые определения и основные результаты

Пусть X — произвольное множество. Напомним, что *нечетким подмножеством* этого множества называется всякое отображение $M : X \rightarrow [0, 1]$ (см. [1]).

При этом значение $M(x)$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ нечеткому множеству M .

Для любого числа $c \in [0, 1]$ через K_c будем обозначать нечеткое подмножество множества X для которого $K_c(x) = c$ при любом $x \in X$.

Если M и S — два нечетких подмножества множества X , то

$$M = S \Leftrightarrow (\forall x \in X)(M(x) = S(x)),$$

$$M \subseteq S \Leftrightarrow (\forall x \in X)(M(x) \leq S(x)).$$

Объединением двух нечетких подмножеств M и S называется такое нечеткое подмножество $U = M \cup S$, что $U(x) = \max\{M(x), S(x)\}$ для любого $x \in X$.

Пересечением двух нечетких подмножеств M и S называется такое нечеткое подмножество $V = M \cap S$, что $V(x) = \min\{M(x), S(x)\}$ для каждого $x \in X$.

Пусть X, Y — два множества и $f : X \rightarrow Y$ — произвольное отображение. Тогда *прообразом* нечеткого подмножества M множества Y при отображении f называют такое нечеткое подмножество $f^{-1}(M)$ множества X , что $f^{-1}(M)(x) = M(f(x))$.

Согласно [5] *нечеткой топологией* на непустом множестве X называется семейство τ его нечетких подмножеств, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $K_c \in \tau$ при любом $c \in [0, 1]$;
- 2) если $U, V \in \tau$, то $U \cap V \in \tau$;
- 3) если $U_i \in \tau$ для всех $i \in I$, то $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Множество всех нечетких топологий на множестве X будем обозначать через $TN(X)$.

Пара (X, τ) , где $\tau \in TN(X)$, называется *нечетким топологическим пространством*.

Для любых двух нечетких топологий $\tau_1, \tau_2 \in TN(X)$ будем писать $\tau_1 \leq \tau_2$ если $\tau_1 \subseteq \tau_2$, т.е.

$$\tau_1 \leq \tau_2 \Leftrightarrow (\forall U)(U \in \tau_1 \Rightarrow U \in \tau_2).$$

Заметим, что множество $TN(X)$ является полной решеткой по включению. Наименьшим элементом этой решетки является антидискретная, а наибольшим — дискретная нечеткая топология на X .

При этом *антидискретная нечеткая топология* на множестве X содержит только все нечеткие подмножества вида K_c , где $c \in [0, 1]$, а *дискретная нечеткая топология* на X содержит все нечеткие подмножества множества X .

Семейство $\gamma \subseteq \tau$ — *база* нечеткой топологии τ , если каждое нечеткое множество $U \in \tau$ можно представить в виде $U = \bigcup V_U$ для некоторого семейства множеств $V_U \subseteq \gamma$ (см. [15]).

Семейство $\beta \subseteq \tau$ называется *предбазой* нечеткой топологии τ , если совокупность всевозможных конечных пересечений нечетких множеств из β является базой топологии τ .

Пусть (X, τ) и (Y, σ) – нечеткие топологические пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *нечетким непрерывным*, если $f^{-1}(V) \in \tau$ для каждого $V \in \sigma$ (см. [5]).

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – унарная алгебра сигнатуры Ω и $\tau \in TN(A)$ – нечеткая топология на множестве A . По аналогии с определениями из [8] – [11], нечеткую топологию τ будем называть *нечеткой топологией на алгебре $\mathfrak{A}$* , если каждая сигнатурная операция $f \in \Omega$ является нечетким непрерывным отображением (A, τ) в (A, τ) .

Множество всех нечетких топологий на алгебре $\mathfrak{A}$ будем обозначать через $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любой унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ множество $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ всех нечетких топологий на этой алгебре является полной решеткой относительно включения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \Omega$, $\tau_i \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$, где $i \in I$ и $V \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$. Тогда $V \in \tau_i$ для всех $i \in I$, откуда $f^{-1}(V) \in \tau_i$ для всех $i \in I$, т. е. $f^{-1}(V) \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$. Это означает, что $\bigcap_{i \in I} \tau_i \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. Поэтому, $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ – точная нижняя грань семейства нечетких топологий $\tau_i, i \in I$, в частично упорядоченном множестве $\langle \mathfrak{N}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$.

Кроме того, очевидно, наибольшим элементом в этом частично упорядоченном множестве является дискретная нечеткая топология на множестве A . Следовательно, $\langle \mathfrak{N}(\mathfrak{A}), \leq \rangle$ – полная решетка. $\square$

Следующий пример показывает, что в отличие от решетки обычных топологий, решетка нечетких топологий может оказаться бесконечной для конечной унарной алгебры.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \{a, b\}, f \rangle$ – двухэлементная алгебра с одной унарной операцией f , для которой $f(a) = b$, $f(b) = a$. Покажем, что решетка $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ всех нечетких топологий на этой алгебре содержит континуальное множество элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное действительное число $r \in [0, 1]$.

Рассмотрим семейство τ_r всех таких нечетких подмножеств множества $\{a, b\}$, что либо $\max\{M(a), M(b)\} \leq r$, либо $M(a) = M(b)$.

Непосредственная проверка показывает, что τ_r – нечеткая топология на множестве $\{a, b\}$. Кроме того, сигнатурная операция f алгебры $\mathfrak{A}$ является нечетким непрерывным отображением $(\{a, b\}, \tau_r)$ в $(\{a, b\}, \tau_r)$, поскольку $f^{-1}(M)(a) = M(f(a)) = M(b)$ и $f^{-1}(M)(b) = M(a)$ для любого нечеткого подмножества $M \in \tau_r$. Следовательно, $\tau_r \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. Осталось заметить, что $\tau_r \neq \tau_s$ для двух различных чисел $r, s \in [0, 1]$. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Множество $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ всех нечетких топологий на унарной алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ образует подрешетку решетки $TN(A)$ всех нечетких топологий на множестве A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau, \sigma \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. Тогда, как показано в предложении 1, $\tau \cap \sigma \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$.

Обозначим теперь через $\tau \vee \sigma$ точную верхнюю грань в решетке $TN(A)$ нечетких топологий на множестве A и убедимся, что $\tau \vee \sigma \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$.

Действительно, предбазой нечеткой топологии $\tau \vee \sigma$ является множество β всех пересечений вида $U \cap V$, где $U \in \tau$, $V \in \sigma$. Зафиксируем унарную операцию $f \in \Omega$. Если теперь $B \in \beta$, то согласно предложению 2.1 из [8] имеем $f^{-1}(B) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ для некоторых $U \in \tau$, $V \in \sigma$. Откуда $f^{-1}(B) \in \beta$, поскольку $f^{-1}(U) \in \tau$, $f^{-1}(V) \in \sigma$. Следовательно, $\tau \vee \sigma \in \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$. $\square$

Из доказанной теоремы и [5, предложение 2.1], вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Решетка всех топологий на произвольной унарной алгебре $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторой подрешетке решетки $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ всех ее нечетких топологий по включению.*

3. Заключение

В данной работе исследуются нечеткие топологии на унарных алгебрах. Как известно, унарную алгебру можно интерпретировать как полигон над полугруппой или как автомат без выхода [16, 17].

Здесь показано, что множество $\mathfrak{TN}(\mathfrak{A})$ всех нечетких топологий на унарной алгебре $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ является полной решеткой по включению, наименьший элемент которой – антидискретная, а наибольший – дискретная нечеткая топология на A .

Отметим, что различные решетки, связанные с алгебрами, дают значительную информацию о строении исходных алгебр (см., например, [18] — [19].)

В настоящее время для решеток нечетких топологий унарных алгебр вопросы описания их строения, мощности, решеточных свойств остаются открытыми.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965, V. 8, p. 338–353
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.
3. Ногин Д.В. Многокритериальный анализ на основе нечеткой информации. – СПб.: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2025. – 281 с.
4. Klir J. G, Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications – New Jersey: Prentice Hall, 1995.
5. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness // Journal of Mathematical Analysis and Application. 1976, V.56, p. 621– 633.
6. Shostak A.P. Two decades of fuzzy topology: basic ideas, notions and results // Russian Mathematical Surveys. 1989, V. 44, №6, p. 125– 186.
7. Zahan I., Nasrin I. An introduction to fuzzy topological spaces // Advances in Pure Mathematics. 2021, V.11, p. 483–501.
8. Foster D. Fuzzy topological groups // Journal of Mathematical Analysis and Application. 1979, V.67, №2, p. 549– 564.
9. Ma Li Liang, Yu Chun Hai. Fuzzy topological groups // Fuzzy Sets and Systems. 1984, V.12, p.289–299.
10. Katsaras A.K., Liu D.B. Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces // Journal of Mathematical Analysis and Application. 1977, V.58, p.135– 146.
11. Dudek W.A., Jun Y.B., Hong S.M. On fuzzy topological BCC-algebras // Discussiones Mathematicae: General Algebra and Applications. 2000, V. 20, №1, p. 77–87.
12. Карташова А.В. Решетки топологий унарных алгебр // Успехи математических наук. 2000, Т.55, №6(336), с. 141–142.
13. Карташова А.В. О решетках квазипорядков и топологий алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008, Т.14, №5, с. 85–92.
14. Kartashova A.V. Commutative unary algebras with modular and distributive topology lattices // Communications in Algebra. 2020, V.48, №3, p. 1041–1051.

15. Warren R. Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces // *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 1978, V. 8, №3, p.459 – 470.
16. Klip M., Knauer U, Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. – Berlin: Walter de Gruyter, 2000.
17. Кожухов И.Б., Михалев А.В. Полигоны над полугруппами. Унарные алгебры и автоматы // *Информатика и кибернетика*. 2019, Т.16, №2, с. 79-83.
18. Freese R., Lampe W.A., Taylor W. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, I // *Pacific Journal Mathematics*. 1979, V. 82, p. 59–68.
19. Шеврин Л.Н., Овсянников А.Е. Полугруппы и их полугрупповые решетки. Ч. I. Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеристики классов полугрупп. – Свердловск: Уральский гос. университет, 1990.

REFERENCES

1. Zadeh, L. A. 1965, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338–353.
2. Kaufmann, A. 1977, “Introduction a la theorie des sous-ensembles flous”, Paris, New-York, Barcelone, Milan.
3. Nogin D. V. 2025. “Multi-criteria analysis based on fuzzy information.”, Saint Petersburg, – 281 p. (in russian)
4. Klir, J. G. & Yuan, B. 1995, “Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications”. New Jersey: Prentice Hall,.
5. Lowen, R. 1976, “Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness”, *Journal of Mathematical Analysis and Application.*, vol.56, pp. 621– 633.
6. Shostak, A P. 1989, “Two decades of fuzzy topology: basic ideas, notions and results”, *Russian Mathematical Surveys.*, vol. 44, no. 6, pp. 125– 186.
7. Zahan, I.& Nasrin, I. 2021, “An introduction to fuzzy topological spaces”, *Advances in Pure Mathematics*, vol. 11, pp. 483–501.
8. Foster D. 1979, “Fuzzy topological groups”, *Journal of Mathematical Analysis and Application.*, vol. 67, no. 2, pp. 549– 564.
9. Ma Li Liang, Yu Chun Hai.1984, “Fuzzy topological groups”, *Fuzzy Sets and Systems.* , vol. 12, pp. 289–299.
10. Katsaras A.K.& Liu D.B. 1977, “Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces”, *Journal of Mathematical Analysis and Application.*, vol. 58, pp. 135– 146.
11. Dudek W.A., Jun Y.B., Hong S.M. ‘2000, “On fuzzy topological BCC-algebras”, *Discussiones Mathematicae: General Algebra and Applications.*, vol. 20, no. 1, pp. 77–87.
12. Kartashova, A. V. 2000, “Topology lattices of unary algebras”, *Russian Mathematical Surveys.*, vol. 55, no. 6, pp. 1152–1153.
13. Kartashova, A. V. 2009, “On quasiorder lattices and topology lattices of algebras”, *J. Math. Sci.*, vol. 163, no. 6, pp. 682–687.

14. Kartashova A. V. 2020, “Commutative unary algebras with modular and distributive topology lattices”, *Communications in Algebra*, vol. 48, no. 3, pp. 1041–1051.
15. Warren R. 1978, “Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces”, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 8, no. 3, pp. 459 – 470.
16. Klip, M., Knauer, U & Mikhalev, A. V. 2000, “Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs”, Berlin: Walter de Gruyter,
17. Kozhukhov, I. B. & Mikhalev, A. V. 2019, “Polygons over Semigroups. Unary Algebras and Automata”, *Computer Science and Cybernetics.*, vol. 16, no. 2, pp. 79–83 (in russian).
18. Freese, R., Lampe, W. A. & Taylor, W. 1979, “Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, I”, *Pacific Journal Mathematics.*, vol. 82, pp. 59–68.
19. Shevrin, L. N. & Ovsyannikov, A. E. 1990, “Semigroups and their semigroup lattices. Part I. Semigroups with some types of lattices of subsemigroups and lattices characteristics of semigroup classes”, – Sverdlovsk: Ural State University (in russian).

Получено: 18.12.2025

Принято в печать: 19.05.2026