

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-171-179

О совместных приближениях Дирихле рационально зависимых иррациональностей

М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, Геофизический центр РАН (г. Москва).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Добровольский Николай Николаевич — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула); младший научный сотрудник, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе изучаются наилучшие совместные приближения второго рода для рационально зависимых иррациональностей. Показано, что начиная с некоторого места они определяются подходящими дробями к общей мере этих иррациональностей, которой кратны эти иррациональности.

Ключевые слова: наилучшие приближения второго рода, совместные наилучшие приближения второго рода.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

Добровольский, М. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М. О совместных приближениях Дирихле рационально зависимых иррациональностей // Чебышевский сборник. 2026. Т. 27, вып. 2, С. 171–179.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511.3

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-171-179

On joint Dirichlet approximations of rationally dependent irrationalities

M. N. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Mikhail Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Geophysical centre of RAS (Moscow).

e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, senior researcher, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula); junior researcher, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

This paper studies best simultaneous approximations of the second kind for rationally dependent irrationalities. It is shown that, starting from a certain point, they are determined by the convergents of the common measure of these irrationalities, which are multiples of these irrationalities.

Keywords: best approximations of the second kind, joint best approximations of the second kind.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

Dobrovolsky, M. N., Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, N. M. 2026, “On joint Dirichlet approximations of rationally dependent irrationalities”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 171–179.

*Посвящается памяти
профессора Василия Ивановича Берника*

1. Введение

Хорошо известна теорема Дирихле о совместных приближениях [9].

ТЕОРЕМА 1. (Дирихле) Для любых $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ и $Q > 1$, $Q \in \mathbb{N}$ найдется натуральное $q \leq Q^n$ такое, что¹

$$\|q\beta_j\| < \frac{1}{Q} \quad (j = 1, \dots, n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решётка $\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_n)$, заданная равенством

$$\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{(q, q\beta_1 - p_1, \dots, q\beta_n - p_n) | q, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

называется решёткой совместных приближений Дирихле.

¹Здесь и далее через $\|\beta\|$ обозначается расстояние до ближайшего целого.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система рациональных дробей $\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_n}{b}$ ($b > 0$) называется наилучшим совместным приближением второго рода чисел $\beta_1, \dots, \beta_n$, если из

$$\left(\frac{c_1}{d}, \dots, \frac{c_n}{d}\right) \neq \left(\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_n}{b}\right), \quad 0 < d \leq b$$

необходимо следует

$$\max(|d\beta_1 - c_1|, \dots, |d\beta_n - c_n|) > \max(|b\beta_1 - a_1|, \dots, |b\beta_n - a_n|).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно видеть, что если система рациональных дробей $\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_n}{b}$ ($b > 0$) является наилучшим совместным приближением второго рода чисел $\beta_1, \dots, \beta_n$, то $(a_1, \dots, a_n, b) = 1$, так как иначе можно было бы дроби системы сократить на этот наибольший общий делитель и они не были бы наилучшими совместными приближениями второго рода.

Пусть $k = [d\beta]$. Если ввести функцию $n(d, \beta) = \begin{cases} k, & \text{если } \{d\beta\} \leq \frac{1}{2}, \\ k+1, & \text{если } \{d\beta\} > \frac{1}{2}, \end{cases}$ то наилучшее приближение числа β дробью со знаменателем d будет дробь $\frac{n(d, \beta)}{d}$. Таким образом, наилучшее совместное приближение второго рода чисел $\beta_1, \dots, \beta_n$ со знаменателем b будет иметь вид $\frac{n(b, \beta_1)}{b}, \dots, \frac{n(b, \beta_n)}{b}$. Ясно, что $\|b\beta_j\| = |b\beta_j - n(b, \beta_j)|$ ($j = 1, \dots, n$).

В работе [6] были изучены наилучшие совместные приближения второго рода для линейно зависимых иррациональностей таких, как α и $n\alpha$, где n — натуральное число больше 1. Были доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если рациональная дробь $\frac{a}{b}$ ($b > 0$, $(b, n) = 1$) — наилучшее приближение второго рода n -порядка иррационального числа β , то рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{na}{b}$ — совместные наилучшие приближения второго рода чисел β и $n\beta$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть разложение иррационального числа β в бесконечную цепную дробь имеет вид:

$$\beta = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

и m — наименьший номер подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу β такой, что эта дробь является наилучшим приближением второго рода порядка n , тогда все наилучшие совместные приближения второго рода к числам $\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta$ со знаменателем большим Q_m имеют вид

$$\frac{P_l}{Q_l}, \frac{n_1 P_l}{Q_l}, \dots, \frac{n_k P_l}{Q_l} \quad (l \geq m).$$

Напомним, что для n выполняется соотношение $n \geq \max(n_1, \dots, n_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что система рациональных дробей $\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_n}{b}$ ($b > 0$) называется системой совместных приближений Дирихле второго рода чисел $\beta_1, \dots, \beta_n$ с константами $c_1, \dots, c_s$, если выполняются неравенства

$$|b\beta_j - a_j| < \frac{c_j}{b} \quad (j = 1, \dots, s).$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что система рациональных дробей $\frac{P_l}{Q_l}, \frac{n_1 P_l}{Q_l}, \dots, \frac{n_k P_l}{Q_l}$ является системой совместных приближений Дирихле второго рода чисел $\beta, n_1 \beta, \dots, n_k \beta$ с константами $1, n_1, \dots, n_k$.

Нетрудно видеть, что если $\frac{P_l}{Q_l}$ подходящая дробь к числу β , которая является наилучшим приближением второго рода с константой $\frac{1}{2n}$, то система рациональных дробей $\frac{P_l}{Q_l}, \frac{n_1 P_l}{Q_l}, \dots, \frac{n_k P_l}{Q_l}$ является системой подходящих дробей к числам $\beta, n_1 \beta, \dots, n_k \beta$ с константами $\frac{1}{2n}, \frac{n_1}{2n}, \dots, \frac{n_k}{2n}$.

Цель данной статьи — рассмотреть более общий случай наилучших совместных приближений второго рода для линейно зависимых иррациональностей таких, как $a_1 \alpha, \dots, a_k \alpha$, где $a_1, \dots, a_k$ — произвольные ненулевые рациональные числа.

2. Общая мера рационально зависимых иррациональностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что две иррациональности α и β рационально зависимы, если найдутся два ненулевых целых числа a и b такие, что $a\alpha - b\beta = 0$.

Если такие целые числа существуют, то без ограничения общности можно считать, что они взаимно простые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть иррациональности $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ попарно рационально зависимы, тогда иррациональность α называется общей мерой этих иррациональностей, если это наибольшая положительная иррациональность такая, что $\alpha_j = n_j \alpha$ ($j = 1, \dots, k$) и все n_j — целые числа.

Нетрудно видеть, что если α общая мера попарно рационально зависимых иррациональностей $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то $(n_1, \dots, n_k) = 1$. Действительно, если наибольший общий делитель $d = (n_1, \dots, n_k) > 1$, то общей мерой будет иррациональность $d\alpha$.

Нетрудно указать пример двух иррациональностей не имеющих общую меру. Действительно, если α — произвольная иррациональность и t — произвольное ненулевое целое число, то иррациональности α и $\alpha + t$ не имеют общей меры и не являются рационально зависимыми. Этот пример интересен ещё и тем, что обе эти иррациональности имеют совпадающие последовательности знаменателей подходящих дробей. Точно также α и $t - \alpha$ не имеют общей меры и не являются рационально зависимыми.

Более того, если иррациональности α и β имеют бесконечное множество по две последовательные подходящие дроби с одинаковыми знаменателями и одинаковой четностью номеров, то они отличаются на целое слагаемое и быть может на знак.

Действительно, если $\frac{a_1}{q_1}, \frac{a_2}{q_2}$ две соседние подходящие дроби к иррациональности α , а $\frac{b_1}{q_1}, \frac{b_2}{q_2}$ две соседние подходящие дроби к иррациональности β , то $a_1 q_2 - a_2 q_1 = \varepsilon = \pm 1$, $b_1 q_2 - b_2 q_1 = \varepsilon = \pm 1$. Отсюда следует, что $(a_1 - b_1)q_2 - (a_2 - b_2)q_1 = 0$. Так как $(q_1, q_2) = 1$, то найдётся целое t такое, что

$$a_1 - b_1 = tq_1, \quad a_2 - b_2 = tq_2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_1}{q_1} = \frac{b_1}{q_1} + t, \quad \frac{a_2}{q_2} = \frac{b_2}{q_2} + t.$$

Пусть теперь мы имеем бесконечную последовательность пар соседних подходящих дробей к иррациональностям α и β с одинаковыми знаменателями и одинаковой четностью номеров, тогда мы имеем

$$\frac{a_{j,1}}{q_{j,1}} = \frac{b_{j,1}}{q_{j,1}} + t_j, \quad \frac{a_{j,2}}{q_{j,2}} = \frac{b_{j,2}}{q_{j,2}} + t_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Переходя к пределу по j в равенстве для подходящих дробей, получим $\alpha = \beta + \lim_{j \rightarrow \infty} t_j$. Но последовательность целых чисел имеет предел, если она с некоторого места стационарная, следовательно $\alpha = \beta + t$ и утверждение доказано.

Рассмотрим попарно рационально зависимые иррациональности $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Без ограничения общности можно предполагать, что $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$. Ясно, что найдутся натуральные $m_2, \dots, m_k$ и натуральные $n_2, \dots, n_k$ такие, что $\alpha_j = \frac{m_j}{n_j} \alpha_1$ ($j = 2, \dots, k$) и $(m_j, n_j) = 1$, $m_j > n_j$ ($j = 2, \dots, k$).

Рассмотрим наименьшее общее кратное $n = [n_2, \dots, n_k]$, тогда иррациональность $\alpha = \frac{\alpha_1}{n}$ будет общей мерой рационально зависимых иррациональностей $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, при этом будем иметь $\alpha_1 = n\alpha$, $\alpha_j = \frac{m_j n}{n_j} \alpha$ ($j = 2, \dots, k$). Таким образом, имеем равенства $\alpha_j = a_j \alpha$, где для натуральных $a_1, \dots, a_k$ справедливы равенства $a_1 = n$, $a_j = \frac{m_j n}{n_j}$ ($j = 2, \dots, k$). Так как числа m_j и n_j взаимно простые ($j = 2, \dots, k$), то и $(a_1, \dots, a_k) = 1$.

В работе [6] был рассмотрен частный случай, когда общая мера иррациональностей $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ совпадала с первой иррациональностью: $\alpha_1 = \alpha$ и $n = 1$. В данной работе мы рассмотрим общий случай рационально зависимых иррациональностей когда $n > 1$.

3. Ещё раз о частном случае двух рационально зависимых иррациональностей

Рассмотрим две иррациональности α и $n\alpha$, где n — натуральное число больше 1. Согласно работе [6] все совместные наилучшие приближения второго рода к числам α и $n\alpha$, начиная с некоторого места, имеют вид $\left(\frac{P_l}{Q_l}, \frac{nP_l}{Q_l}\right)$, где $l \geq m$ и m — наименьший номер подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α такой, что эта дробь является наилучшим приближением второго рода порядка n .

Возникает вопрос: когда подходящая дробь $\frac{a}{b}$ к числу $n\alpha$, являясь наилучшим приближением второго рода n -порядка, будет задавать наилучшее совместное приближение второго рода к числам α и $n\alpha$?

Рассмотрим разность $|bn\alpha - a| < \frac{1}{b} < \frac{1}{2n}$. Отсюда следует, что $b > 2n$.

Пусть $a = dn + r$, $0 \leq r < n$, тогда при $r = 0$ имеем: $|b\alpha - d| < \frac{1}{nb}$ и дробь $\frac{d}{b}$ по теореме 19 из монографии [10] (см. стр. 42) является подходящей дробью к числу α .

При $r > 0$ имеем: $|b\alpha - d| = \left|\frac{bn\alpha - a}{n} + \frac{r}{n}\right| > \frac{r}{n} - \frac{1}{nb} > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} > \frac{1}{2n}$. Аналогично, $|b\alpha - d - 1| = \left|\frac{bn\alpha - a}{n} + \frac{r}{n} - 1\right| > \frac{n-r}{n} - \frac{1}{nb} > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} > \frac{1}{2n}$. Таким образом, наилучшее приближение второго рода со знаменателем b к иррациональности α отстоит более чем на $\frac{1}{2n}$. Следовательно, при $b > Q_m$ мы не получаем наилучшее совместное приближение второго рода к числам α и $n\alpha$ со знаменателем b .

Теперь рассмотрим случай двух иррациональностей α и $\frac{k}{n}\alpha$, где k, n — натуральные числа, $(k, n) = 1$, $k > 2n$ и n больше 1.

Пусть m — наименьший номер подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу $\frac{k}{n}\alpha$ такой, что эта дробь является наилучшим приближением второго рода порядка n .

Рассмотрим разность $|b\frac{k}{n}\alpha - a| < \frac{1}{b} < \frac{1}{2n}$, где b — натуральное и a — целое. Отсюда следует, что $b > 2n$. Далее получаем, что $|b\alpha - \frac{n}{k}a| = \frac{n}{k} |b\frac{k}{n}\alpha - a| < \frac{n}{bk} < \frac{1}{2k}$.

Пусть $na = dk + r$, $0 \leq r < k$, тогда при $r = 0$ имеем: $d < a$, $d = \frac{na}{k}$,

$$|b\alpha - d| = \left|b\alpha - \frac{na}{k}\right| = \frac{n}{k} \left|b\frac{k}{n}\alpha - a\right| < \frac{n}{kb} < \frac{1}{2b}$$

и дробь $\frac{d}{b}$ по теореме 19 из монографии [10] (см. стр. 42) является подходящей дробью к числу α .

При $r > 0$ имеем:

$$|b\alpha - d| = \left| b\alpha - \frac{na - r}{k} \right| = \frac{n}{k} \left| b\frac{k}{n}\alpha - a + \frac{r}{n} \right| > \frac{r}{k} - \frac{n}{kb} > \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k}.$$

Аналогично,

$$|b\alpha - d - 1| = \left| b\alpha - \frac{na - r}{k} - 1 \right| = \frac{n}{k} \left| b\frac{k}{n}\alpha - a + \frac{r}{n} - \frac{k}{n} \right| > \frac{k - r}{k} - \frac{n}{kb} > \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k}.$$

Таким образом, наилучшее приближение второго рода со знаменателем b к иррациональности α отстоит более чем на $\frac{1}{2k}$. Следовательно, при $b > Q_m$ мы не получаем наилучшее совместное приближение второго рода к числам α и $\frac{k}{n}\alpha$ со знаменателем b .

4. Наилучшие совместные приближения второго рода для линейно зависимых иррациональностей

Рассмотрим вопрос о совместных наилучших приближениях второго рода линейно зависимых иррациональностей таких, как $b_1\alpha, \dots, b_k\alpha$, где $b_1, \dots, b_k$ — произвольные ненулевые рациональные числа. Без ограничения общности можно предполагать, что $1 < b_1 < \dots < b_k$, $\alpha > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть иррациональность $\alpha = \frac{\alpha_1}{n}$ будет общей мерой рационально зависимых иррациональностей $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$, при этом $\alpha_1 = n\alpha$, $\alpha_j = \frac{m_j n}{n_j} \alpha$ ($j = 2, \dots, k$). И пусть разложение иррационального числа α в бесконечную цепную дробь имеет вид:

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

и m — наименьший номер подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α такой, что эта дробь является наилучшим приближением второго рода порядка n , тогда все наилучшие совместные приближения второго рода к числам $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ со знаменателем большим Q_m имеют вид

$$\frac{nP_l}{Q_l}, \frac{\frac{m_2 n}{n_2} P_l}{Q_l}, \dots, \frac{\frac{m_k n}{n_k} P_l}{Q_l} \quad (l \geq m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см. [10], стр. 30), что справедливы неравенства

$$\frac{1}{Q_{l+1} + Q_l} < |Q_l \alpha - P_l| < \frac{1}{Q_{l+1}} < \frac{1}{Q_l q_{l+1}} \quad (l \geq 0).$$

Отсюда следует, что если подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу α является наилучшим приближением второго рода порядка n , то $Q_{m+1} + Q_m > 2n$ и, значит, $Q_{l+1} > 2n$ при $l \geq m+1$. Таким образом, каждая подходящая дробь $\frac{P_l}{Q_l}$ к числу α является наилучшим приближением второго рода порядка n для любого $l \geq m$. Из теоремы 3 следует, что дроби $\frac{P_l}{Q_l}, \frac{nP_l}{Q_l}, \frac{\frac{m_2 n}{n_2} P_l}{Q_l}, \dots, \frac{\frac{m_k n}{n_k} P_l}{Q_l}$ являются наилучшими совместными приближениями второго рода чисел $\alpha, n\alpha, \frac{m_2 n}{n_2} \alpha, \dots, \frac{m_k n}{n_k} \alpha$ с константами $\frac{1}{q_{l+1}}, \frac{n}{q_{l+1}}, \frac{m_2 n}{n_2 q_{l+1}}, \dots, \frac{m_k n}{n_k q_{l+1}}$. Таким образом, дроби $\frac{nP_l}{Q_l}, \frac{\frac{m_2 n}{n_2} P_l}{Q_l}, \dots, \frac{\frac{m_k n}{n_k} P_l}{Q_l}$

являются совместными приближениями Дирихле второго рода чисел $n\alpha, \frac{m_2 n}{n_2} \alpha, \dots, \frac{m_k n}{n_k} \alpha$ с константами $\frac{n}{q_{l+1}}, \frac{m_2 n}{n_2 q_{l+1}}, \dots, \frac{m_k n}{n_k q_{l+1}}$.

Пусть система дробей $\frac{a}{b}, \frac{a_2}{b}, \dots, \frac{a_k}{b}$ является системой совместных наилучших приближений Дирихле второго рода чисел $n\alpha, \frac{m_2 n}{n_2} \alpha, \dots, \frac{m_k n}{n_k} \alpha, 2n < b \leq Q_l$ с константами $c, c_2, \dots, c_k$ и

$$\begin{aligned} & \max \left(|bn\alpha - a|, \left| b \frac{m_2 n}{n_2} \alpha - a_2 \right|, \dots, \left| b \frac{m_k n}{n_k} \alpha - a_k \right| \right) < \\ & < \max \left(|Q_l n \alpha - n P_l|, \left| Q_l \frac{m_2 n}{n_2} \alpha - \frac{m_2 n}{n_2} P_l \right|, \dots, \left| Q_l \frac{m_k n}{n_k} \alpha - \frac{m_k n}{n_k} P_l \right| \right) = \left| Q_l \frac{m_k n}{n_k} \alpha - \frac{m_k n}{n_k} P_l \right|. \end{aligned}$$

Так как $|bn\alpha - a| < \frac{c}{b} < \frac{m_k n}{Q_l n_k q_{l+1}}$, то $c < \frac{b m_k n}{Q_l n_k q_{l+1}} < \frac{m_k n}{n_k q_{l+1}}$. Аналогично,

$$\left| b \frac{m_j n}{n_j} \alpha - a_j \right| < \frac{c_j}{b} < \frac{m_k n}{Q_l n_k q_{l+1}}, \quad c_j < \frac{b m_k n}{Q_l n_k q_{l+1}} < \frac{m_k n}{n_k q_{l+1}} \quad (j = 2, \dots, k).$$

Определим величины $d, d_2, \dots, d_k$ и $r, r_2, \dots, r_k$ с помощью соотношений

$$a = dn + r, 0 \leq r < n, a_j = \frac{m_j n}{n_j} d_j + r_j, 0 \leq r_j < \frac{m_j n}{n_j} \quad (j = 2, \dots, k),$$

получим

$$\left| b\alpha - d - \frac{r}{n} \right| < \frac{c}{bn}, \quad \left| b\alpha - d_j - \frac{r_j}{\frac{m_j n}{n_j}} \right| < \frac{c_j}{\frac{m_j n}{n_j} b} \quad (j = 2, \dots, k).$$

Отсюда следует, что

$$|b\alpha - d| = \left| b\alpha - \frac{a - r}{n} \right| = \frac{1}{n} |bn\alpha - a + r| > \frac{1}{n} \left(r - \frac{c}{b} \right)$$

□

5. Матрицы перехода для базисов из наилучших приближений

Согласно работе [6] базисные матрицы $M_m(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)$ решётки совместных приближений Дирихле $\Lambda(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} M_l(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta) &= \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_l(\beta, \vec{n}) \\ \vec{\lambda}_{l-1}(\beta, \vec{n}) \\ \vec{\lambda}_{j_{l-2}}(\beta, \vec{n}) \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_{j_{l-k-2}}(\beta, \vec{n}) \end{pmatrix}, \quad j_{l-k-2} < \dots < j_{l-2} \leq l-2, \\ |M_m(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)| &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь через $\vec{\lambda}_l(\beta, \vec{n})$ обозначено l -ое наилучшее приближение:

$$\vec{\lambda}_l(\beta, \vec{n}) = (Q_l, Q_l\beta - P_l, Q_l \cdot n_1\beta - P_{l,1}, Q_l \cdot n_2\beta - P_{l,2}, \dots, Q_l n_k\beta - P_{l,k}).$$

Нас будут интересовать матрицы перехода $m_m(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)$ от базисной матрицы $M_{m-1}(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)$ к базисной матрице $M_m(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)$:

$$M_m(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta) = m_m(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta) M_{m-1}(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta),$$

которые при $l > m$ из теоремы 3 имеют простой вид.

ТЕОРЕМА 5. Пусть разложение иррационального числа β в бесконечную цепную дробь имеет вид:

$$\beta = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

и m — наименьший номер подходящей дроби $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу β такой, что эта дробь является наилучшим приближением второго рода порядка n , тогда при $l \geq m$ все матрицы перехода $m_{l+1}(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta)$ имеют вид

$$m_{l+1}(\beta, n_1\beta, \dots, n_k\beta) = \begin{pmatrix} q_{l+1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 3 наилучшие приближения $\vec{\lambda}_{l+1}(\beta, \vec{n})$ при $l \geq m$ имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_{l+1}(\beta, \vec{n}) &= (Q_{l+1}, Q_{l+1}\beta - P_{l+1}, Q_{l+1} \cdot n_1\beta - P_{l+1} \cdot n_1, \dots, Q_{l+1}n_k\beta - P_{l+1} \cdot n_k) = \\ &= q_{l+1}\vec{\lambda}_l(\beta, \vec{n}) + \vec{\lambda}_{l-1}(\beta, \vec{n}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что базис $\vec{\lambda}_l(\beta, \vec{n}), \vec{\lambda}_{l-1}(\beta, \vec{n}), \vec{\lambda}_{j_{l,l-2}}(\beta, \vec{n}), \dots, \vec{\lambda}_{j_{l,l-k-2}}(\beta, \vec{n})$ заменяется на базис $\vec{\lambda}_{l+1}(\beta, \vec{n}), \vec{\lambda}_l(\beta, \vec{n}), \vec{\lambda}_{j_{l,l-2}}(\beta, \vec{n}), \dots, \vec{\lambda}_{j_{l,l-k-2}}(\beta, \vec{n})$ и теорема доказана. $\square$

6. Заключение

Данная проблематика тесно связана с развитием теоретико-числового метода в приближенном анализе [1], [3], [7], [8]. В работе [6], опирающейся на развитие идей из работ [2], [4] и [5], было продолжено развитие этой тематики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.
2. Г. Ф. Вороной Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // В книге Г. Ф. Вороной. Собрание сочинений в трех томах. Т. 1, С. 197–391.
3. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.
4. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. — М.—Л. Издательство Академии наук СССР. 1947 г., 422 с.
5. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 11, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940, С. 3–340.

6. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об одном случае совместных приближений Дирихле // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, вып. 4, С. 446–452.
7. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.
8. А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Об оценках Быковского для отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 214–227.
9. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 200 с.
10. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Физматлит. 1961.

REFERENCES

1. Bykovskii, V.A. 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 3, no. 2, pp. 27–33.
2. Voronoi, G.F. 1896, *On generalization of the algorithm of continued fraction*, Warsaw University, Warsaw.
3. Gorkusha, O.A. & Dobrovolsky, N.M. 2005, “On estimates of hyperbolic zeta function of lattices”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 6, no. 2, pp. 130–138.
4. Delone, B.N. 1947, *St. Petersburg school of number theory*, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 422 p.
5. Delone, B.N. & Faddeev, D.K. 1940, “The theory of irrationalities of the third degree”, *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*, vol. 11, Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, pp. 3–340.
6. Dobrovolsky, M.N., Dobrovolsky, N.N. & Dobrovolsky, N.M. 2025, “On a case of joint Dirichlet approximations”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 446–452.
7. Kormacheva, A.N., Dobrovolskii, N.N. & Dobrovolskii, N.M. 2021, “On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.
8. Kormacheva, A.N., Dobrovolskii, N.N., Rebrova, I.Yu. & Dobrovolskii, N.M. 2023, “On Bykovsky estimates for a measure of the quality of optimal coefficients”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 214–227.
9. Feldman, N.I. 1981, *Approximation of algebraic numbers*, Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moscow, 200 p.
10. Khinchin, A.Ya. 1961, *Continued fractions*, Fizmatlit, Moscow.

Получено: 16.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026