

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 517.9

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-162-170

**Свойства решений параболических уравнений в рамках метода
угловых пограничных функций**

И. В. Денисов

Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются сингулярно возмущенные параболические уравнения в областях с угловыми точками границы. Для построения асимптотики решения применяется метод угловых пограничных функций. Цель данной работы – выявить особенности параболических уравнений, для решения которых возможно применение метода угловых пограничных функций.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Денисов И. В. Свойства решений параболических уравнений в рамках метода угловых пограничных функций // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 162–170.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 517.9

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-162-170

Properties of solutions to parabolic equations using the method of angular boundary functions

I. V. Denisov

Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

Singularly perturbed parabolic equations in domains with corner points of the boundary are considered. The method of corner boundary functions is used to construct the asymptotics of the solution. The purpose of this work is to identify the features of parabolic equations for which the method of corner boundary functions can be applied.

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Denisov, I. V. 2026, "Properties of solutions to parabolic equations using the method of angular boundary functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 162–170.

1. Введение

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ для сингулярно возмущенного параболического уравнения рассматривается начально-краевая задача вида

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (a^2 u_{xx} - u_t) = F(u, x, t, \varepsilon) & \text{при } (x, t) \in \Omega, \\ u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где ε — малый положительный параметр.

Для решения подобных задач принято использовать метод угловых пограничных функций (см. [1]). Цель данной работы — выявить особенности параболических уравнений, для решения которых возможно применение метода угловых пограничных функций.

2. Решение задачи с помощью метода угловых пограничных функций

Предполагаются выполненными следующие стандартные условия.

УСЛОВИЕ 1. Функции $F(u, x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

УСЛОВИЕ 2. Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x, t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

УСЛОВИЕ 3. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

УСЛОВИЕ 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

УСЛОВИЕ 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \quad (2)$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$ (здесь t - параметр, $k = 0$ или 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1, z_2) = (0, 0)$ является точкой покоя типа седла систем (2).

Если функция $F(u, x, t, \varepsilon)$ линейна по переменной u , то для существования решения задачи (1) достаточно условий согласованности начально-краевых значений в угловых точках прямоугольника.

Если функция $F(u, x, t, \varepsilon)$ нелинейна по переменной u , то при сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1). Более того, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удастся. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1) требуются дополнительные условия. В работах [2–8] рассматривались различные типы нелинейностей, для которых накладывались необходимые ограничения.

Согласно методу угловых пограничных функций решение задачи (1) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \quad (3)$$

Здесь $\bar{u}$ – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслоиные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Регулярная часть асимптотики $\bar{u}$ строится в виде ряда по степеням параметра ε :

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t). \quad (4)$$

Коэффициент $\bar{u}_0(x, t)$ определяется из вырожденного уравнения

$$F(u, x, t, 0) = 0, \quad (5)$$

которое получается, если в (1) положить $\varepsilon = 0$.

Пограничные функции строятся при растянутых переменных и удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания. Кроме этого, один из шагов алгоритма предполагает срезание пограничных функций до нулевых значений в области, отграниченной от границ прямоугольника, то есть пограничные функции отличны от нуля лишь в узкой приграничной полосе. При этом их влияние оказывается меньше любой степени ε . За пределами узкой приграничной полосы решение задачи (1) определяется только регулярной частью асимптотики. Таким

образом, решение задачи (1) во внутренней части прямоугольника Ω с точностью порядка ε определяет решение функционального уравнения (5).

Справедливо следующее утверждение.

СВОЙСТВО 1. *Решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), полученное методом угловых пограничных функций, при $\varepsilon = 0$ является корнем вырожденного уравнения $F(u, x, t, 0) = 0$.*

В качестве примера в прямоугольнике $\Omega_1 = \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу вида (1) для линейного параболического уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (a^2 u_{xx} - u_t) = u - \varepsilon & \text{при } (x, t) \in \Omega_1, \\ u(x, 0, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ u(\pi, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6)$$

В формуле (4) коэффициенты $\bar{u}_k(x, t)$ регулярной части асимптотики определяются из уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{F}_k, \quad (7)$$

в котором $F(u, x, t, \varepsilon) = u - \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k, x, t, \varepsilon \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{\partial^k \bar{F}}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= F(\bar{u}_0, x, t, 0) + \varepsilon \left(F'_u(\bar{u}_0, x, t, 0) \bar{u}_1 + F'_\varepsilon(\bar{u}_0, x, t, 0) \right) + \dots + \\ &+ \varepsilon^k \left(F'_u(\bar{u}_0, x, t, 0) \bar{u}_k + \dots + \frac{1}{k!} F_{\varepsilon^k}^{(k)}(\bar{u}_0, x, t, 0) \right) + \dots = \bar{F}_0 + \varepsilon \bar{F}_1 + \varepsilon^k \bar{F}_k + \dots \end{aligned}$$

В уравнении (7) коэффициенты при одинаковых степенях ε приравниваются друг другу и получается система уравнений для нахождения коэффициентов ряда (4):

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= 0, \\ \bar{F}_1 &= 0, \\ \bar{F}_k &= a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{k-2}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{u}_{k-2}}{\partial t}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} F(\bar{u}_0, x, t, 0) &= \bar{u}_0, \\ F'_u(\bar{u}_0, x, t, 0) &= 1, \\ F'_\varepsilon(\bar{u}_0, x, t, 0) &= -1, \\ F_{\varepsilon^k}^{(k)}(\bar{u}_0, x, t, 0) &= 0, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{F}_0 &= \bar{u}_0 = 0, \\ \bar{F}_1 &= \bar{u}_1 - 1 = 0, \\ \bar{F}_k &= \bar{u}_k = a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{k-2}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{u}_{k-2}}{\partial t} = 0, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Получаем

$$\bar{u}_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= 1, \\ \bar{u}_k &= a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{k-2}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{u}_{k-2}}{\partial t} = 0, \quad k \geq 2,\end{aligned}$$

и, таким образом, регулярная часть асимптотики оказывается построенной:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \varepsilon. \quad (8)$$

В соответствии с теорией решение задачи (6) во внутренней части прямоугольника Ω_1 с точностью порядка ε определяет решение $\bar{u}_0(x, t) = 0$ функционального уравнения (5):

$$F(u, x, t, 0) = u = 0. \quad (9)$$

3. Аналитическое решение задачи

Получим точное решение задачи (6). Сначала освободимся от u в правой части уравнения с помощью замены

$$u(x, t, \varepsilon) = z(x, t, \varepsilon) \exp(-t/\varepsilon^2). \quad (10)$$

В результате задача (6) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (a^2 z_{xx} - z_t + \varepsilon^{-2} z) \exp(-t/\varepsilon^2) = z \exp(-t/\varepsilon^2) - \varepsilon & \text{при } (x, t) \in \Omega_1, \\ z(x, 0, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ z(0, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ z(\pi, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx} + f(x, t, \varepsilon) & \text{при } (x, t) \in \Omega, \\ z(x, 0, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ z(0, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ z(\pi, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (11)$$

где

$$f(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \exp(t/\varepsilon^2). \quad (12)$$

Решение задачи (11) имеет вид

$$z(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp(-n^2 a^2 (t - \tau)) f_n(\tau, \varepsilon) d\tau \right] \sin(nx), \quad (13)$$

где f_n являются коэффициентами Фурье функции $f(x, t, \varepsilon)$ при разложении ее в ряд по синусам на промежутке $(0, \pi)$:

$$f(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \sin(nx),$$

то есть коэффициенты f_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} f_n(t, \varepsilon) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t, \varepsilon) \sin(n\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \exp(t/\varepsilon^2) \right] \sin(n\xi) d\xi = \\ &= -\frac{2}{\varepsilon \pi n} \exp(t/\varepsilon^2) \cos(n\xi) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\varepsilon \pi n} (1 - (-1)^n) \exp(t/\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Для четных n все коэффициенты $f_n(t, \varepsilon) = 0$. Соответственно в формуле (13) все коэффициенты при $\sin(nx)$ с четными n также равны нулю.

При нечетных n в формуле (13) коэффициенты при $\sin(nx)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-n^2 a^2(t-\tau)) f_n(\tau, \varepsilon) d\tau &= \int_0^t \exp(-n^2 a^2(t-\tau)) \left[\frac{4}{\varepsilon \pi n} \exp(\tau/\varepsilon^2) \right] d\tau = \\ &= \frac{4}{\varepsilon \pi n} \exp(-n^2 a^2 t) \int_0^t \exp((n^2 a^2 + 1/\varepsilon^2) \tau) d\tau = \\ &= \frac{4}{\varepsilon \pi n} \exp(-n^2 a^2 t) \frac{1}{n^2 a^2 + 1/\varepsilon^2} [\exp((n^2 a^2 + 1/\varepsilon^2) t) - 1] = \\ &= \frac{4\varepsilon}{\pi n (1 + \varepsilon^2 n^2 a^2)} [\exp(t/\varepsilon^2) - \exp(-n^2 a^2 t)]. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (11) имеет вид

$$\begin{aligned} z(x, t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp(-n^2 a^2(t-\tau)) f_n(\tau, \varepsilon) d\tau \right] \sin(nx) = \\ &= \frac{4\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(t/\varepsilon^2) - \exp(-(2k-1)^2 a^2 t)}{(2k-1)(1 + \varepsilon^2 (2k-1)^2 a^2)} \sin((2k-1)x), \end{aligned} \quad (15)$$

Решением задачи (6) будет функция

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &= z(x, t, \varepsilon) \exp(-t/\varepsilon^2) = \\ &= \left[\frac{4\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(t/\varepsilon^2) - \exp(-(2k-1)^2 a^2 t)}{(2k-1)(1 + \varepsilon^2 (2k-1)^2 a^2)} \sin((2k-1)x) \right] \exp(-t/\varepsilon^2) = \\ &= \frac{4\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-((2k-1)^2 a^2 + 1/\varepsilon^2) t)}{(2k-1)(1 + \varepsilon^2 (2k-1)^2 a^2)} \sin((2k-1)x). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ предельное значение решения (16) имеет вид

$$u(x, t, 0) = 0,$$

что полностью совпадает с главным членом $\bar{u}_0(x, t)$ регулярной части асимптотики (8), который определяет решение с точностью порядка ε .

4. Пример уравнения, решение которого при $\varepsilon \rightarrow 0$ не стремится к решению вырожденного уравнения

В прямоугольнике $\Omega_1 = \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу вида (1) для линейного параболического уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (a^2 u_{xx} - u_t) = -u - \varepsilon & \text{при } (x, t) \in \Omega_1, \\ u(x, 0, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ u(\pi, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (17)$$

В результате замены

$$u(x, t, \varepsilon) = z(x, t, \varepsilon) \exp(t/\varepsilon^2). \quad (18)$$

задача (17) примет вид

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx} + g(x, t, \varepsilon) & \text{при } (x, t) \in \Omega, \\ z(x, 0, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ z(0, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ z(\pi, t, \varepsilon) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (19)$$

где

$$g(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \exp(-t/\varepsilon^2). \quad (20)$$

Решение задачи (19) имеет вид

$$z(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp(-n^2 a^2 (t - \tau)) g_n(\tau, \varepsilon) d\tau \right] \sin(nx), \quad (21)$$

где g_n являются коэффициентами Фурье функции $g(x, t, \varepsilon)$ при разложении ее в ряд по синусам на промежутке $(0, \pi)$:

$$g(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t, \varepsilon) \sin(nx),$$

то есть коэффициенты g_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} g_n(t, \varepsilon) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\xi, t, \varepsilon) \sin(n\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \exp(-t/\varepsilon^2) \right] \sin(n\xi) d\xi = \\ &= \frac{2}{\varepsilon \pi n} (1 - (-1)^n) \exp(-t/\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Для четных n все коэффициенты $g_n(t, \varepsilon) = 0$. Соответственно в формуле (22) все коэффициенты при $\sin(nx)$ с четными n также равны нулю.

При нечетных n в формуле (22) коэффициенты при $\sin(nx)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\int_0^t \exp(-n^2 a^2 (t - \tau)) g_n(\tau, \varepsilon) d\tau = \\ &= \frac{4}{\varepsilon \pi n} \exp(-n^2 a^2 t) \int_0^t \exp((n^2 a^2 - 1/\varepsilon^2) \tau) d\tau = \\ &= \frac{4}{\varepsilon \pi n} \exp(-n^2 a^2 t) \frac{1}{n^2 a^2 - 1/\varepsilon^2} [\exp((n^2 a^2 - 1/\varepsilon^2) t) - 1] = \\ &= -\frac{4\varepsilon}{\pi n (1 - \varepsilon^2 n^2 a^2)} [\exp(-t/\varepsilon^2) - \exp(-n^2 a^2 t)]. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (19) имеет вид

$$z(x, t, \varepsilon) = -\frac{4\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-t/\varepsilon^2) - \exp(-(2k-1)^2 a^2 t)}{(2k-1) (1 + \varepsilon^2 (2k-1)^2 a^2)} \sin((2k-1)x), \quad (23)$$

Решением задачи (17) будет функция

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &= z(x, t, \varepsilon) \exp(t/\varepsilon^2) = \\ &= -\frac{4\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-((2k-1)^2 a^2 + 1/\varepsilon^2) t)}{(2k-1) (1 + \varepsilon^2 (2k-1)^2 a^2)} \sin((2k-1)x). \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ предельное значение (24) не равно нулю и не совпадает с решением вырожденного уравнения

$$F(u, x, t, 0) = -u = 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

СВОЙСТВО 2. *Если не выполняется условие 3, то решение задачи (1), полученное методом угловых пограничных функций, при $\varepsilon \rightarrow 0$, вообще говоря, не стремится к решению вырожденного уравнения $F(u, x, t, 0) = 0$.*

5. Заключение

Для задач вида (1) с нелинейностями $F(u, x, t, \varepsilon)$, в отличие от линейных задач, основной проблемой является доказательство существования решения. Такое доказательство удастся провести при выполнении условий 1–5. Задачи, как линейные, так и нелинейные, удовлетворяющие условиям 1–5, имеют решения, асимптотика которых с точностью порядка ε определяется решением вырожденного функционального уравнения $F(u, x, t, 0) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.
2. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 2. — С. 255–274.
3. Денисов А. И., Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 9. — С. 1581–1590.
4. Денисов А. И., Денисов И. В. Построение барьеров для сингулярно возмущенных задач в случае, когда точка перегиба расположена левее корня нелинейности // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2025. — Т. 65, № 12. — С. 2054–2063.
5. Денисов И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 11. — С. 1894–1903.
6. Денисов А. И., Денисов И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник. — 2023. — Т. 24, вып. 1 (88). — С. 27–39.
7. Денисов А. И., Денисов И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в случае влияния точки перегиба // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2025. — Т. 65, № 1. — С. 36–49.
8. Денисов А. И., Денисов И. В. Классификация кубических многочленов в нелинейном методе угловых пограничных функций // Чебышевский сборник. — 2025. — Т. 26, вып. 4. — С. 287–300.

REFERENCES

1. Vasilyeva, A.B. & Butuzov, V.F. 1990, *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*, Vysshaya Shkola, Moscow.
2. Denisov, I.V. 2017, “Angular boundary layer in boundary value problems for singularly perturbed parabolic equations with quadratic nonlinearity”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 57, no. 2, pp. 253–271.
3. Denisov, A.I. & Denisov, I.V. 2019, “Corner boundary layer in boundary value problems for singularly perturbed parabolic equations with nonmonotonic nonlinearities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 59, no. 9, pp. 1518–1527.
4. Denisov, A.I. & Denisov, I.V. 2025, “Construction of barriers for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities, taking into account the inflection point”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 65, no. 12, pp. 2928–2937.
5. Denisov, I.V. 2021, “Corner boundary layer in boundary value problems with nonlinearities having stationary points”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 61, no. 11, pp. 1855–1863.
6. Denisov, A.I. & Denisov, I.V. 2023, “Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 27–39.
7. Denisov, A.I. & Denisov, I.V. 2025, “Nonlinear method of corner boundary functions with the influence of an inflection point”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 65, no. 1, pp. 76–88.
8. Denisov, A.I. & Denisov, I.V. 2025, “Classification of cubic polynomials in the nonlinear method of angular boundary functions”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 26, no. 4, pp. 287–300.

Получено: 21.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026