

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 512.552 + 512.556

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-150-155

Дуальные кольца и топологический радикал Бэра

Д. Н. Белялов, В. В. Тензина

Белялов Дамир Наилевич — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: dam.bel07@gmail.com

Тензина Виктория Васильевна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: viktorija.tenzina@math.msu.ru

Аннотация

В работе мы рассматриваем ограниченные справа дуальные слева кольца. Доказано, что топологический радикал Бэра таких колец совпадает с множеством всех топологически нильпотентных элементов. Далее определяются топологически ниль-армендарицевы кольца. Доказано, что ранее рассмотренные кольца таковыми являются.

Ключевые слова: топологическое кольцо, дуальное кольцо, топологический радикал Бэра, армендарицево кольцо.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:

Белялов, Д. Н., Тензина В. В. Дуальные кольца и топологический радикал Бэра // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 150–155.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 512.552 + 512.556

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-150-155

Duo rings and the topological Baer radical

D. N. Belyalov, V. V. Tenzina

Belyalov Damir Nailevich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: dam.bel07@gmail.com

Tenzina Viktoria Vasilievna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: viktorija.tenzina@math.msu.ru

Abstract

In the paper we prove that the topological Baer radical of a right bounded left duo ring coincides with its set of the all topologically nilpotent elements. After that we define topologically nil-Armendariz rings. We prove that every right bounded left duo ring is a topologically nil-Armendariz ring.

Keywords: topological ring, duo ring, topological Baer radical, Armendariz ring.

Bibliography: 6 titles.

For citation:

Belyalov, D. N., Tenzina, V. V. 2026, “Duo rings and the topological Baer radical”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 150–155.

1. Введение

Абелева группа A является *топологической абелевой группой*, если A является топологическим пространством, в котором операция вычитания непрерывна, то есть отображение $(a_1, a_2) \rightarrow a_1 - a_2$ топологического пространства $A \times A$ в топологическое пространство A непрерывно. Кольцо R называют *топологическим кольцом*, если на множестве R определена топология такая, что аддитивная группа кольца R является топологической группой в этой топологии, и выполнено условие непрерывности умножения как отображения $(a, b) \rightarrow a \cdot b$ топологического пространства $R \times R$ в топологическое пространство R . Модуль M над топологическим кольцом R является *топологическим модулем*, если он является топологической абелевой группой и отображение $(r, m) \rightarrow rm$ топологического пространства $R \times M$ в топологическое пространство M непрерывно. Все рассматриваемые здесь кольца ассоциативны, а также все кольца и модули отделимы.

Кольцо называется *ограниченным справа (слева)*, если для любой окрестности нуля U в R существует окрестность нуля V в R такая, что $R \cdot V \subseteq U$ ($V \cdot R \subseteq U$) и *ограниченным*, если оно ограничено и слева, и справа. Элемент $a \in R$ называется *топологически нильпотентным*, если для любой окрестности нуля U существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ верно $a^n \in U$. Через $nil_t(R)$ будем обозначать множество топологически нильпотентных элементов кольца, а через $nil(R)$ – множество нильпотентных элементов кольца. Согласно [1] идеал I топологического кольца R называется Σ -*нильпотентным идеалом*, если для любой окрестности нуля V в R найдется такое натуральное число N , что для всех $n > N$ и всех натуральных k верно $I^n = \left\{ \sum_{i=1}^k a_{i_1} \dots a_{i_n} \mid a_{i_j} \in I \right\} \subseteq V$.

2. Топологический радикал Бэра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ([2]) Пусть $\mathfrak{R}(R)$ – замыкание суммы всех Σ -нильпотентных идеалов топологического кольца R . Для каждого порядкового числа α определен замкнутый идеал $\mathfrak{R}_\alpha(R)$ следующим образом: $\mathfrak{R}_0(R) = \{0\}$ и предположим, что все $\mathfrak{R}_\alpha(R)$ определены для всех $\alpha < \beta$. Если β предельное, то

$$\mathfrak{R}_\beta(R) = \left[\sum_{\alpha < \beta} \mathfrak{R}_\alpha(R) \right]_R.$$

В противном случае существует порядковое число γ такое, что $\beta = \gamma + 1$. В таком случае $\mathfrak{R}_\beta(R)$ полагается равным прообразу множества $\mathfrak{R}(R/\mathfrak{R}_\gamma(R))$ при естественном гомоморфизме $R \mapsto R/\mathfrak{R}_\gamma(R)$. Существует порядковое число τ такое, что $\mathfrak{R}_\tau(R) = \mathfrak{R}_{\tau+1}(R)$. Тогда $\mathcal{L}(R) = \mathfrak{R}_\tau(R)$ называется *топологическим радикалом Бэра* кольца R .

В самой статье [2] говорится про топологически нильпотентные идеалы вместо Σ -нильпотентных идеалов, но сейчас этот термин означает другое понятие.

В этой же статье [2] доказывается теорема о том, что в ограниченном коммутативном кольце топологический радикал Бэра совпадает с множеством топологически нильпотентных элементов.

Для обобщения этой теоремы нам понадобится понятие дуального кольца. В [3] были введены дуальные кольца как кольца, в которых каждый односторонний идеал является двусторонним. Позже дуальные кольца исследовались в [4], где было дано следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [4] Кольцо R называется дуальным слева (справа), если $\forall a, b \in R \exists c \in R : ab = ca$; справа; $\forall a, b \in R \exists d \in R : ab = bd$. Если кольцо дуально и слева, и справа, оно называется дуальным.

Например, все тела являются дуальными кольцами.

Известный факт, что если кольцо дуально слева, то всякий левый идеал этого кольца является двусторонним. Это следует из того, что если ρ — левый идеал кольца R , $x \in \rho$, $r \in R$, тогда найдётся $y \in R : xr = yx \in \rho$.

ЛЕММА 1. Если кольцо R дуально слева, то для любого натурального числа n и элементов из кольца $a, r_1, r_2, \dots, r_n$ найдётся элемент $d \in R$ такой, что

$$a \cdot r_1 \cdot a \cdot r_2 \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot r_n = da^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем методом математической индукции. При $n = 1$ по дуальности слева существует $d \in R$ такой, что $a \cdot r_1 = d \cdot a$. Пусть утверждение верно для $n - 1$. Тогда найдётся $x \in R$ такое, что

$$a \cdot r_2 \cdot a \cdot r_3 \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot r_n = xa^{n-1}.$$

Поэтому

$$a \cdot r_1 \cdot a \cdot r_2 \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot r_n = ar_1xa^{n-1}$$

Так как кольцо R дуально слева, то найдётся такое d , что $a \cdot r_1 \cdot x = da$. Итак,

$$a \cdot r_1 \cdot a \cdot r_2 \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot r_n = da^n$$

□

ЛЕММА 2. Множество $\text{nil}_t(R)$ всех топологически нильпотентных элементов ограниченного справа (слева) дуального слева (справа) кольца является замкнутым идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in \text{nil}_t(R)$, то очевидно, что $-a \in \text{nil}_t(R)$.

Пусть $a, b \in \text{nil}_t(R)$. Докажем, что $a + b \in \text{nil}_t(R)$. Пусть V — окрестность нуля в R . В силу ограниченности справа кольца найдётся такая симметричная окрестность V_1 , что $R \cdot V_1 + R \cdot V_1 \subseteq V$. Также найдутся натуральные числа n_1 и n_2 такие, что $a^{n_1} \in V_1$ и $b^{n_2} \in V_1$. Тогда

$$(a + b)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} \sum_{i_1+\dots+i_{k+1}=n_1+n_2-k} a^{i_1} b a^{i_2} \dots a^{i_k} b a^{i_{k+1}}$$

Заметим, что все мономы в этой сумме содержат либо не меньше n_1 штук множителей a , либо не меньше n_2 штук множителей b . Благодаря Лемме 1 первые такие слагаемые всегда лежат в Ra^{n_1} , а вторые в Rb^{n_2} . Таким образом, $(a + b)^{n_1+n_2} \in Ra^{n_1} + Rb^{n_2} \subseteq R \cdot V_1 + R \cdot V_1 \subseteq V$. Следовательно, $a + b \in \text{nil}_t(R)$.

Пусть $a \in \text{nil}_t(R)$. Докажем, что $ra \in \text{nil}_t(R)$ для любого $r \in R$. Пусть V — окрестность нуля в R . Ввиду ограниченности справа кольца R найдётся такая окрестность нуля V_2 в R , что $R \cdot V_2 \subseteq V$. Существует натуральное n такое, что $a^n \in V_2$. По лемме 1 найдётся такое $x \in R$, что $(ra)^n = r \cdot (ar)^{n-1} \cdot a = xa^n$. Таким образом, $(ra)^n \in R \cdot V_2 \subseteq V$.

Итак, $\text{nil}_t(R)$ является левым идеалом, а в силу дуальности слева будет двусторонним идеалом.

Покажем, что $\text{nil}_t(R)$ является замкнутым идеалом. Пусть $x \in [\text{nil}_t(R)]$, V — произвольная окрестность нуля. Тогда найдётся окрестность нуля V_3 кольца R такая, что $V_3 + R \cdot V_3 \subseteq V$. Так как $x \in \text{nil}_t(R) + V_3$, то найдутся элементы $a \in \text{nil}_t(R)$ и $v = x - a \in V_3$. Пусть натуральное число n таково, что $a^n \in V_3$. Тогда, учитывая дуальность слева кольца и Лемму 1, получаем $x^n = (a + v)^n \in a^n + Rv \subseteq V_3 + R \cdot V_3$. Таким образом, $[\text{nil}_t(R)] \subseteq \text{nil}_t(R)$. □

ЛЕММА 3. *В ограниченном справа (слева) дуальном слева (справа) кольце R факторкольцо $R/\text{nil}_t(R)$ не содержит ненулевых топологически нильпотентных элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x} \in R/\text{nil}_t(R)$ – топологически нильпотентный элемент и x – некоторый прообраз элемента $\bar{x}$ в R . Пусть V – произвольная окрестность нуля в R . Возьмем такую окрестность нуля V_1 , что $R \cdot V_1 + R \cdot V_1 \subseteq V$. В силу топологической нильпотентности $\bar{x}$ найдётся такое n , что $x^n \in \text{nil}_t(R) + V_1$. Пусть элементы $a \in \text{nil}_t(R)$, $b \in V_1$ таковы, что $x^n = a + b$. Пусть m – индекс нильпотентности a относительно V_1 , тогда имеет место разложение

$$x^i = x^{i-nm}(x^n)^m = x^{i-nm}(a+b)^m, \forall i > nm.$$

Действуем как в доказательстве предыдущей леммы

$$(a+b)^m \in Ra^m + Rb$$

Следовательно,

$$x^i = x^{i-nm}(a+b)^m \in Ra^m + Rb \subseteq R \cdot V_1 + R \cdot V_1 \subseteq V, \forall i > nm.$$

В силу произвольности V , $x \in \text{nil}_t(R)$. Следовательно $\bar{x} = 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *В ограниченном справа (слева) дуальном слева (справа) кольце R топологический радикал Бэра совпадает с множеством всех топологически нильпотентных элементов.*

$$\mathcal{L}(R) = \text{nil}_t(R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ещё Арнаутовым В.И. в статье [2] упоминается очевидный факт, что если кольцо не содержит Σ -нильпотентных идеалов, то оно $\mathcal{L}$ -полупросто. Из леммы 2 и леммы 3 получаем, что $\mathcal{L}(R) \subseteq \text{nil}_t(R)$.

Пусть $a \in \text{nil}_t(R)$, а V – окрестность нуля в R . Ввиду ограниченности справа кольца R найдётся такая окрестность нуля V_1 в R , что $R \cdot V_1 \subseteq V$. Существует натуральное n такое, что $a^n \in V_1$. По Лемме 1 найдётся такое $x \in R$, что $(ra)^n = xa^n$. Таким образом, получаем, что $(Ra)^n \subseteq R \cdot V_1 \subseteq V$, а значит, $Ra \subseteq \text{nil}_t(R)$. По доказанному в лемме 2 подмножество Ra является двусторонним идеалом, а значит, Σ -нильпотентным идеалом. Поэтому $\text{nil}_t(R) \subseteq \mathcal{L}(R)$. $\square$

3. Топологически ниль-армендарицевые кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 ([5], Definition 1.1.). *Кольцо R называется армендарицевым, если для любых многочленов $f(x), g(x) \in R[x]$ выполняется условие:*

$$fg = 0 \Rightarrow a_i b_j = 0, \forall a_i \in \text{coef}(f) \forall b_j \in \text{coef}(g).$$

Здесь $\text{coef}(f)$ обозначает множество коэффициентов многочлена f из кольца R .

Кольца названы в честь Е. Армендарица, который показал, что приведенные кольца, то есть кольца без ненулевых нильпотентных элементов, обладают этим свойством (см. лемма 1 в [5]). Кольцо R называется *ниль-армендарицевым* (см. [6]), если $\forall f, g \in R[x]$ выполняется условие: $fg \in \text{nil}(R)[x] \Rightarrow a_i b_j \in \text{nil}(R), \forall a_i \in \text{coef}(f) \forall b_j \in \text{coef}(g)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Назовём кольцо R топологически ниль-армендарицевым, если $\forall f, g \in R[x]$ выполняется импликация:*

$$fg \in \text{nil}_t(R)[x] \Rightarrow a_i b_j \in \text{nil}_t(R), \forall a_i \in \text{coef}(f) \forall b_j \in \text{coef}(g).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть R — ограниченное справа (слева) дуальное слева (справа) кольцо. Тогда кольцо R топологически ниль-армендарицево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что $\text{nil}_t(R)$ является замкнутым идеалом. Положим $\bar{R} = R/\text{nil}_t(R)$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi : R \mapsto \bar{R}$. Кольцо $\bar{R}$ не содержит топологически нильпотентных элементов, а значит является приведённым. По лемме 1 из [5] кольцо $\bar{R}$ является армендарицевым. Следовательно, для любых $a \in \text{coef}(f)$ и $b \in \text{coef}(g)$ выполняется $\varphi(a)\varphi(b) = \{0\}$. А значит $ab \in \text{nil}_t(R)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Дуальное слева (справа) ограниченное справа (слева) кольцо R удовлетворяет условию:

$$\forall f_1 \dots f_n \in R[x] : f_1 \cdot \dots \cdot f_n \in \text{nil}_t(R)[x] \Rightarrow a_1 \cdot \dots \cdot a_n \in \text{nil}_t(R) \quad \forall a_i \in \text{coef}(f_i).$$

4. Заключение

Доказательства теорем 1 и 2 опираются на ключевую лемму 2, утверждающую, что все топологически нильпотентные элементы ограниченного справа (слева) и дуальное слева (справа) кольца образуют замкнутый идеал.

Заметим, что в случае произвольного топологического даже коммутативного кольца это неверно. Достаточно рассмотреть кольцо действительных чисел с интервальной топологией. Известно, что существуют дискретные кольца, в которых множество всех нильпотентных элементов не является идеалом. Например, в кольце матриц $M_2(\mathbb{R})$ элементы $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ нильпотентны, но элемент $x + y$ не является нильпотентным. Таким образом, оба условия в формулировке леммы существенны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. // New York: Marcel Dekker, 1996. 502 p.
2. Арнаутов В. И., Топологический радикал Бэра и разложение кольца // Сибирский математический журнал. 1964. Том 5, № 6. С. 1209-1227.
3. Feller E. H. Properties of primary noncommutative rings // Transactions of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 89. P. 79–91.
4. Thierrin G. On Duo Rings // Canadian Mathematical Bulletin. 1960. Vol. 3, № 2. P. 167–172.
5. M. Rege, S. Chhawchharia, Armendariz rings, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73 (1997) 14–17.
6. Antoine R. Nilpotent elements and Armendariz rings // Journal of Algebra. 2008. Vol. 319. P. 3128–3140.

REFERENCES

1. Arnautov, V.I., Glavatsky, S.T. & Mikhalev, A.V. 1996, *Introduction to the theory of topological rings and modules*, Marcel Dekker, New York, 502 p.

2. Arnautov, V.I. 1964, "Topological Baer radical and decomposition of rings" [Topologicheskii radikal Bera i razlozhenie kolets], *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 5, no. 6, pp. 1209–1227.
3. Feller, E.H. 1958, "Properties of primary noncommutative rings", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 89, pp. 79–91.
4. Thierrin, G. 1960, "On duo rings", *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 3, no. 2, pp. 167–172.
5. Rege, M. & Chhawchharia, S. 1997, "Armendariz rings", *Proceedings of the Japan Academy. Series A, Mathematical Sciences*, vol. 73, pp. 14–17.
6. Antoine, R. 2008, "Nilpotent elements and Armendariz rings", *Journal of Algebra*, vol. 319, pp. 3128–3140.

Получено: 28.01.2026

Принято в печать: 19.05.2026