

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 27. Выпуск 2.

УДК: 511

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-145-149

**О применимости правила Рунге в многомерной
Фурье-интерполяции на теоретико-числовых сетках**

Ю. А. Басалов, Е. М. Миронов

Басалов Юрий Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Миронов Егор Михайлович — магистрант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула)..

*e-mail: mironov.e02@mail.ru***Аннотация**

В работе исследуется применимость правила Рунге для оценки равномерной погрешности тригонометрической интерполяции $\|f - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}\|$ на параллелепипедальных сетках Коробова. В качестве индикатора погрешности предложено сравнение интерполанта с его значениями на сдвинутой параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)_{2N}$: индикатор сводится к одному обратному БПФ длины $2N$ и имеет ту же сложность, что и интерполяция. На тестовых функциях из классов Коробова E_2^2 и E_2^∞ показано, что отношение точной погрешности к Рунге-индикатору устойчиво по N .

Ключевые слова: правило Рунге, тригонометрическая интерполяция, параллелепипедальные сетки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

Басалов Ю. А., Миронов Е. М. О применимости правила Рунге в многомерной Фурье-интерполяции на теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник, 2026, т. 27, вып. 2, с. 145–149.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 27. No. 2.

UDC: 511

DOI: 10.22405/2226-8383-2026-27-2-145-149

**On the applicability of Runge's rule in multidimensional Fourier
interpolation on number-theoretic grids**

Yu. A. Basalov, E. M. Mironov

Basalov Yuriy Aleksandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Mironov Egor Mikhailovich — master's student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: mironov.e02@mail.ru

Abstract

We study the applicability of Пунге's rule for estimating the uniform interpolation error $\|f - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}\|$ for two-dimensional trigonometric interpolation on Korobov parallelepipedal grids. As a indicator we propose comparing the interpolant against its values on the shifted parallelepipedal grid $M(\Lambda)_{2N}$: the indicator reduces to a single inverse FFT of length $2N$ and has the same cost as the interpolation. On test functions from the Korobov classes E_2^2 and E_2^∞ , the ratio of the exact error to the Пунге indicator is found to be stable in N .

Keywords: Пунге rule, trigonometric interpolation, parallelepipedal grids.

Bibliography: 5 titles.

For citation:

Basalov, Yu. A., Mironov, E. M. 2026, "On the applicability of Пунге's rule in multidimensional Fourier interpolation on number-theoretic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 27, no. 2, pp. 145–149.

1. Введение

Параллелепипедальные сетки Коробова [1] обеспечивают оптимальные оценки погрешности квадратурных формул для классов периодических функций. Те же сетки служат для *интерполяции*: s -мерное приближение $S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}$ строится как тригонометрический полином, гармоники которого выбираются по полной системе вычетов $M^*(\Lambda)$, а коэффициенты определяются дискретным преобразованием Фурье длины N значений f в узлах сетки. В работах [2, 3] установлено, что многомерная Фурье-интерполяция по параллелепипедальной сетке сводится к одномерной Фурье-интерполяции, что даёт вычислительную сложность $O(N \log N)$.

Прямое измерение погрешности $\delta_G(N) = \|f - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}\|$ вычислительно крайне сложно.

В настоящей работе предложен индикатор $\delta_R(N)$, реализующий правило Рунге для интерполяции: погрешность измеряется на удвоенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)_{2N}$ за одно обратное БПФ длины $2N$, со сложностью $O(N \log N)$, совпадающей со сложностью самой интерполяции. На функциях из классов Коробова E_2^2 и E_2^∞ отношение точной погрешности $\delta_G(N)$ к индикатору $\delta_R(N)$ устойчиво по N .

2. Постановка задачи

Пусть $s = 2$, $N \in \mathbb{N}$, и $a \in \{1, \dots, N-1\}$ взаимно прост с N . Параллелепипедальная сетка

$$M(a, N) = \left\{ \left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{ak}{N} \right\} \right) : k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \subset \mathbb{T}^2, \quad (1)$$

а $\Lambda(a, N) = \{m \in \mathbb{Z}^2 : m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod{N}\}$ — решётка решений соответствующего линейного сравнения. Интерполяционный многочлен $S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}$ записывается в виде [2]

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}(x) = \sum_{m \in M_H^*(\Lambda)} c_m e^{2\pi i \langle m, x \rangle}, \quad c_m = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f^*\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i (m_1 + am_2)j/N}, \quad (2)$$

где $f^*(t) = f(t, \{at\})$, а $M_H^*(\Lambda) \subset \mathbb{Z}^2$ — минимальная гиперболическая система вычетов решётки линейного сравнения $\mathbb{Z}^2/\Lambda$.

Функция f принадлежит классу Коробова E_2^α , $\alpha > 1$, если её коэффициенты Фурье удовлетворяют оценке $|\hat{f}_m| \leq C(f) (\bar{m}_1 \bar{m}_2)^{-\alpha}$. Тогда [5]

$$\sup_{f \in E_2^\alpha} \|f - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}\| \leq C(\alpha) \frac{(\ln N)^\alpha}{N^\alpha}. \quad (3)$$

Введём две оценки погрешности интерполяции:

- *точная оценка* $\delta_G(N) = \max_{x \in [0,1)^2} |f(x) - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}(x)|$.
В численных экспериментах будем оценивать ее с помощью приближения $\delta_{G^*}(N) = \max_{x \in G_R \times G_R} |f(x) - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}(x)|$, где $G_R = \{l/R : 0 \leq l \leq R\}$, $R \sim 10^4$;
- *Рунге-индикатор* $\delta_R(N) = \max_{y \in M(\Lambda)_{2N}} |f(y) - S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}(y)|$, где

$$M(\Lambda)_{2N} = \left\{ \left(\frac{2k+1}{2N}, \left\{ \frac{a(2k+1)}{N} \right\} \right) : k = 0, \dots, N-1 \right\} \quad (4)$$

— сдвинутая параллелепипедальная сетка, являющаяся разностью сеток $M(2a, 2N)$ и $M(a, N)$.

3. Сведение Рунге-индикатора к обратному БПФ

Подставляя $y_k = ((2k+1)/(2N), a(2k+1)/N \bmod 1)$ в (2), получаем

$$m_1 \cdot y_{k,1} + m_2 \cdot y_{k,2} = \frac{(m_1 + 2am_2)(2k+1)}{2N} \pmod{1}.$$

Положим $q_m = (m_1 + 2am_2) \bmod 2N$ и

$$C[q] = \sum_{m \in M_H^* : q_m = q} c_m, \quad q = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Тогда значения интерполянта на $M(\Lambda)_{2N}$ это

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda), f}(y_k) = \sum_{q=0}^{2N-1} C[q] e^{2\pi i \frac{q(2k+1)}{2N}} = 2N \cdot [\text{iDFT}_{2N}(C)]_{2k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

то есть нечётные позиции обратного дискретного преобразования Фурье длины $2N$ массива C . Вычисление $\delta_R(N)$ требует одного БПФ длины $2N$ и N дополнительных обращений к f в узлах $M(\Lambda)_{2N}$, общей стоимостью $O(N \log N)$.

4. Численный эксперимент

Эксперимент проведён для двух тестовых функций $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h_2(x) &= 9(1-2x_1)^2(1-2x_2)^2, & h_2 &\in E_2^2; \\ g(x) &= (2,5 - \cos 2\pi(x_1 - x_2) - \cos 2\pi(x_1 + x_2))^{-1}, & g &\in E_2^\infty. \end{aligned}$$

h_2 — функция из C^0 , но не C^1 периодическим продолжением (разрыв первой производной на границе); функция g — функция с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье. Параметры сетки заданы фибоначиевыми парами $(a, N) = (F_k, F_{k+2})$, $k = 10, \dots, 22$ [4]. Точная оценка $\delta_G(N)$ вычисляется как максимум по объединению нескольких равномерных сеток $G \times G$, ($G \sim 10^4$). Результаты приведены в таблице 1. Наблюдаемая константа правила

Рунге имеет порядок $\frac{\delta_G}{\delta_R} \approx 2$.

Таблица 1: Скорость сходимости погрешности и Рунге-константа на тестовых функциях. Регрессия $\delta_G = k \delta_R$ через начало координат; $\rho = \delta_G/\delta_R$ — эмпирическое отношение по всем N .

Функция	Класс	$\delta_R \sim N^{-\alpha_R}$	$\delta_G \sim N^{-\alpha_G}$	k	$\bar{\rho}$	$\rho_{\max}$
h_2	E_2^2	$\alpha_R \approx 0,81$	$\alpha_G \approx 0,82$	2,32	2,31	2,60
g	E_2^∞	сверхстепенная сходимость		1,45	1,57	2,07

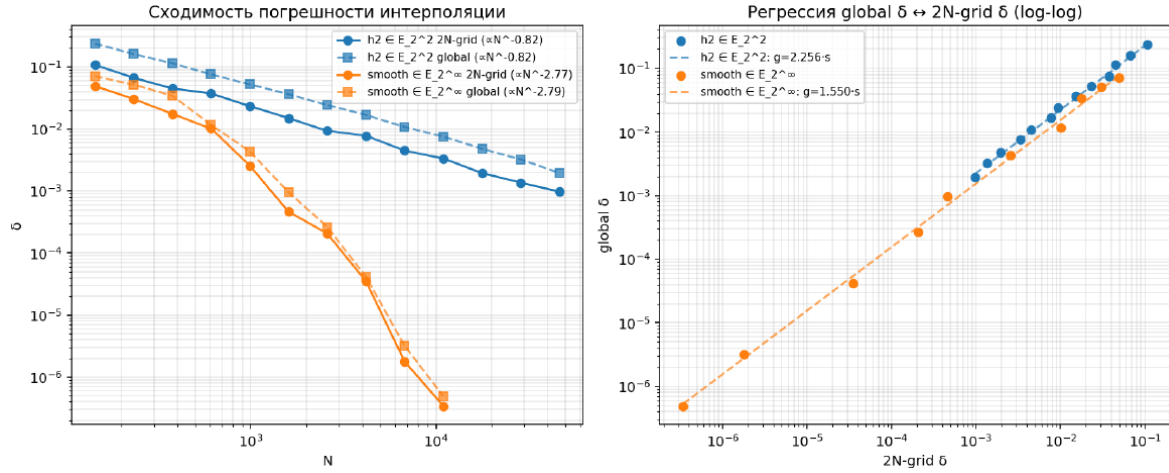


Рис. 1: Слева — степенная сходимость $\delta_R(N)$ (сплошные линии, кружки) и $\delta_G(N)$ (пунктир, квадраты) в логарифмических координатах для функций h_2 , t , g . Справа — линейная регрессия $\delta_G = k \delta_R$ через начало координат в логарифмических координатах; угловые коэффициенты k совпадают с приведёнными в таблице 1.

5. Заключение

Для двумерной тригонометрической интерполяции на параллелепипедальных сетках Коброва предложен индикатор $\delta_R(N)$, реализующий правило Рунге через сдвинутую сетку $M(\Lambda)_{2N}$. Сложность индикатора $O(N \log N)$ совпадает со сложностью самой интерполяции.

На функциях из классов E_2^2 и E_2^∞ отношение точной погрешности $\delta_G(N)$ к Рунге-индикатору $\delta_R(N)$ устойчиво по N и приближенно равно $\frac{\delta_G}{\delta_R} \approx 2$. На практике это позволяет использовать $\delta_R(N)$ как индикатор точности при выборе размера сетки в численных экспериментах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М.: Физматгиз, 1963.
2. Басалов Ю. А., Добровольский Н. Н., Чубариков В. Н. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 517. С. 41–43.
3. Басалов Ю. А., Быковский В. А., Добровольский Н. Н., Чубариков В. Н., Добровольский Н. М. Многомерная Фурье-интерполяция и трудоёмкость быстрого преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, вып. 4. С. 42–52.

4. Н. С. Бахвалов, О приближенном вычислении кратных интегралов, Вестн. МГУ, № 4 (1959), 3–18.
5. Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Басалов Ю. А., Реброва И. Ю. Погрешность приближённого интегрирования на классах функций, заданных моноидами натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, вып. 4. С. 74–105.

REFERENCES

1. Korobov, N. M. 1963, *Number-theoretic methods in approximate analysis*, Fizmatgiz, Moscow. [in Russian]
2. Basalov, Yu. A., Dobrovol'skii, N. N. & Chubarikov, V. N. 2024, "Multidimensional Fourier interpolation and fast Fourier transforms", *Doklady Rossijskoj Akademii Nauk. Matematika, Informatika, Processy Upravleniya*, vol. 517, pp. 41–43.
3. Basalov, Yu. A., Bykovskii, V. A., Dobrovol'skii, N. N., Chubarikov, V. N. & Dobrovol'skii, N. M. 2024, "Multidimensional Fourier interpolation and complexity of the fast Fourier transform", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 42–52.
4. Bahvalov, N. S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Vestnik Moskovskogo Universiteta*, 4, pp. 3–18.
5. Dobrovol'skii, N. N., Dobrovol'skii, N. M., Basalov, Yu. A. & Rebrova, I. Yu. 2024, "Error of approximate integration and interpolation on classes of functions defined by monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 74–105.

Получено: 19.12.2025

Принято в печать: 19.05.2026